

УДК 621.3.04::519.64

А. Л. Тарчуткин, М. В. Остренко

## Использование метода интегральных уравнений для снижения размерности конечно-элементной задачи электростатического поля

*Разработана математическая модель и программный комплекс Elax 2D, обладающий возможностью моделирования методом конечных элементов задач большой размерности, в том числе с открытыми границами. Увеличение точности моделирования достигнуто с помощью разделения задачи на несколько подзадач при использовании метода интегральных уравнений.*

### Введение

Увеличение эксплуатационных нагрузок на изоляцию трансформаторов, связанное с применением быстродействующих вакуумных и элегазовых выключателей, а также мероприятия по усовершенствованию трансформаторов приводит к увеличению напряженности электрических полей в изоляционных элементах изделий. Чтобы значения напряженности не превысили предельно допустимых значений, требуется применять при расчете электрических полей все более точные и надежные методы расчета.

Использование метода конечных элементов (МКЭ) для решения электростатических задач достаточно распространено [1–4]. Но при моделировании полей реальных объектов (трансформаторов, электрических реакторов с маслобарьерной или газовой изоляцией) приходится сталкиваться с рядом особенностей МКЭ. Так, при использовании элементов первого порядка (с линейной интерполирующей функцией) размер конечного элемента должен быть много меньше радиуса кривизны электрода. В некоторых практических случаях при высоких напряженностях поля и малых радиусах кривизны электродов размер ребра конечного элемента необходимо снижать до сотых долей миллиметра (долей градуса в угловом измерении). Особенно критична эта особенность МКЭ для расчета электростатических полей в трансформаторах с газовой изоляцией, где основой расчета является определение максимальных напряженностей на поверхности электродов и в узких газовых щелях. Использование мелких сеток приводит к тому, что количество узлов конечно-элементной сетки достигает миллионов. Такую задачу уже сложно решить на обычном персональном компьютере (ПК) за непродолжительное время (в пределах нескольких часов). Поэтому задача снижения размерности конечно-элементной модели электростатического поля является актуальной.

Следует отметить, что одним из способов решения данной проблемы является использование элементов высокого порядка (например – второго). Но в этом случае, если вид функции интерполянта не совпадает с характером поля вблизи электродов, то не удастся достичь необходимой точности расчета напряженности поля [1].

© А. Л. Тарчуткин, М. В. Остренко 2009 г.

### Постановка задачи

В качестве иллюстрации вышеизложенного рассмотрим поле круглого провода диаметром 22,222 мм без изоляции в среде с относительной диэлектрической проницаемостью 1, находящегося под потенциалом 100 кВ. Характерная сетка вблизи поверхности электрода изображена на рис. 1. Заземленное пространство находится на бесконечно большом удалении. Точное аналитическое решение задачи дает значение напряженности поля на поверхности проводника 2,000 кВ/мм.

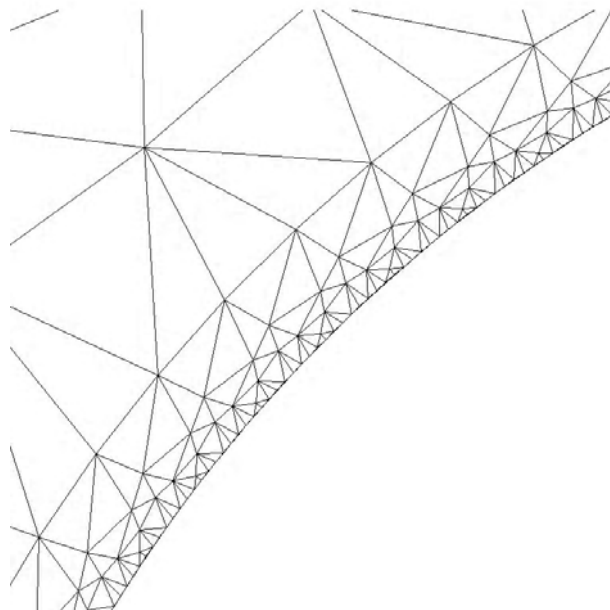


Рис. 1. Характерная мелкая сетка вблизи границы проводника

Как видно из табл. 1, удовлетворительная для инженерных расчетов точность (менее 2%) достигается при размерах ребра менее 0,2 градуса (0,04 мм) при радиусе кривизны 11,111 мм. В практических задачах часто встречаются электроды с меньшими радиусами кривизны, что наряду с большим объемом расчетной области делает невозможным расчет поля из-за нехватки оперативной памяти ПК.

