УДК [621.314+621.3.017+621.3.013.5]

EDGE-BASED ВЕКТОРНЫЕ БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

ОСТРЕНКО М.В. Аспирант кафедры теоретической и общей электротехники Запорожского национального университета, Запорожье, Украина, e-mail: ostrenkomax@rambler.ru

Цель работы. *Анализ свойств Edge-Based векторных базисных функций для объемных элементов и разработка поверхностных Edge-Based векторных базисных функций МКЭ для аппроксимации векторных величин электромагнитного поля в поверхностных интегралах.*

Методы исследования. *Основываясь на свойствах симплексных координат, предлагается математическая модель Edge-Based векторных базисных функций, как для объемных, так и для поверхностных элементов.*

Полученные результаты. *Выполнен анализ Edge-Based векторных базисных функций для метода конечных элементов (МКЭ). На основе анализа предложены Edge-Based функции для поверхностных элементов (треугольников). Получены свойства Edge-Based базисных функций, позволяющие более точно моделировать магнитное поле, вихревые токи и потери в сравнении с Nodal-Based векторными базисными функциями.*

Предложенная математическая модель показывает ортогональность предложенной системы Edge-Based векторных базисных функций, что позволяет их использование в МКЭ. Более того, показано, что касательная составляющая векторного поля, представленного в виде линейной комбинации системы как объемных, так и поверхностных Edge-Based базисных функций на ребре элемента, равняется коэффициенту линейной комбинации, соответствующему данному ребру. Данное свойство позволяет объединить объемные и поверхностные интегралы МКЭ в одну систему линейных уравнений.

Научна новизна. *Новизной предложенной математической модели является форма, дающая возможность перехода от объемных интегралов к поверхностным и объединения объемных и поверхностных интегралов МКЭ в одну систему линейных уравнений. Это позволяет существенно снизить размерность задачи и, как следствие, снизить ресурсоемкость метода и увеличить его быстродействие без значительных потерь точности.*

Практическая ценность. *Приведенные Edge-Based векторные базисные функции для объемных и поверхностных конечных элементов были использованы в разработанном программном комплексе ELMAD-3D, предназначенном для расчета потерь и перегревов от полей рассеяния силовых трансформаторов и реакторов. Использование поверхностных Edge-Based векторных базисных функций позволило существенно увеличить быстродействие методов расчета и снизить их ресурсоемкость.*

Ключевые слова: метод конечных элементов; объемные и поверхностные векторные базисные функции.

I. ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) широко используется для численного расчета распределения электромагнитных полей. В настоящее время этот метод считается наиболее эффективным среди других численных методов. Он активно используется для решения различных прикладных задач электродинамики. Нами этот метод использовался для расчетов электромагнитных полей, вихревых токов, потерь и температур в элементах конструкции силового трансформатора 167МВА 345кВ 161кВ. Решение подобных задач требует больших ресурсов компьютера, а также занимает значительное время моделирования. Поэтому модернизация МКЭ, направленная на снижения ресурсоемкости и времени моделирования актуальна.

II. АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Существует большое количество формулировок МКЭ, приложенного к задачам электродинамики. Например, в работе [1] описана формулировка МКЭ, выраженная непосредственно через векторы напряженности магнитного поля либо электрического поля. В работах [1], [4]-[5] описана формулировка МКЭ, выраженная через векторный магнитный и скалярный электрический потенциалы. В работах [2], [4]-[5] приводится формулировка МКЭ, выраженная через скалярный магнитный и векторный токовый потенциалы (в русскоязычной и украино-язычной литературе векторный токовый потенциал используется редко, а в учебниках вообще отсутствует). Работы [3], [4]-[5] посвящены формулировке МКЭ, выраженной через векторные магнитный и токовый потенциалы. Стоит отметить, что уравнения приведенных формулировок МКЭ могут включать как объемные, так и поверхностные интегралы. Например, хорошо известный и широко используемый метод конечных элементов с граничным условием импедансного типа включает как объемные интегралы, описывающие распределение электромагнитного поля в пространстве, так и

© Остренко М.В., 2018
DOI 10.15588/1607-6761-2018-4-4

поверхностные интегралы, описывающие граничное условие импедансного типа [6]-[7], [10]-[12]. При этом во всех приведенных методах векторное поле представляется в виде ряда Фурье по ортогональной системе векторных функций координат (в литературе часто используется название базисные функции или интерполяционные функции). Исходя из анализа работ [3]-[5], [12] базисные функции, ассоциируемые с ребрами объемных элементов (Edge-Based функции), являются наиболее релевантными для представления векторных величин электромагнитного поля. Это определяется непрерывностью касательной составляющей векторного поля, определенного на общей поверхности двух элементов и представленного в виде линейной комбинации системы Edge-Based базисных функций. Таким образом, в отличие от более известных Nodal-Based векторных базисных функций, на поверхности раздела двух сред с разными магнитными или электрическими свойствами выполняется условие непрерывности касательной составляющей напряженностей магнитного или электрического поля, а также условия непрерывности нормальных составляющих магнитной индукции или плотности вихревого тока.

