

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА

ПАТАЛАХ Д.Г. Аспирант Национального университета «Запорізька політехніка», Запорожье, Украина, e-mail: patalakh.dmytro@gmail.com

Цель работы – модификация метода численного расчета переходных процессов в линейных электрических цепях, а также разработка схемной модели метода, приводящая к удобству расчета и повышению скорости действия расчета на компьютере.

Методы исследования. Использована полиномиальная аппроксимация функций, численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений, матричные методы, программирование на компьютере и методы теории электрических цепей.

Полученные результаты. В результате модификации известного метода расчета переходных процессов разработан усовершенствованный метод, который позволяет сократить время компьютерного моделирования динамических электрических процессов в линейных электрических цепях. Показан пример применения предложенного метода. На основании разработанного метода составлена компьютерная программа для расчета переходного процесса в модельной цепи. Данный пример показал сокращение процессорного времени на 45% по сравнению с применением известных методов.

Научная новизна. Использована аппроксимация функций токов от времени рядами по ортогональным полиномам Чебышева. Полиномы Чебышева обладают свойством равномерности погрешности аппроксимации функций во всем диапазоне изменения аргумента, что выделяет их из ряда других ортогональных функций. Предложено использовать полиномиальную аппроксимацию не самой функции решения, а ее производной. Это существенно снижает погрешность аппроксимации, как функции решения, так и производной решения, которая фигурирует в методе расчета. Показано, как в предложенном методе интегро-дифференциальные уравнения состояния преобразуются в линейные алгебраические уравнения. Разработана схемная модель предложенного численного метода расчета. Схемная модель позволяет от электрической цепи, в которой процессы описываются интегро-дифференциальными уравнениями, перейти к схеме замещения с изображениями токов. Изображения истинных токов в схеме замещения интерпретируются, как постоянные токи. Показано, что для изображений токов в схеме замещения справедливы законы Кирхгофа, что приводит к расчету системы алгебраических уравнений. Такая схемная модель создает удобство инженеру, выполняющему расчеты переходных процессов.

Практическая ценность. Разработанный метод открывает возможность использования всего многообразия аппарата теории электрических цепей для работы с изображениями токов. На основании этого разрабатывается универсальный программный комплекс для расчета переходных процессов в электрических цепях произвольной сложности.

Ключевые слова: переходный процесс, численные методы, схемная модель, полиномиальная аппроксимация.

I. ВВЕДЕНИЕ

При переходных процессах в электротехнических системах происходят значительные броски тока. Это представляет опасность для оборудования, а также снижает надежность релейной защиты. Поэтому исследование этих процессов не потеряло актуальность в настоящее время. Современное компьютерное моделирование позволяет выбрать параметры устройств так, чтобы существенно снизить отрицательные последствия переходных процессов.

II. АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Для расчета переходных процессов в электротехнических цепях используется ряд известных программных комплексов, таких как EMTP [1], PSpice

[2], Simulink [3] и др. Уравнения состояния, составляемые по законам Кирхгофа для мгновенных значений, являются интегро-дифференциальными уравнениями, которые во многих случаях бывают жесткими. Для решения таких систем в программных комплексах широко применяются различные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Реальные исследуемые цепи могут содержать сотни элементов, что приводит к большим системам дифференциальных уравнений. Переходные процессы в электромагнитных устройствах могут быть весьма продолжительными, и время моделирования таких процессов может быть значительным, что нежелательно.

Для сокращения времени моделирования в рабо-

тах [4], [5], пропонується використовувати апроксимацію рішення рядами по поліномам Чебышева. В результаті отримані методи, дозволяють значительно підвищити швидкість моделювання. Однак сучасні запити такі, щоб можна було проводити моделювання в реальному часі. Тому розробка удосконаленого методу розрахунку перехідних електромагнітних процесів більш швидкодіючого, ніж існуючі, і стійкого до «алгебраїчних петлянь» є актуальною задачею.

Для інженерів, проводячих розробки, важливим є фізичний зміст математичних дій. Схемна модель, супроводжує математичну операцію, робить операцію більш зрозумілою. Наприклад, розрахунок перехідних процесів операторним методом рекомендується супроводжувати операторною схемою заміщення. При цьому в схемі заміщення процес такої, щоб він повністю описувався алгебраїчними рівняннями. Схемна модель дозволяє отримувати електричну схему, в якій процеси описуються інтегро-диференціальними рівняннями, перейти до схеми заміщення, для якої справедливі закони Кірхгофа для ланки постійного струму. Це дозволяє використовувати апарат теорії ланок для роботи з зображеннями струмів. Тому, модифікація чисельного методу, супроводжується створенням адекватної схемної моделі, є цінною.

III. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ціллю роботи є модифікація чисельного методу розрахунку перехідних процесів в електричних ланках, використовуючого апроксимацію рішення поліномами Чебышева, що дозволить скоротити час моделювання.

IV. ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для простоти викладу розглянемо спочатку одноконтурну електричну ланку, що містить резистивний (R), і індуктивний (L) елементи, включені послідовно.

При підключенні в момент часу $t=0$ джерела ЕДС $e(t)$ в ланку відбувається перехідний процес, який описується лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) \quad (1)$$

Будемо шукати рішення в часовій області $t \in [a, b]$. В роботі [6], пропонується використовувати апроксимацію рішення для функції струму рядами по поліномам Чебышева. В результаті отримано метод, що дозволяє значительно підвищити швидкість моделювання. При апроксимації деякої функції рядами по поліномам Чебышева задається умова методу коллокацій. Це означає, що для вибраних N вузлових точок з значенням аргумента t_m апроксимоване рішення збігається з точним рішенням, але в

інших точках допускається деяка похибка. В роботах [7], [8] показано застосування цього методу для розрахунку нелінійних електромагнітних ланок. Удосконалення цього методу для розрахунку перехідних процесів в трансформаторах викладено в роботі [10]. В роботах [7], [8], а також [9], проведено аналіз похибки методу, який показав, що основна похибка методу заключається в апроксимації похідної рішення. Дійсно, в рівнянні стану (1) фігурує похідна струму по часу.

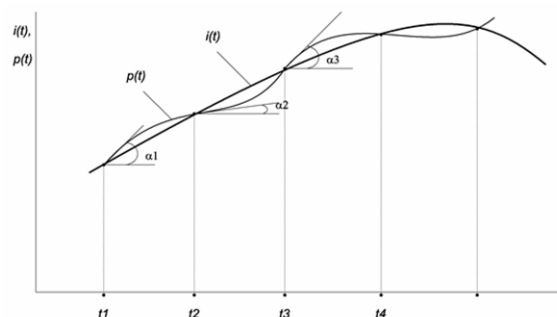


Рисунок 1. Поведення апроксимуючої функції в вузлах інтерполяції

Як видно з рис.1, навіть при незначительному відхиленні апроксимуючої функції від істинної функції похідна, як тангенс кута нахилу дотичної, змінюється значительно. Метод, який націлений на зменшення похибки апроксимації похідної рішення викладено в роботі [11]. Однак апроксимація алгебраїчними поліномами сама вносить значительну похибку [12].

Розробимо спосіб, який виключає появу такої похибки. Для цього рядами по поліномам Чебышева будемо розкладати не саму функцію рішення, а її похідну.

Свойства полиномов Чебышёва.

Поліноми Чебышёва є ортогональними функціями на відрізку $[-1, 1]$ з ваговою функцією $h(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ [13], [14]. Визначаються вони наступним чином:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Визначати їх зручно, використовуючи рекурентні формули:

$$T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) = 2x T_n(x); \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Функції, що мають неперервні похідні до деякого N -го порядку можна розкладати в ряд по поліномам Чебышёва. Поліноми Чебышёва можна диференціювати і інтегрувати [13], [15]. Ці властивості будемо використовувати для рішення інтегро-диференціальних рівнянь, які складаються на основі законів Кірхгофа.

Решение интегро-дифференциальных уравнений

Для интерполяции функции на конечном сегменте времени $t \in [a, b]$ делают замену переменной:

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x \Rightarrow x \in [-1, 1]; \quad x = \frac{2t - (a+b)}{b-a}.$$

Функцию для производной тока аппроксимируем полиномом $N-1$ -ой степени.

$$i'(x) \approx p(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(x). \quad (2)$$

