

4. Lin B.R., Lee Y.-C. Three-Phase Power Quality Compensator Under the Unbalanced Sources and Nonlinear Loads // IEEE Transaction on Industrial Electronics. – 2004. – Volume 51, Issue 5. – P. 1009–1017.
5. Волков А.В., Антонов Н.Л. Быстродействующее векторное регулирование статорного тока в асинхронных электроприводах с двухзвенным непосредственным преобразователем частоты // Электромашинобудування та електрообладнання. – К.: Техніка. – 2004. – Вип. 62. – С. 21–24.
6. Волков А. В., Антонов Н. Л.. Расчет параметров сетевого фильтра двухзвенного непосредственного преобразователя частоты с широтно-импульсной модуляцией // Электро-машинобудування та електрообладнання. – К.: Техніка. – 2006. – Вип. 66. – С. 269–270.
7. Зиновьев Г. С. Основы силовой электроники. – Новосибирск: НГТУ, 2003. – 664 с.
8. Чиженко И. М., Руденко В.С., Сенько В. И. Основы преобразовательной техники. – М.: Высш. шк., 1974. – 430 с.
9. Волков А. В., Антонов Н. Л. Цифровая модель двухзвенного непосредственного преобразователя частоты с широтно-импульсной модуляцией, нагруженного на асинхронный двигатель // Електротехніка та електроенергетика. – 2003. – №2. – С. 67–71.
10. Blaabjerg F. Passive Filters — Potentialities and Limitations // IEEE Transaction on Industry Applications. – Volume 40, Issue 1. – P. 232–241.
11. ГОСТ 13109–97 Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. – М.: Госстандарт, 1998. – 30 с.
12. Al-Zamil A. M., Torrey D. A. A Passive Series, Active shunt Filter for High Power Application // IEEE Transaction on Power Electronics. – 2001. – Volume 16, Issue 1. – P. 101–109.

Поступила в редакцию 18.05.07 г.

*Запропоновано електричну схему, методику розрахунку й приклад розрахунку параметрів пасивного фільтра мережі для асинхронного електропривода зі спрощеним дволанковим БПЧ-ШІМ. Для даного електропривода досліджені, залежно від швидкості й навантаження, зміни вхідного коефіцієнта потужності, коефіцієнтів гармонік, зсуву й спотворення струму мережі, а також гармонійний склад струму мережі при релейному частотно-струмовому керуванні.*

*The electric scheme, design procedure and example of parameters calculation of the net passive filter for the asynchronous electric drive with simplified bi-directional frequency converter with PWM are offered. For the given electric drive the change of capacity entrance factor, factors of harmonics, shift and distortion of a source current and also harmonious structure of network current at relay frequency-current control that depend on speed and loading. are investigated.*

УДК 621.3

В. В. Костюков, Л. Н. Канов

## Численно-аналитическое моделирование переходных процессов в электротехнических системах

*Предлагается метод, предназначенный для численно-аналитического моделирования переходных процессов в линейных электротехнических системах. Метод иллюстрируется примером моделирования переходного процесса двухфазного короткого замыкания в системе.*

Моделирование переходных процессов занимает важное место при расчете режимов электротехнических систем. К настоящему времени сложилась стройная теория как аналитических, так и численных методов расчета переходных процессов в линейных системах [1,2]. Наиболее наглядным является классический метод, позволяющий получать аналитические выражения для каждой из переменных, описывающих режим системы. Однако, как отмечается, например, в [2], в сложных системах применение классического анализа затруднено излишней громоздкостью вычислений при определении постоянных интегрирования в выра-

жениях для переменных. В частности, для анализа системы  $n$ -го порядка требуется решать  $n$  систем линейных алгебраических уравнений для нахождения  $n^2$  постоянных интегрирования и при этом вычислять начальные значения производных по переменным до  $(n-1)$ -го порядка. Это обстоятельство сужает область применения классического анализа для исследования переходных режимов электротехнических систем [3, 4]. Преодоление указанных затруднений возможно численно-аналитическим решением линейных дифференциальных уравнений. Например, на кафедре «Элект-

роснабжение» УЛГТУ успешно разрабатывается метод схемных определителей [5], который пока не доведен до практического расчетного алгоритма. Широко ведутся работы по применению компьютерных аналитических пакетов, таких как: Maple 5, Mathematica 4 и др. [6]. Эти программные средства требуют представления дифференциальных уравнений в определенной форме и не позволяют получить аналитическое решение непосредственно по конфигурации электрической системы. Получили распространение моделирующие программы, такие как: PSPICE, Simulink, COLO [7], – предназначенные для имитационного моделирования динамических процессов. Однако, они не позволяют получить решение в аналитической форме.