В данной статье приводится анализ, и рассматриваются свойства Edge-Based векторных базисных функций для трехмерных объемных элементов. На основании данного анализа предлагаются новые Edge-Based векторные базисные функции для трехмерных поверхностных элементов. Таким образом, векторное поле, описанное поверхностными интегралами, также может быть представлено в виде ряда Фурье по ортогональной системе Edge-Based функций. При этом, в качестве элементов выбраны трехмерный и двухмерный симплексы, т.е. тетраэдр и поверхностный треугольник (симплекс в N-мерном пространстве определяется как наиболее простая нетривиальная геометрическая фигура с $N+1$ вершиной). Выбор симплексов в качестве элементов обусловлен теоремой о триангуляции (разбиении на невырожденные симплексы) многогранников: каждый многогранник допускает триангуляцию. Т.е. математическое обоснование существования триангуляции сколь угодно сложного многогранника позволяет гарантировать геометрическую универсальность рассчитываемых моделей.

III. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель статьи – анализ свойств Edge-Based векторных базисных функций для объемных элементов и разработка поверхностных Edge-Based векторных базисных функций МКЭ для аппроксимации векторных величин электромагнитного поля в поверхностных интегралах.

IV. ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Переход от объемных интегралов к поверхностным позволяет существенно снизить размерность задачи и, как следствие, снизить ресурсоемкость метода МКЭ и увеличить его быстродействие без значительных потерь точности. Наиболее просто теория базисных функций излагается на языке симплексных координат [1]. Любой симплекс однозначно может быть определен координатами его вершин. Объем N-мерного симплекса определяется детерминантом:

$$V = \frac{1}{N!}\begin{vmatrix} 1 & p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & \cdot & p_1^{(N)} \\ 1 & p_2^{(1)} & p_2^{(2)} & \cdot & p_2^{(N)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & p_{N+1}^{(1)} & p_{N+1}^{(2)} & \cdot & p_{N+1}^{(N)} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где: $pi(j)$ - значение j-ой координаты в i-й вершине N-мерного симплекса.

Пусть произвольная точка p, помещенная во внутрь симплекса, делит его на $N+1$ подсимплексов. Тогда $N+1$ симплексных координат $\xi_i(p)$ данной точки p определяются как отношение объема подсимплекса к объему симплекса:

$$\xi_1(p) = \frac{1}{N!V}\begin{vmatrix} 1 & p^{(1)} & p^{(2)} & \cdot & p^{(N)} \\ 1 & p_2^{(1)} & p_2^{(2)} & \cdot & p_2^{(N)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & p_{N+1}^{(1)} & p_{N+1}^{(2)} & \cdot & p_{N+1}^{(N)} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

где: $\xi_1(p)$ - симплексная координата, соответствующая 1-й вершине N-мерного симплекса.

Стоит отметить, что исходя из определения симплексной координаты, ее значение лежит в диапазоне от нуля до единицы. Симплексные координаты точки, лежащей за пределами симплекса, равны нулю, а сумма симплексных координат всегда равна единице:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \xi_i^e(p) = 1;\ 0 \le \xi_i^e(p) \le 1, \forall p \in e;\ \xi_i^e(p) = 0, \forall p \notin e \tag{3}$$

где: ξ_i^e - симплексная координата e-го симплекса.

Edge-Based векторные базисные функции первого порядка (1-form Whitney function) ассоциированы с ребрами тетраэдров и имеют вид:

$$\vec{N}(p) = \left\{ \vec{N}_1^{\varepsilon}(p), \vec{N}_2^{\varepsilon}(p), \ldots, \vec{N}_q^{\varepsilon}(p), \ldots \right\}, \tag{4}$$

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(p) = L_i \cdot \left(\xi_m(p) \cdot \vec{\nabla}\xi_n(p) - \xi_n(p) \cdot \vec{\nabla}\xi_m(p) \right), \forall m,n \in \varepsilon_i, \tag{5}$$

где: L_i- длина i-го ребра тетраэдра; $\xi_m(p)$ и $\xi_n(p)$ - симплексные координаты, соответствующие вершинам i-го ребра тетраэдра.

Рассмотрим свойства градиента симплексной координаты $\vec{\nabla}\xi_i(p)$. Так как симплексная координата точки является линейной функцией координат, то совершенно очевидно, что градиент симплексной координаты точки является постоянной векторной величиной. Из определения симплексной координаты (2) можно увидеть, что:

$$\vec{\nabla}\xi_i(p)=\frac{(N-1)!\,S_i}{N!\,V}\vec{n}_i=\frac{N(N-1)!\,S_i}{N!\,S_i\cdot L_k\cdot\cos\angle(\varepsilon_k,\vec{n}_i)}\vec{n}_i=$$

$$=\vec{n}_i\Big/L_k\cdot\cos\angle(\varepsilon_k,\vec{n}_i),\qquad(6)$$

где: S_i- площадь i-й грани тетраэдра f_i, не включающей i-ю вершину, т.е. $p_i\notin f_i$; $\vec{n}_i$ - единичный вектор, нормальный i-й грани тетраэдра f_i; L_k - длина ребра ε_k, включающего i-ю вершину тетраэдра, т.е. $p_i\in\varepsilon_k$; $\cos\angle(\varepsilon_k,\vec{n}_i)$ - косинус угла между ребром ε_k тетраэдра и нормалью $\vec{n}_i$.