Целью данной статьи является разработка математической модели, являющейся основой для создания программного комплекса, позволяющая:

- снизить размерности задачи МКЭ;
- увеличить точность моделирования на основе разделения задачи на несколько подзадач с использованием метода интегральных уравнений;
- допускать решение задач в МКЭ с открытыми границами (что реализовано впервые в такой постановке задачи);
- решать практические задачи расчета изоляции (расчет напряженностей поля и других его характеристик) в трансформаторах и реакторах с точностью не менее 2%.

Таблица 1. Результаты сравнения точности расчета

|   |       |     |      |      |      |       |       |
|---|-------|-----|------|------|------|-------|-------|
| Угловой размер ребра на окружности, град.                         | 18    | 9   | 4    | 2    | 0,5  | 0,1   | 0,02  |
| Среднее значение напряженности поля на поверхности провода, кВ/мм | 1,55  | 1,7 | 1,85 | 1,89 | 1,95 | 1,975 | 1,983 |
| Погрешность, %  | -22,5 | -15 | -7,5 | -5,5 | -2,5 | -1,25 | -0,88 |

### Формулировка задачи для расчета плоского поля

Рассмотрим составную область пространства, состоящую из проводника  $\Omega_c$  с определенным электрическим потенциалом  $U = u_0$  на его поверхности и двух диэлектриков  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  с разными диэлектрическими проницаемостями (рис. 2). В классической постановке МКЭ необходимо решать задачу во всей составной области диэлектриков с заданными граничными условиями на проводнике и на внешней границе. В случае если внешние границы являются открытыми, то задачу невозможно решить с помощью МКЭ. Предлагается следующий подход: определение граничных условий потенциала на внешних и внутренних границах  $\Gamma$ ,  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_j$  с помощью метода конечных элементов и последующий расчет поля внутри каждой области диэлектрика с помощью МКЭ.

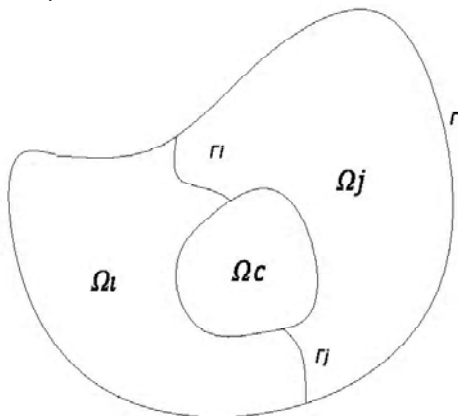


Рис. 2. Расчетная область

Метод интегральных уравнений предполагает выбор типа вторичных источников поля на границах раздела сред. В качестве вторичных источников в нижеприведенных выражениях выбран простой слой зарядов [5]:

- интегральное уравнение на границе диэлектриков [5]

$$\sigma_Q - \frac{\lambda}{\pi} \oint_{L_f} \sigma_M \left[ \frac{(\vec{r}_{QM}, \eta_Q)}{r_{QM}^2} - \frac{\pi}{L_f} \right] dL_M = 0, \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{\epsilon_{вн} - \epsilon_{н}}{\epsilon_{вн} + \epsilon_{н}},$$

где  $\sigma_Q$  – плотность простого слоя электрического заряда в расчетной точке Кл/м<sup>2</sup>;

$\sigma_M$  – функция плотности простого слоя зарядов (подлежит определению);

$L_f$  – контур образующей тела, на которой находится точка Q;

$\vec{r}_{QM}$  – радиус-вектор из точки Q в M;

$\eta_Q$  – нормальный вектор на границе раздела сред;

$\epsilon_{вн}$ ,  $\epsilon_{н}$  – диэлектрическая проницаемость среды внутри и снаружи диэлектрика.

– интегральное уравнение на границе раздела диэлектрик-проводник [2]

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_H} \oint_{L_f} \sigma_M \ln \frac{1}{r_{QM}} dL_M = \varphi_Q, \quad (2)$$

где  $\epsilon_H$  – диэлектрическая проницаемость диэлектрика снаружи проводника.

Из вышеприведенных интегральных уравнений (1) и (2) формируется совместная система уравнений системы тел диэлектриков и проводников, проводится ее алгебраизация (формирование системы алгебраических линейных уравнений) и решение прямым (Гаусса) методом [5].

После нахождения плотностей заряда на границах раздела определяются потенциалы вдоль границ  $\Gamma$ ,  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_j$  [5]

$$\varphi_\Gamma = \sum_i \frac{1}{2\pi\epsilon_H} \oint_{L_f} \sigma_M \ln \frac{1}{r_{QM}} dL_M + \sum_j \frac{1}{2\pi} \oint_{L_f} \sigma_M \ln \frac{1}{r_{QM}} dL_M,$$

где  $i$  – границы проводников,  $j$  – границы диэлектриков.