Поэтому, несмотря на имеющиеся успехи в области моделирования переходных процессов вопрос создания метода, сохраняющего черты классического метода расчета, является актуальным. Статья посвящена разработке метода решения линейных дифференциальных уравнений, который сочетает преимущества численного и классического методов расчета и позволяет моделировать нестационарные и переходные режимы в сложных линейных электротехнических системах.

Методика и материалы исследований. Идея предлагаемого метода состоит в установлении связи между постоянными интегрирования для всех переменных системы в переходном режиме [8]. Пусть переходный процесс в системе  $n$ -го порядка описывается совокупностью  $m$  линейных алгебраических и дифференциальных уравнений, связывающих  $m$  переменных  $x_j(t); j = 1, 2, \dots, m; n \leq m$ . Объединим переменные системы в вектор  $\mathbf{X}(t)$ . Свободная составляющая переходного процесса характеризуется однородными уравнениями, алгебраизация которых (посредством формальной замены производной символом  $p$ ) определяет собственные числа посредством приравнения определителя к нулю:  $p_i; i = 1, 2, \dots, n$ . Каждое простое собственное число определяет экспоненциальное слагаемое в выражении свободной составляющей процесса для каждой переменной.

Пусть для определенности это будет собственное число с номером 1, тогда упомянутое слагаемое в записи каждой переменной  $x_{j\text{св}}(t)$  будет иметь вид  $x_{j1} = k_{j1} \exp(p_1 t); j = 1, 2, \dots, m$ . Объединим эти слагаемые в вектор частного решения  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1 \exp(p_1 t)$ , соответствующий  $p_1$ . Подставляя компоненты вектора  $\mathbf{X}_1$  в однородные уравнения, после сокращения множителя  $\exp(p_1 t)$  получаем систему  $m$  линейных, однородных, алгебраических уравнений для определения компонентов  $k_{j1}$ ; все они зависят от  $p_1$  в виде:

$k_{j1} = k_j(p_1)$ . Полагая переменную  $x_1(t)$  за базовую и принимая  $k_{11} = 1$ , из любых  $(m - 1)$  уравнений определим остальные компоненты вектора  $\mathbf{K}_1$  в виде:

$k_j(p_1), j = 2, \dots, m$ . Таким образом, вектор  $\mathbf{X}_1$  частного решения, соответствующего собственному числу  $p_1$ , определен с точностью до постоянного множителя.

Выполнив аналогичную процедуру для других собственных чисел  $p_i, i = 2, 3, \dots, n$ , получим другие векторы частных решений  $\mathbf{X}_i, i = 2, \dots, n$ . Структура коэффициентов  $k_j(p_i)$  сохраняется для всех собственных чисел. Эти коэффициенты зависят только от значений последних и от параметров системы; кроме того  $k_1(p_i) \equiv 1$ .

Общее решение однородных уравнений определяется суммой

$$\mathbf{X}_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{X}_i(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{K}_i \exp(p_i t),$$

где  $c_i$  – неопределенные множители. Окончательное решение неоднородных уравнений с учетом вектора установившихся значений переменных  $\mathbf{X}_{\text{уст}}(t)$  имеет вид

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{K}_i \exp(p_i t) + \mathbf{X}_{\text{уст}}(t). \quad (1)$$

Произведения множителей  $c_i$  и компонентов векторов  $\mathbf{K}_i$  образуют постоянные интегрирования для всех переменных, принятые в классическом методе:  $A_{ji} = c_i k_j(p_i), i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ . Для базовой переменной объединим эти постоянные  $A_{i1} = c_i$  в вектор  $\mathbf{A}_1 = [A_{11} \ A_{12} \ \dots \ A_{1n}]^T$ . В соответствии со структурой уравнения (1) матрица постоянных интегрирования имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ k_2(p_1)A_{11} & k_2(p_2)A_{12} & \dots & k_2(p_n)A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_m(p_1)A_{11} & k_m(p_2)A_{12} & \dots & k_m(p_n)A_{1n} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Общее решение уравнения (1) теперь можно записать следующим образом

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A} e^{P t} + \mathbf{X}_{\text{уст}}(t), \quad (3)$$

где вектор  $e^{P t}$  имеет компоненты  $\exp(p_i t)$ .