Подставляя выражение (6) в (5) получаем:

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)=\frac{\xi_m(p)\cdot\vec{n}_n}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)}-\frac{\xi_n(p)\cdot\vec{n}_m}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)},\forall m,n\in\varepsilon_i\,.\qquad(7)$$

Определим единичный вектор $\vec{t}_i$, касательный ребру ε_i:

$$\vec{t}_i=(p_n-p_m)/\|p_n-p_m\|,\forall p_m,p_n\in\varepsilon_i\,.\qquad(8)$$

Так как скалярное произведение двух единичных векторов равняется косинусу угла между ними, то скалярное произведение Edge-Based векторной базисной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)$ и соответствующего ее ребру □$_i$ касательного вектора $\vec{t}_i$ можно представить в виде:

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)\cdot\vec{t}_i=\xi_m(p)\frac{\cos\angle(\vec{t}_i,\vec{n}_n)}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)}-$$

$$-\xi_n(p)\frac{\cos\angle(\vec{t}_i,\vec{n}_m)}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)}=\xi_m(p)+\xi_n(p),\qquad(9)$$

так как: $\angle(\vec{t}_i,\vec{n}_n)=\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)$ и $\angle(\vec{t}_i,\vec{n}_m)=180^\circ+\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)$.

Стоит отметить, что исходя из определения симплексной координаты (2) следует: если точка p лежит на ребре ε_i, вершины которого соответствуют симплексным координатам $\xi_m(p)$ и $\xi_n(p)$, то сумма симплексных координат точки $\xi_m(p)+\xi_n(p)=1$. Следовательно, проекция Edge-Based векторной базисной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)$ в точке p, лежащей на ребре ε_i, на соответствующий ее ребру касательный вектор $\vec{t}_i$ тождественно равна единице:

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)\cdot\vec{t}_i=1,\forall(p\in\varepsilon_i)\wedge\left(\vec{t}_i=\varepsilon_i/\|\varepsilon_i\|\right).\qquad(10)$$

Скалярное произведение единичного вектора $\vec{t}_k$ касательного ребру ε_k и Edge-Based векторной базисной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)$ соответствующей ребру ε_i, но в точке p, лежащей на ребре ε_k , равно нулю ($k\neq i$), так как в этом случае либо вектор $\vec{t}_k$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_n$ и $\xi_n(p)=0$, либо вектор $\vec{t}_k$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_m$ и $\xi_m(p)=0$:

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)\cdot\vec{t}_k=0,\forall(p\in\varepsilon_k)\wedge\left(\vec{t}_k=\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|}\right)\wedge(k\neq i)\,.\qquad(11)$$

Также стоит отметить, что исходя из свойства симплексных координат (3), модуль Edge-Based векторной базисной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)$ больше либо равен нулю, если точка p лежит в пределах тетраэдра e и равен нулю в обратном случае:

$$\left\|\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)\right\|\geq 0,\forall p\in e\,;\ \left\|\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)\right\|=0,\forall p\notin e\,.\qquad(12)$$

Для иллюстрации еще одного полезного свойства Edge-Based векторной базисной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)$, найдем ее дивергенцию, используя выражение (7) и подставляя в результат выражение (6):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)=\frac{\vec{\nabla}\xi_m(p)\cdot\vec{n}_n}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)}-\frac{\vec{\nabla}\xi_n(p)\cdot\vec{n}_m}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)}=$$

$$=\frac{1}{L_i}\left(\frac{\vec{n}_m\cdot\vec{n}_n}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)\cdot\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)}-\frac{\vec{n}_n\cdot\vec{n}_m}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)\cdot\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)}\right)=0\,,\qquad(13)$$

т.е. дивергенция Edge-Based векторной базисной функции $\vec{\nabla}\cdot\vec{N}_i^{\varepsilon}(p)$ тождественно равна нулю.

Одним из базовых требований к базисным функциям МКЭ является ортогональность системы функций [27]:

$$\int\limits_{\Omega_{e1}+\Omega_{e2}}\vec{N}_i\cdot\vec{N}_k\,dV=0\,,\ \forall i\in e1,k\in e2\,,\qquad(14)$$

$$\int_{\Omega_e} \vec{N}_i \cdot \vec{N}_k \, dV \neq 0, \quad \forall i,k \in e, \tag{15}$$

где: Ω_e, Ω_{e1}, Ω_{e2} - объемы элементов e, $e1$, $e2$.