Методом конечных элементов находится распределение электростатического поля внутри диэлектрика [2].

Напряженность электрического поля определяется уравнением Максвелла [6]

$$\text{div}(\vec{\epsilon E}) = \rho, \quad (3)$$

где:  $\vec{E}$  – вектор электрического поля, В/м;  
 $\vec{\varepsilon}$  – ортотропный тензор абсолютной диэлектрической проницаемости, Ф/м;  
 $\rho$  – плотность электрического заряда, Кл/м<sup>3</sup>.  
 С другой стороны, напряженность электрического поля можно выразить через электрический потенциал

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U, \quad (4)$$

где  $U$  – электрический потенциал, В.

Комбинируя (3) и (4) получаем уравнение Пуассона

$$-div(\vec{\varepsilon}\vec{\nabla}U) = \rho. \quad (5)$$

Для нахождения решения этого уравнения в области  $\Omega$  необходимо определить граничные условия на поверхностях, ограничивающих область  $\Omega$ . Возьмем граничное условие Дирихле

$$U|_{\sigma} = u^*(Q), \quad (6)$$

где  $Q$  – точка поверхности  $\sigma$ ,  $u^*(Q)$  – поле скалярного потенциала, определенное на поверхности  $\sigma$ .

Для расчета распределения электрического поля необходимо решить уравнение (5) со сформулированными граничными условиями (6).

### Численный алгоритм

Для решения задачи разобьем область на подобласти  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  (рис. 2). В каждой подобласти построим сетку конечных элементов с количеством узлов, удовлетворяющим требованиям точности задачи.

Внутри диэлектрика потенциал  $U$  линейно интерполируем выражением

$$U = \sum_{i=1}^N u_i \cdot \xi_i, \quad (7)$$

где  $u_i$  – потенциал в узле конечно-элементной сетки;  
 $\xi_i$  – интерполяционная функция;  
 $N$  – число узлов.

Применяя процедуру Галеркина [2] к уравнению (5), получаем систему

$$(\varepsilon_x M_x + \varepsilon_y M_y) \cdot U = \rho, \quad (8)$$

где:

$$M_x = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} dV,$$

$$M_y = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} dV,$$

$$\rho = \rho \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \xi_i dV.$$

Матрица коэффициентов в системе линейных алгебраических уравнений (8) – разреженная, симмет-

ричная, положительно определенная, следовательно, система уравнений может быть решена итерационным методом [2]. Авторами используется метод сопряженных градиентов с предуславливанием матрицы, который имеет ряд преимуществ перед многими прямыми и итерационными методами [7, 8] и хорошо подходит для решения конечноэлементных задач.

### Примеры и результаты расчетов

Вышеизложенные методы были реализованы в программном комплексе расчета изоляции Elax 2D. В качестве примера на рис. 3 приведена картина поля участка главной изоляции автотрансформатора, наложенная на изображение расчетной модели изоляции. На рисунке видно строение маслобарьерной изоляции, включающей, элементы обмотки трансформатора, емкостное кольцо, барьеры из электрокартона и другие элементы изоляции. Одна из обмоток имеет потенциал 100 % относительно заземленных частей и других обмоток.

На границах подобластей методом интегральных уравнений считается электрический потенциал, который служит граничным условием для расчета электростатического поля внутри подзадачи.

Поскольку относительная погрешность метода конечных элементов имеет степенную зависимость от размера элемента [1], то для оценки точности расчета необходимо провести несколько расчетов, с последовательным увеличением количества элементов в сетке. Относительную погрешность можно оценить, используя энергетическую норму [3]. Расчет считается достаточно точным при достижении относительной погрешности допустимого значения.

Данные по модели:

– количество расчетных отрезков для расчета граничных условий – 4246;