Выбирая в (3) выражения для  $n$  переменных  $x_j(t)$ , получаем при  $t = 0_+$  уравнение для определения вектора  $\mathbf{A}_1$  постоянных интегрирования базовой перемен-

ной  $\mathbf{KA}_1 = \mathbf{X}(0_+) - \mathbf{X}_{\text{уст}}(0_+)$ , где матрица  $\mathbf{K}$  состоит из коэффициентов частных решений:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_2(p_1) & k_2(p_2) & \dots & k_2(p_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n(p_1) & k_n(p_2) & \dots & k_n(p_n) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Отсюда находим

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{X}(0_+) - \mathbf{X}_{\text{уст}}(0_+)). \quad (5)$$

После определения вектора  $\mathbf{A}_1$  из (2) находятся постоянные интегрирования всех остальных переменных, а из (3) – аналитические выражения для всех переменных системы.

Для формализации определения коэффициентов (4) предлагается следующая численная процедура. Поместим в ветвь системы, соответствующую базовой переменной, единичный источник тока, если базовая переменная является током в этой ветви. Если же базовая переменная является напряжением на этой ветви или на ее элементе, заменим эту ветвь или элемент единичным источником ЭДС, направленным встречно напряжению. Индуктивности и емкости в оставшихся ветвях заменим соответственно сопротивлениями  $p_i L_j$  и проводимостями  $p_i C_j$ ;  $j = 2, 3, \dots, m$ . Источники энергии заменим их внутренними сопротивлениями. Выполнив расчет полученной схемы (например, с помощью существующих моделирующих программных средств Electronics Workbench, Simvlink) относительно переменных  $x_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$ , получим первый столбец в матрице (4), соответствующий собственному числу  $p_1$ . Заметим, что структура схемы сохраняется и при анализе со следующими собственными числами. А именно, для получения следующих столбцов в матрице (4) следует повторять расчет, придавая упомянутым сопротивлениям и проводимостям значения соответственно  $p_i L_j$  и  $p_i C_j$ ;  $j = 2, 3, \dots, m$ ;  $i = 2, 3, \dots, n$ .

При наличии комплексно-сопряженных собственных чисел вида  $p_{1,2} = -\delta_1 \pm j\omega_1$  получаем комплексно-значные сопротивления и проводимости:  $Z_{L1} = -\delta_1 L \pm j\omega_1 L$ ;  $Y_{C1} = -\delta_1 C \pm j\omega_1 C$ . В этом случае элементы матрицы (4) будут сопряженными. Постоянные интегрирования, соответствующие комплексным собственным числам, полученные из выражения (5), также будут комплексно сопряжены.

Достоинством предлагаемого метода является возможность получения численно-аналитического выражения для каждой переменной системы, участвующей в переходном процессе. Эти выражения имеют тот же вид, что и полученные существующими методами. Однако, при предложенном методе за счет примене-

ния коэффициентов (4) вычисление постоянных интегрирования более удобно, чем в существующих методах. Вычисление этих коэффициентов в предлагаемом методе сводится к ряду расчетов схемы постоянного или синусоидального тока, не требует подготовительной работы по составлению уравнений и может быть выполнено существующими программными комплексами. Предлагаемый метод может быть использован для аналитического расчета переходных процессов в линейных и линеаризованных электротехнических системах постоянного и переменного тока, порядок которых ограничивается лишь заданной точностью численного определения собственных чисел системы.

Для иллюстрации предложенного метода рассчитаем с его помощью переходный процесс двухфазного короткого замыкания (через сопротивление  $r$ ) в электрической системе, изображенной на рис. 1 [4].

Будем полагать, что сопротивления  $Z_1, Z_2$  имеют резистивно-индуктивный характер:  $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$ ,

$Z_2 = r_2 + j\omega L_2$ . Характеристическое уравнение в схеме после короткого замыкания имеет вид

$$[2Z_1 Z_2 + r(Z_1 + Z_2)](Z_1 + Z_2) = 0, \quad (6)$$

где  $Z_1 = r_1 + pL_1, Z_2 = r_2 + pL_2$ . Выбирая за базовую переменную ток  $i_B$  и, принимая во внимание индуктивный характер этой ветви, составим схему замещения для определения коэффициентов (4), изображенную на рис. 2. Расчет этой схемы дает соотношения:

$$\left. \begin{aligned} k_A(p) = I_A &= -\frac{1}{\Delta(p)} [r(Z_1 + Z_2) + 2Z_1 Z_2]; \\ k_5(p) = I_5 &= -\frac{1}{\Delta(p)} [r(Z_1 + Z_2) - Z_1 Z_2]; \\ k_C(p) = I_C &= -(k_A(p) + 1); \\ k_4(p) = I_4 &= -(k_A(p) + k_5(p)), \\ \Delta(p) &= Z_2(4Z_1 + 3Z_2) + 2r(Z_1 + Z_2). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