При этом, свойство (12) доказывает ортогональность (14) и (15) системы Edge-Based векторных базисных функций $\vec{N}(p)$, что делает возможным использовать систему Edge-Based функций $\vec{N}(p)$ в МКЭ. Исходя из свойств (10), (11) и (12) касательная составляющая векторного поля, представленного в виде линейной комбинации системы Edge-Based векторных базисных функций в точке, лежащей на ребре элемента равняется соответствующему ребру коэффициенту данной линейной комбинации. Например, при представлении магнитного векторного потенциала в виде линейной комбинации системы Edge-Based базисных функций $\vec{A}' = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{N}_i^{\varepsilon} \cdot A_i$ выполняется тождество: $\vec{A}'(p) \cdot \vec{t}_i = A_i, \forall (p \in \varepsilon_i) \wedge \left(\vec{t}_i = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}\right)$. Как следствие этого, выполняется условие непрерывности касательной составляющей векторного поля представленного в виде линейной комбинации системы Edge-Based векторных функций $\vec{N}(p)$ при переходе точки p из одного тетраэдра в другой. Более того, свойство (13) показывает, что векторное поле, представленное в виде линейной комбинации системы Edge-Based векторных функций $\vec{N}(p)$, является вихревым (трубчатым, соленоидальным). Следовательно, решение, представленное в виде линейной комбинации системы Edge-Based векторных функций $\vec{N}(p)$, является вихревым и кусочно-линейным векторным полем, касательные составляющие которого непрерывны на границах тетраэдров.

Для рассмотрения поверхностных Edge-Based векторных функций, определим локальную систему координат $X'Y'Z'$ произвольного поверхностного треугольника. Пусть данный треугольник лежит в плоскости локальных координат $X'Y'$. Ось Z' расположена нормально плоскости треугольника. Тогда локальные координаты x', y', z' произвольной точки p, лежащей в пределах данного треугольника, можно найти по формулам:

$$\begin{array}{llll} x' = \left(\vec{p} - \vec{o}'\right) \cdot \vec{i}', & \vec{i}' \cdot \vec{i}' = 1, & \vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0, & \vec{i}' \times \vec{j}' = \vec{k}' \\ y' = \left(\vec{p} - \vec{o}'\right) \cdot \vec{j}', & \vec{j}' \cdot \vec{j}' = 1, & \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0, & \vec{j}' \times \vec{k}' = \vec{i}' \\ z' = \left(\vec{p} - \vec{o}'\right) \cdot \vec{k}', & \vec{k}' \cdot \vec{k}' = 1, & \vec{k}' \cdot \vec{i}' = 0, & \vec{k}' \times \vec{i}' = \vec{j}' \end{array}, \tag{16}$$

где: $\vec{o}'$ - начало локальной системы координат, лежащее на поверхности интегрирования в пределах поверхностного треугольника; $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ - орты локальной системы координат, соответствующие осям $X'Y'Z'$.

Пусть поверхностные Edge-Based векторные базисные функции, ассоциированные с ребрами поверхностных треугольников, имеют вид:

$$\vec{N}(x',y') = \left\{ \vec{N}_1^{\varepsilon}(x',y'), \vec{N}_2^{\varepsilon}(x',y'), \ldots, \vec{N}_q^{\varepsilon}(x',y'), \ldots \right\}, \tag{17}$$

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y') = $$
$$= L_i \cdot \left(\xi_m(x',y') \cdot \vec{\nabla} \xi_n(x',y') - \xi_n(x',y') \cdot \vec{\nabla} \xi_m(x',y') \right), \forall m,n \in \varepsilon_i \tag{18}$$

где: L_i - длина i-го ребра поверхностного треугольника; $\xi_m(x',y')$ и $\xi_n(x',y')$ - симплексные координаты, соответствующие вершинам i-го ребра поверхностного треугольника.

Рассмотрим свойства градиента симплексной координаты $\vec{\nabla} \xi_i(x',y')$. Так как симплексная координата точки x', y' является линейной функцией координат, то совершенно очевидно, что градиент симплексной координаты точки также является постоянной векторной величиной. Из определения симплексной координаты (2) можно увидеть, что:

$$\vec{\nabla} \xi_i(x',y') = \frac{1}{2!} \frac{L_i}{S} \vec{n}_i =$$
$$= \frac{2!\, L_i \cdot \vec{n}_i}{2!\, L_i \cdot L_k \cdot \cos\angle(\varepsilon_k, \vec{n}_i)} = \frac{\vec{n}_i}{L_k \cdot \cos\angle(\varepsilon_k, \vec{n}_i)}, \tag{19}$$

где: S - площадь поверхностного треугольника; Li - длина ребра треугольника εi, не включающего i-ю вершину, т.е. $p_i \notin \varepsilon_i$; $\vec{n}_i$ - единичный вектор, лежащий в плоскости $\vec{k}'$ и нормальный i-му ребру εi треугольника; Lk - длина ребра треугольника εk, включающего i-ю вершину треугольника, т.е. $p_i \in \varepsilon_k$; $\cos\angle(\varepsilon_k, \vec{n}_i)$ - косинус угла между ребром εk треугольника и нормалью $\vec{n}_i$.