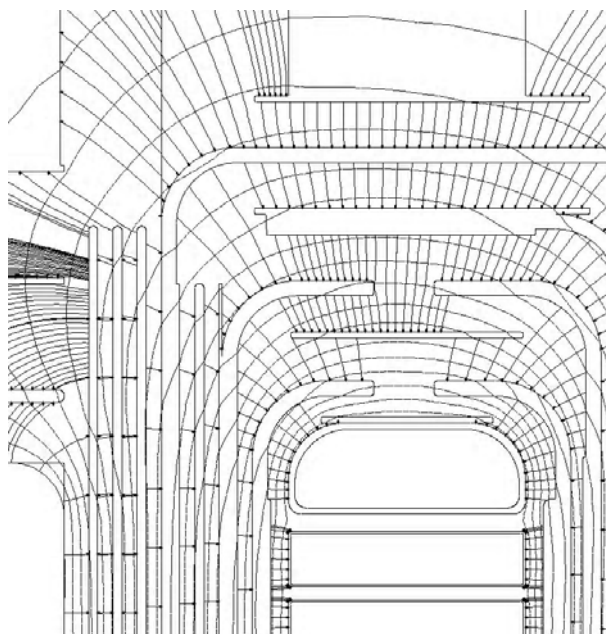


Рис. 3. Картина поля в участке главной изоляции автотрансформатора

– количество конечных элементов в модели – 4293802;  
– количество расчетных точек – 2222462.

### Выводы

1. Разработана математическая модель, являющаяся основой для создания нового программного комплекса и разработан сам программный комплекс Elax 2D.

2. Разработанный программный комплекс Elax 2D обладает возможностью расчетов МКЭ задач большой размерности, в том числе, с открытыми границами, что применено впервые.

3. Elax 2D позволяет решать практические задачи расчета изоляции, включая расчет характеристики поля, в трансформаторах и реакторах, с точностью не менее 2 %.

4. Elax 2D имеет простой интуитивный интерфейс с набором инструментов, необходимым для ввода графической модели любой сложности.

### Перечень ссылок

1. Сильвестер П. Л. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков : пер. с англ. / П. Л. Сильвестер, Р. Л. Феррари. – М. : Мир, 1986. – 229 с., ил.

2. Норри Д. Введение в метод конечных элементов : пер. с англ. / Норри Д., де Фриз Ж. – М. : Мир, 1981. – 304 с., ил.
3. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method. The Basis, Butterworth-Heinemann / Zienkiewicz O. C. Taylor R. L. – Oxford, 2000. – 538 p.
4. Hutton. Fundamentals of Finite Element Analysis / Hutton, Daviv V. – McGraw-Hill, 2004. – 312 p.
5. Тозони О. В. Расчет трехмерных электромагнитных полей / Тозони О. В., Майергойз И. Д. – К. : Техника, 1974. – 352 с., ил.
6. Левин В. И. Методы математической физики / Левин В. И. – М. : Издательство министерства просвещения РСФСР, 1956. – 243 с., ил.
7. Shewchuk J. R. An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain / Shewchuk J. R. – Pittsburgh. : School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1994. – 356 p.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Бахвалов Н. С. – М. : Наука, 1973. – 631 с., ил.

Поступила в редакцию 25.12.08 г.

После доработки 16.03.09 г.

*Розроблена математична модель і програмний комплекс Elax 2D, що володіє можливістю моделювання методом кінцевих елементів задач великої розмірності, зокрема з відкритими межами. Збільшення точності моделювання досягнуте за допомогою розділення завдання на декілька підзадач при використанні методу інтегральних рівнянь.*

*The mathematical model and bundled software Elax 2D possessing the possibility of modeling by the method of eventual elements of high dimensionality problems including with the open scopes is developed. The increase of the modeling exactness is attained by the task division on some subtasks and use of integral equation method.*

УДК 621.313.32

Ю. Н. Васьковский, А. А. Гераскин

## Математическое моделирование вибровозмущающих сил в короткозамкнутом асинхронном двигателе с поврежденной обмоткой ротора

*Сформулирована математическая модель для анализа вибровозмущающих электромагнитных сил в короткозамкнутых асинхронных двигателях при наличии поврежденной обмотки ротора. Показано, что сравнительный анализ спектрограмм этих сил позволяет с высокой достоверностью выявлять повреждения обмотки ротора.*

### Введение

Мощные асинхронные двигатели (АД) с короткозамкнутой обмоткой ротора типа «беличья клетка» широко применяются для привода механизмов собственных нужд ТЭС и АЭС, на электротранспорте и в ряде ответственных технологических систем. Одним из наиболее нагруженных узлов конструкции АД является короткозамкнутая обмотка ротора. Повреждения об-

мотки ротора составляют около 80 % всех повреждений, связанных с ротором АД [1]. Разрушение конструкции обмотки ротора возникает не только из-за первичных технологических дефектов ее изготовления, но и в результате постепенной деградации конструкции в условиях высоких нагрузок. Постепенное ослабление крепления стержней в пазах ротора ведет к увеличению их вибрации, образованию и быстрому росту трещин и затем – к обрыву стержней. Поломка

© Ю. Н. Васьковский, А. А. Гераскин 2009 г.