При этом начальные значения токов определяются из предшествующего короткому замыканию симметрич-

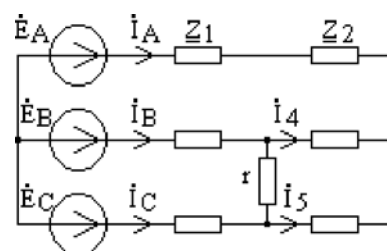


Рис.1. Двухфазное короткое замыкание

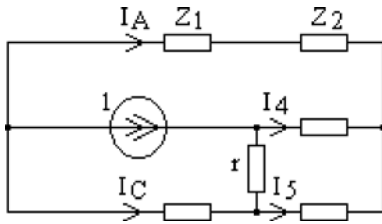


Рис.2. Определение коэффициентов системы

ного режима, а установившийся режим определяется с помощью симметричных составляющих.

Задавшись численными значениями:  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 2 \text{ Ом}$ ;  $r = 0,2 \text{ Ом}$ ;  $x_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $E = 220 \text{ В}$  промышленной частоты, – рассчитаем из (6) собственные числа:  $p_1 = -34,796$ ;  $p_2 = -21,723$ ;  $p_3 = -23,55$ . Полная матрица коэффициентов (4), упорядоченная по собственным числам и переменным  $i_B, i_A, i_5, i_C, i_4$  имеет вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_A(p_1) & k_A(p_2) & k_A(p_3) \\ k_5(p_1) & k_5(p_2) & k_5(p_3) \\ k_C(p_1) & k_C(p_2) & k_C(p_3) \\ k_4(p_1) & k_4(p_2) & k_4(p_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0,082 & -4,082 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -0,082 & 4,082 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где начальные значения токов равны:  $\dot{I}_{0A} = 0,41 - j5,469 \text{ A}$ ;  $\dot{I}_{0B} = \dot{I}_{04} = -4,942 + j2,379 \text{ A}$ ;  $\dot{I}_{0C} = \dot{I}_{05} = 4,531 + j3,09 \text{ A}$ , а установившиеся значения:  $\dot{I}_A = \dot{I}_{0A}$ ;  $\dot{I}_B = -19,029 + j0,664 \text{ A}$ ;  $\dot{I}_C = 18,619 + j4,805 \text{ A}$ ;  $\dot{I}_4 = -0,216 + j2,797 \text{ A}$ ;  $\dot{I}_5 = -0,194 + j2,673 \text{ A}$ .

Причем, элементы полной матрицы (2) постоянных интегрирования являются комплексными (ввиду комплексных значений токов как для начального, так и установившегося режима):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14,946 + j1,782 & -0,859 - j0,066 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1,221 + j0,146 & 3,505 + j0,271 & 0 \\ -14,946 - j1,782 & 0,859 + j0,066 & 0 \\ -1,221 - j0,146 & -3,505 - j0,271 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Анализ последних выражений показывает, что в неповрежденной фазе А после короткого замыкания переходный процесс отсутствует (ввиду равенства коэффициентов  $k_A(p_1)$  и  $k_A(p_2)$  нулю). Наиболее интенсивно переходный процесс проявляется в фазах В и С. Элементы первой и четвертой, третьей и пятой строк матрицы  $\mathbf{K}$  свидетельствуют о том, что свободные составляющие токов в фазах В и С, а также в ветвях 4 и 5 – «противофазны». Собственное число  $p_3$ , соответствующее последнему множителю характеристического уравнения (6), не влияет на формирование переходного процесса.

На рис. 3 показаны результаты моделирования фазных токов  $i_A, i_B, i_C$ , с помощью найденных постоянных интегрирования. Графики построены в соответствии с зависимостью:

$$i_s(t) = \text{Im} \sqrt{2} \left[ \sum_{l=1}^2 A_{sl} \exp(p_l t) + \dot{I}_{s \text{ ycm}} \exp(j\omega t) \right]$$

при  $\omega = 314 \frac{1}{c}$ , (10)

где  $s$  – обозначает индекс рассчитываемого тока в схеме на рис. 2.