Подставляя (19) в (18) получаем:

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y') = \frac{\xi_m(x',y') \cdot \vec{n}_n}{\cos\angle(\varepsilon_i, \vec{n}_n)} - \frac{\xi_n(x',y') \cdot \vec{n}_m}{\cos\angle(\varepsilon_i, \vec{n}_m)}, \forall m,n \in \varepsilon_i \cdot \tag{20}$$

Определим единичный вектор $\vec{t}_i$, касательный ребру ε_i:

$$\vec{t}_i = \frac{p_n - p_m}{\|p_n - p_m\|}, \forall p_m, p_n \in \varepsilon_i \,. \tag{21}$$

Скалярное произведение векторной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')$ и соответствующего ее ребру ε_i касательного вектора $\vec{t}_i$ можно представить в виде:

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')\cdot\vec{t}_i = \xi_m(x',y')\frac{\cos\angle(\vec{t}_i,\vec{n}_n)}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)} -$$

$$-\xi_n(x',y')\frac{\cos\angle(\vec{t}_i,\vec{n}_m)}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)} = \xi_m(x',y') + \xi_n(x',y'), \tag{22}$$

так как: $\angle(\vec{t}_i,\vec{n}_n) = \angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)$ и $\angle(\vec{t}_i,\vec{n}_m) = 180° + \angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)$.

Стоит отметить, что исходя из определения симплексной координаты (3) следует: если точка x',y' лежит на ребре ε_i, вершины которого соответствуют симплексным координатам $\xi_m(x',y')$ и $\xi_n(x',y')$, то сумма симплексных координат точки $\xi_m(x',y') + \xi_n(x',y') = 1$. Следовательно, проекция векторной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')$ в точке, лежащей на ребре ε_i, на соответствующий ее ребру касательный вектор $\vec{t}_i$ тождественно равна единице:

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')\cdot\vec{t}_i = 1, \forall(x',y' \in \varepsilon_i) \wedge \left(\vec{t}_i = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}\right). \tag{23}$$

Скалярное произведение единичного вектора $\vec{t}_k$, касательного ребру ε_k и векторной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')$, соответствующей ребру ε_i, но в точке x',y', лежащей на ребре ε_k равно нулю $(k \neq i)$. В этом случае, либо вектор $\vec{t}_k$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_n$ и $\xi_n(x',y') = 0$, либо вектор $\vec{t}_k$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_m$ и $\xi_m(x',y') = 0$:

$$\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')\cdot\vec{t}_k = 0, \forall(x',y' \in \varepsilon_k) \wedge \left(\vec{t}_k = \frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|}\right) \wedge (k \neq i)\,. \tag{24}$$

Также стоит отметить, что исходя из свойства симплексных координат (3) модуль векторной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')$ больше, либо равен нулю, если точка x',y' лежит в пределах поверхностного треугольника e и равен нулю в обратном случае:

$$\left\|\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')\right\| \geq 0, \forall x',y' \in e\,;\ \left\|\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')\right\| = 0, \forall x',y' \notin e \tag{25}$$

Для иллюстрации некоторых полезных свойств векторной функции $\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')$, найдем ее дивергенцию и ротор, используя выражение (20) и подставляя в результат выражение (19):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y') = \frac{\vec{\nabla}\xi_m(x',y')\cdot\vec{n}_n}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)} - \frac{\vec{\nabla}\xi_n(x',y')\cdot\vec{n}_m}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)} =$$
$$= \frac{1}{L_i}\left(\frac{\vec{n}_m\cdot\vec{n}_n}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)\cdot\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)} - \frac{\vec{n}_n\cdot\vec{n}_m}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)\cdot\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)}\right) = 0 \tag{26}$$

т.е. дивергенция векторной функции $\vec{\nabla}\cdot\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')$ тождественно равна нулю.

$$\vec{\nabla}\times\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y') = \frac{\vec{\nabla}\xi_m(x',y')\times\vec{n}_n}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)} - \frac{\vec{\nabla}\xi_n(x',y')\times\vec{n}_m}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)} =$$
$$= \frac{1}{L_i}\left(\frac{\vec{n}_m\times\vec{n}_n}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)\cdot\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)} - \frac{\vec{n}_n\times\vec{n}_m}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)\cdot\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)}\right) =$$
$$= \frac{2}{L_i}\left(\frac{\vec{n}_m\times\vec{n}_n}{\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_m)\cdot\cos\angle(\varepsilon_i,\vec{n}_n)}\right) \tag{27}$$

т.е. ротор векторной функции $\vec{\nabla}\times\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')$ является постоянной векторной величиною, коллинеарной $\vec{k}'$.

Ортогональность системы поверхностных Edge-Based векторных функций может быть показана выражениями:

$$\sum_{i=1}^{N\varepsilon_f}\sum_{k=1}^{N\varepsilon_f}\int_{S_{e1}+S_{e2}}\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')\cdot\vec{N}_k^{\varepsilon}(x',y')dS = 0, \quad \forall i \in e1, k \in e2 \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{N\varepsilon_f}\sum_{k=1}^{N\varepsilon_f}\int_{S_e}\vec{N}_i^{\varepsilon}(x',y')\cdot\vec{N}_k^{\varepsilon}(x',y')dS \neq 0, \quad \forall i,k \in e \tag{29}$$

где: $N\varepsilon_f$ - количество ребер поверхностных треугольников, лежащих на поверхности интегрирования; S_e, S_{e1}, S_{e2} - площадь поверхностных треугольников e, $e1$, $e2$ лежащих на поверхности интегрирования.

Исходя из свойств векторной функции $\vec{N}(x',y')$ (23), (24) и (25), касательная составляющая векторного поля, представленного в виде линейной комбинации системы поверхностных Edge-Based базисных функций $\vec{N}(x',y')$ в точке, лежащей на ребре поверхностного треугольника, равняется соответствующему ребру коэффициенту данной линейной комбинации. Например, при представлении магнитного векторного потенциала в виде линейной комбинации системы поверхностных Edge-Based базисных функций $\vec{A}' = \sum_{i=1}^{\infty} N_i^{\varepsilon}\vec{(x', y')} \cdot A_i$ выполняется тождество: $\vec{A}'(x', y') \cdot \vec{t_i} = A_i, \forall (x', y' \in \varepsilon_i) \wedge \left(\vec{t_i} = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|} \right)$. Как следствие этого, выполняется условие непрерывности касательной составляющей векторного поля, представленного в виде линейной комбинации системы Edge-Based векторных функций (как объемных, так и поверхностных) при переходе точки p из тетраэдра (или поверхностного треугольника) в поверхностный треугольник. Более того, свойство (26) показывает, что векторное поле, представленное в виде линейной комбинации системы поверхностных Edge-Based векторных функций $\vec{N(x', y')}$, является вихревым (трубчатым, соленоидальным).

Так как касательная составляющая векторного поля, представленного в виде линейной комбинации системы как объемных так и поверхностных Edge-Based базисных функций на ребре элемента, равняется соответствующему данному ребру коэффициенту линейной комбинации, поверхностные Edge-Based векторные функций $\vec{N(x', y')}$ могут использоваться с объемными Edge-Based векторными функциями $\vec{N(p)}$ в одной системе линейных уравнений метода конечных элементов.

V. ВЫВОДЫ

Предложенный математический анализ Edge-Based векторных базисных функций, основанный на свойствах симплексных координат, позволяет более эффективно сформулировать свойства Edge-Based векторных базисных функций для объемных элементов. На основании данных свойств предложены Edge-Based векторные базисные функций для поверхностных элементов. Рассмотрены их свойства и доказана возможность объединения функций для объемных и поверхностных элементов в одной системе линейных уравнений МКЭ, что в литературных источниках не встречается. Объемные и поверхностные Edge-Based базисные функции были использованы в разработанном программном комплексе ELMAD-3D для расчета потерь и перегревов от полей рассеяния силовых трансформаторов и реакторов [14]. Результаты расчетов вихревых токов, потерь и температур в элементах конструкции силового трансформатора 167МВА 345кВ 161кВ, приведенные в работах [11] и [12] показывают высокую точность аппроксимации магнитного векторного потенциала объемными и поверхностными Edge-Based базисными функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Сильвестер, П. Л. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров–электриков [текст] / П. Л. Сильвестер, Р. Л. Феррари. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 229 с.

[2] Ren, Z. T-Ω Formulation for Eddy Current Problems in Multiply Connected Regions [Text] / Z. Ren // IEEE Trans. Mag. – 2002. – Vol. 38. – № 2 – P. 557-560.

[3] Albertz, D. On the Use of the New Edge Based A-A, T Formulation for the Calculation of Time-Harmonic, Stationary and Transient Eddy Current Field Problems [Text] / D. Albertz, G. Henneberger // IEEE Trans. Mag. – 2000. – Vol. 36. – № 4 – P. 818-822.

[4] Karl Hollaus. Comparison of Tetrahedral Edge Finite-Elements Using Different Potential Formulations / Karl Hollaus, Oszkar Biro // IEEE Trans. Mag. – 2005 – Vol. 41. – №. 5 – P. 1676-1679.

[5] Miklos KUCZMANN. Nodal and Edge Finite Element Analysis of Eddy Current Field Problems / Miklos KUCZMANN // PRZEGLAD ELEKTROTECHNICZNY. – 12/2008. – ISSN 0033-2097-R. 84NR – P. 194-197.

[6] Susnjic, L. 3D finite-element determination of stray losses in power transformer / L. Susnjic, Z. Haznadar, Z. Valkovic // Electric Power System Research 78.– 2008. – P. 1814-1818.

[7] Damir Žarko, Zlatko Maljković, Stjepan Štefan Calculation of Losses in the Core Clamps of a Transformer Using 3-D Finite-Element Method / Damir Žarko, Zlatko Maljković, Stjepan Štefan // First Macedonian - Polish Symposium on Applied Electromagnetics (SAEM 2006): proceedings - Cvetkovski, Goga (ur.) – 2006 – P. 1-4.

[8] Gerard Meunier. The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling / Gerard Meunier. – ISTE and Wiley, – 2008. – 601 p.