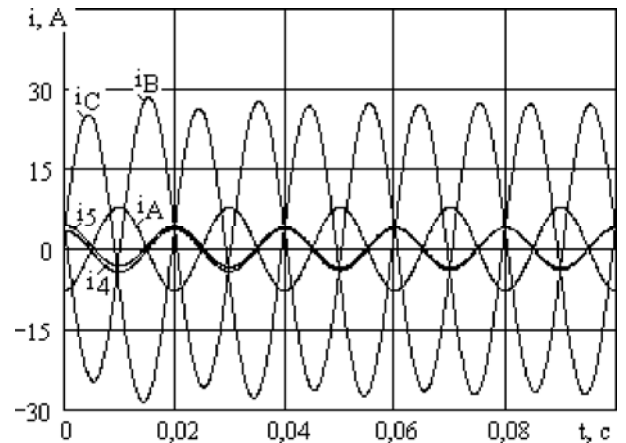


Рис.3. Переходный процесс двухфазного короткого замыкания

Данная зависимость представляет собой численно-аналитическое выражение для переменных системы, участвующих в переходном процессе. К этому же выражению приведет применение существующих методов расчета (однако, при этом вычисления как для классического, так и для операторного методов будут более громоздкими). Сопоставление переходных процессов с результатами численного моделирования показывает их полное соответствие.

**Выводы.**

1. Предложенный численно-аналитический метод основан на определении полной матрицы постоянных

интегрирования и предназначен для расчета переходных процессов в линейных электротехнических системах.

2. Предложенный метод является дальнейшим развитием классических методов расчета переходных процессов в линейных системах. Достоинством этого метода является возможность оценки вклада каждого собственного числа системы дифференциальных уравнений в формирование свободной составляющей переходного процесса, а также отсутствие необходимости в определении производных от переменных системы для нахождения постоянных интегрирования.

#### Перечень ссылок

1. Теоретические основы электротехники. Т.2 / К.С.Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровкин, В.Л.Чежулин. – СПб.: Изд-во «Питер», 2003. – 576 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Изд-во «Гардарики», 2000. – 638 с.
3. Руководящие указания по расчету токов короткого замыкания и выбору электрооборудования / Под ред. Б.Н.Неклепаева. – М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2004. – 152 с.

4. Куликов Ю.А. Переходные процессы в электрических системах. – Новосибирск: НГТУ, М.: Мир: ООО «Изд-во АСТ», 2003. – 283 с.
5. Символьный анализ и диагностика линейных электрических цепей методом схемных определителей / С.А.Курганов, В.В.Филаретов. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2003. – 228 с.
6. Семенов М.Г. Введение в математическое моделирование. М.: Изд-во «Солон-Р», 2001. – 112 с.
7. Тиховод С.М. Моделирование динамических электромагнитных процессов в трансформаторе с современной электротехнической сталью // Электротехника та електроенергетика. – 2006. – № 1. – С.37–41.
8. Костюков В.В. Связь между постоянными интегрирования при анализе переходных процессов в линейных электрических цепях // Вестник СевНТУ. Вып. 55: Механика, энергетика, экология: Сб. науч. тр.; Севастоп. нац. техн. ун-т. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. – С.80–86.

*Поступила в редакцию 30.05.06 г.,*

*После доработки 15.04.07 г.*

*Пропонується метод, призначений для численно-аналітичного моделювання перехідних процесів у лінійних електротехнічних системах. Метод ілюструється прикладом моделювання перехідного процесу короткого замикання в системі.*

*The method, intended for numerically-analytical modelling of transients in single-line electro-technical system are offered.. The method is illustrated by modelling of two-phase short circuit transients in the system.*

УДК 621.314.322.001.6: 519.872: 519.622.2

С. М. Тиховод

## Совершенствование численных методов расчета электромагнитных процессов в сложных нелинейных электрических и магнитных цепях

*Разработаны усовершенствованные методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений, предназначенные для моделирования динамических электромагнитных процессов в электрических и магнитных цепях. Данные методы внедрены в универсальный программный комплекс СОЛО, с помощью которого выполнен пример расчета переходных процессов в трехфазном трансформаторе.*

При моделировании электромагнитных процессов в сложных электротехнических устройствах существует необходимость составления и численного интегрирования систем дифференциальных уравнений. Порядок (т. е. содержащееся в них количество уравнений) этих систем может достигать нескольких сотен. Для моделирования таких процессов широко используются известные программные комплексы: NAP, PSpice, OrCAD, Simulink, Solo и другие [1-5]. Указанные программы по исходным данным, описывающим электрическую цепь, автоматически составляют систему дифференциальных уравнений и с помощью встроенного решателя производят численное интегрирование составленной

системы уравнений. Решатели, включенные в указанные программные комплексы, как правило, предоставляют возможность выбора одного из нескольких известных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Наиболее распространенными методами численного интегрирования дифференциальных уравнений являются методы Рунге-Кутты, Хемминга, Адамса, Башфорта, Маултона, Гира [6]. Однако, применение этих методов для численного интегрирования систем дифференциальных уравнений высокого порядка зачастую приводит к значительным затратам компьютерного времени или к расходимости вычислительного процесса.