[9] Wagner B. Error Evaluation of Surface Impedance Boundary Conditions With Magnetic Vector Potential Formulation on a Cylindrical Test Problem / Bernhard Wagner, Werner Renhart and Christian Magele // IEEE Trans. on Magn. – 2008. – Vol. 44, №. 6. – P. 734-737.

[10] Ida, N. High Order Surface Impedance Boundary Conditions with the A-□ Formulation / Nathan Ida, Yvonnic Lemenach and Thomas Henneron // FACTA UNIVERSITATIS, Ser.: Elec. Energ. – 2011. – Vol. 24, №. 2. – P. 147-155.

[11] Ostrenko, M. V. Power Transformers and Reactors Structure Losses and Temperatures Calculation Using Surface Impedance Boundary Conditions / Maxym Ostrenko, Bogdan Andriienko, Sergei Tikhovod and Denys Prychynenko // 1-st IEEE Conference Advances in Magnetics AIM. – 2016. – P. 14-16.

[12] Остренко, М. В. Расчет потерь в элементах конструкции силовых трансформаторов и реакторов методом конечных элементов с граничными условиями импедансного типа [Текст] / М. В. Остренко, С. М. Тиховод // Електротехніка та електроенергетика. – 2016. – №2. – С. 33-42. DOI 10.15588/1607-6761-2016-2-4

[13] Демидович, Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения [Текст] / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М.: Наука, – 1967. – 368 с.

[14] Андрієнко, Б.Ю. Комп'ютерна програма «Програма розрахунку тривимірного магнітного поля, вихрових струмів, втрат та температур у силових трансформаторах та реакторах ELMAG-3D» СВІДОЦТВО про реєстрацію авторського права на твір № 41639 / Б.Ю Андрієнко, О.Л. Тарчуткін, М.В.

Стаття надійшла до редакції 07.09.2018

EDGE-BASED ВЕКТОРНІ БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ В ОБ'ЄМНИХ І ПОВЕРХНЕВИХ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТАХ

ОСТРЕНКО М.В аспірант кафедри теоретичної та загальної електротехніки Запорізького національного університету, Запоріжжя, Україна, *e-mail:* ostrenkomax@rambler.ru

Мета роботи. *Аналіз властивостей Edge-Based векторних базисних функцій для об'ємних елементів і розробка поверхневих Edge-Based векторних базисних функцій МКЕ для апроксимації векторних величин електромагнітного поля в поверхневих інтегралах.*

Методи дослідження. *Ґрунтуючись на властивостях симплексних координат пропонується математична модель Edge-Based векторних базисних функцій як для об'ємних так і для поверхневих елементів.*

Основні результати. *Виконаний аналіз Edge-Based векторних базисних функцій для методу скінчених елементів (МСЕ). На основі аналізу запропоновано Edge-Based функції для поверхневих елементів (трикутників). Отримано властивості Edge-Based базисних функцій, що дозволяють більш точно моделювати магнітне поле, вихрові струми і втрати в порівнянні з Nodal-Based векторними базисними функціями.*

Запропонована математична модель показує ортогональність запропонованої системи Edge-Based векторних базисних функцій, що дозволяє їх використання в МСЕ. Більш того показано, що дотична складова векторного поля, представленого у вигляді лінійної комбінації системи як об'ємних так і поверхневих Edge-Based базисних функцій на ребрі елемента, дорівнює відповідному даному ребру коефіцієнту лінійної комбінації. Дана властивість дозволяє об'єднати об'ємні і поверхневі інтеграли МСЕ в одну систему лінійних рівнянь.

Наукова новизна. *Новизною запропонованої математичної моделі є форма, що дає можливість переходу від об'ємних інтегралів до поверхневих і об'єднання об'ємних і поверхневих інтегралів МСЕ в одну систему лінійних рівнянь. Це дозволяє істотно знизити розмірність задачі і, як наслідок, знизити ресурсуємність методу і збільшити його швидкодію без значних втрат точності.*

Практична цінність. *Наведені Edge-Based векторні базисні функції для об'ємних і поверхневих скінчених елементів були використані в розробленому програмному комплексі ELMAD-3D, призначеному для розрахунку втрат і перегрівів від полів розсіювання силових трансформаторів і реакторів. Використання поверхневих Edge-Based векторних базисних функцій дозволило істотно збільшити швидкодію методів розрахунку і знизити їх ресурсуємність.*

Ключові слова: метод скінчених елементів; об'ємні і поверхневі векторні базисні функції.

EDGE-BASED VECTOR FUNCTIONS FOR APPROXIMATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD IN VOLUME AND SURFACE FINITE ELEMENTS

OSTRENKO M.V. Postgraduate student of the Zaporozhye National University, Zaporozhye, Ukraine, E-mail: ostrenkomax@rambler.ru

Purpose. *Analysis of the properties of Edge-Based vector of basis functions for the volume elements and working surface Edge-Based FEM vector of basis functions for approximating the vector values of the electromagnetic field in the surface integrals.*

Methodology. *Based on the properties of simplex coordinates, the mathematical model of Edge-Based vector of basic functions for volume, and for the surface elements is proposed.*

Findings. *The analysis of Edge-Based vector basis functions for the finite element method (FEM) is performed.*

Based on the analysis, Edge-Based functions for surface elements (triangles) are proposed. The properties of Edge-Based basis functions are obtained, which make it possible to more accurately simulate a magnetic field, eddy currents and losses in comparison with Nodal-Based vector basis functions. The proposed mathematical model shows the orthogonality of the proposed system Edge-Based vector basis functions, which allows their use in FEM. Moreover, it is shown that the tangent component of a vector field, represented as a linear combination of a system of both volume and surface Edge-Based basis functions on the edge of an element, is equal to the coefficient of the linear combination corresponding to the given edge. This property allows us to combine the volume and surface integrals of the FEM into one system of linear equations.

Originality. *The* originality *of the proposed mathematical model is the form, which makes it possible to go from volume integrals to surface integrals and merge volume and surface integrals of FEM into one system of linear equations. This allows you to significantly reduce the dimension of the problem and, as a result, reduce the resource intensity of the method and increase its speed without significant loss of accuracy.*

Practical value. *The Edge-Based vector basis functions for volume and surface finite elements were used in the developed software package ELMAD-3D, designed to calculate losses and overheating from the leakage fields of power transformers and reactors. The use of surface Edge-Based vector basis functions allowed us to significantly increase the speed of calculation methods and reduce their resource intensity.*

Keywords: finite element method; volume and surface vector basis functions.

REFERENCES

[1] Sil'vester, P. L., Ferrari, R. L. (1986). Metod konechnykh elementov dlya radioinzhenerov i inzhenerov-elektrikov. Moscow, Mir, 229. (in Russian).

[2] Ren, Z. (2002). T-Ω Formulation for Eddy Current Problems in Multiply Connected Regions. IEEE Trans. Mag. 38, 2, 557-560.

[3] Albertz, D., Henneberger, G. (2000). On the Use of the New Edge Based $\vec{A}$ - $\vec{A}$, $\vec{T}$ Formulation for the Calculation of Time-Harmonic, Stationary and Transient Eddy Current Field Problems. IEEE Trans. Mag. 36, 4, 818-822.

[4] Karl Hollaus and Oszkar Biro. (2005). Comparison of Tetrahedral Edge Finite-Elements Using Different Potential Formulations. IEEE Trans. Mag. 41, 5, 1676-1679.

[5] Miklos KUCZMANN Nodal and Edge Finite. (2012). Element Analysis of Eddy Current Field Problems / Miklos KUCZMANN. PRZEGLAD ELEKTROTECHNICZNY. 12. ISSN 0033-2097 - R. 84NR, 194-197.

[6] Susnjic, L. (2008). 3D finite-element determination of stray losses in power transformer. Electric Power System Research 78, 1814-1818.

[7] Damir Žarko, Zlatko Maljković, Stjepan Štefan. (2006). Calculation of Losses in the Core Clamps of a Transformer Using 3-D Finite-Element Method / Damir Žarko, Zlatko Maljković, Stjepan Štefan // First Macedonian - Polish Symposium on Applied Electromagnetics (SAEM 2006): proceedings - Cvetkovski, Goga (ur.). 1-4.

[8] Gerard Meunier. (2008). The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling. ISTE and Wiley. 601.

[9] Wagner B. (2008). Error Evaluation of Surface Impedance Boundary Conditions With Magnetic Vector Potential Formulation on a Cylindrical Test Problem. IEEE Trans. on Magn. 44, 6. 734-737.

[10] Ida N. (2011). High Order Surface Impedance Boundary Conditions with the A-□ Formulation. FACTA UNIVERSITATIS, Ser.: Elec. Energ. 24, 2, 147-155.

[11] Ostrenko, M. V. (2016). Power Transformers and Reactors Structure Losses and Temperatures Calculation Using Surface Impedance Boundary Conditions / Maxym Ostrenko, Bogdan Andriienko, Sergei Tikhovod and Denys Prychynenko // 1-st IEEE Conference Advances in Magnetics AIM. 14-16. (in Russian).

[12] Ostrenko, M. V., Tikhovod, S. M. (2016). Raschet poter' v elementakh Konstruktsii Silovykh Transformatorov i Reaktorov Metodom Konechnykh Elementov s Granichnymi usloviyamiyami Impedansnogo Tipa. *Yelektrotekhnіka i yelektroyenergetika*, 2, 33-42. (in Russian).

[13] Demidovich, B. P., Maron, I. A., Shuvalova, E. Z. (1967). Chislennyye metody analiza. Priblizheniye funktsiy, differentsial'nyye i integral'nyye uravneniya. Moscow, Nauka, 368.

[14] Andriienko, B. U. (2012). Komp'yuterna programa "Programa rozrakhunku trivimrnogo magntnogo polya, vikhrovikh strumv, vtrat ta temperatur u silovikh transformatorakh ta reaktorakh elmag-3d" Svdotstvo pro restratsyu avtorskogo prava na tvr 41639. Derzhavna sluzhba ntelektualno vlasnost ukrani.