Выберем в интервале моделирования $t \in [a, b]$ ряд узловых точек. Положим, что для всех N узловых точек со значением аргумента t_m (x_m) соответствуют следующие значения функции (2): $i'(x_m) = p(x_m)$ для $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

$$\left. \begin{aligned} c_0 T_0(x_0) + c_1 T_1(x_0) + c_2 T_2(x_0) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(x_0) &= i'_0 \\ c_0 T_0(x_1) + c_1 T_1(x_1) + c_2 T_2(x_1) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(x_1) &= i'_1 \\ \dots & \\ c_0 T_0(x_{N-1}) + c_1 T_1(x_{N-1}) + c_2 T_2(x_{N-1}) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(x_{N-1}) &= i'_{N-1} \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Вычтем из уравнений системы (3) первое уравнение и получим сокращенную систему

$$\begin{bmatrix} T_1(x_1) - T_1(x_0) & T_2(x_1) - T_2(x_0) & \dots & T_{N-1}(x_1) - T_{N-1}(x_0) \\ T_1(x_2) - T_1(x_0) & T_2(x_2) - T_2(x_0) & \dots & T_{N-1}(x_2) - T_{N-1}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_1(x_{N-1}) - T_1(x_0) & T_2(x_{N-1}) - T_2(x_0) & \dots & T_{N-1}(x_{N-1}) - T_{N-1}(x_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i'_1 - i'_0 \\ i'_2 - i'_0 \\ \dots \\ i'_{N-1} - i'_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Введем вектор-строку полиномов Чебышёва, как функцию от x :

$$T_x(x) = [T_1(x) \quad T_2(x) \quad \dots \quad T_{N-1}(x)]. \quad (5) \quad a$$

Обозначим:

$$D_x = \begin{bmatrix} T(x_1) \\ T(x_2) \\ \vdots \\ T(x_{N-1}) \end{bmatrix}; \quad D_0 = \begin{bmatrix} T(x_0) \\ T(x_0) \\ \vdots \\ T(x_0) \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$I'_x = \begin{bmatrix} i'(x_1) \\ i'(x_2) \\ \vdots \\ i'(x_{N-1}) \end{bmatrix}; \quad I'_0 = \begin{bmatrix} i'(x_0) \\ i'(x_0) \\ \vdots \\ i'(x_0) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

С учетом (5-7) систему (4) в матричной форме можно записать в виде:

$$(D_x - D_0)C = I' - I'_0, \quad (8)$$

где C вектор коэффициентов в уравнениях (3, 4).

Из уравнения (8) следует вектор значений производных для узловых точек:

$$I' = D C + I'_0, \quad (9)$$

где

$$D = D_x - D_0. \quad (10)$$

Согласно (2)

$$i'(x) \approx c_0 + T_x(x) \cdot C, \quad (11)$$

$$i'(x_0) \approx c_0 + T_x(x_0) \cdot C. \quad (12)$$

Откуда получим:

$$c_0 = i'_0 - T_x(x_0) \cdot C. \quad (13)$$

Решение для функции тока имеет вид:

$$i(x) = \int p(x) dx + d_1 = \int (c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(x)) dx + d_1. \quad (14)$$

Определим c_0 и постоянную интегрирования. Подставим из выражения (13) c_0 и учтем (5):

$$i(x) = \int (i'_0 - T_x(x_0) \cdot C + T_x(x) \cdot C) dx + d_1 = i'_0 \cdot x - T_{x0}(x_0) \cdot C \cdot x + \int (T_x(x) \cdot C) dx + d_1. \quad (15)$$

Интегралы от полиномов Чебышева выражаются формулами [13]:

$$\int T_1(x) dx = \frac{1}{4} T_2(x) + d \quad \kappa=1 \quad (16)$$

$$\int T_k(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{T_{k+1}(x)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(x)}{k-1} \right] dx + d, \quad \kappa > 1 \quad (17)$$

d – постоянная интегрирования.

С учетом (16-17) выражение (15) представим в виде:

$$i(x) = [T_1(x)]c_0 + \frac{1}{4}[T_2(x)]c_1 + \dots + \left[\frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)}\right]c_k + \dots + \left[\frac{T_N(x)}{2N} - \frac{T_{N-2}(x)}{2(N-2)}\right]c_{N-1} + d_1 \quad (18)$$

Введем вектор-строку всех слагаемых (кроме первого), входящих в выражение (18), как функцию от аргумента x :

$$S_x(x) = \left[\frac{1}{4}[T_2(x)], \dots, \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)}, \dots, \frac{T_N(x)}{2N} - \frac{T_{N-2}(x)}{2(N-2)} \right] \quad (19)$$

Для $N-1$ узловых точек со значением аргумента времени t_m , что соответствует моментам приведенного аргумента x_m , соответствуют следующие значения функции (19) как строки матрицы:

$$S = \begin{bmatrix} S_x(x_1) \\ S_x(x_2) \\ \vdots \\ S_x(x_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

При значении $x = x_0$ имеем:

$$S_0 = \begin{bmatrix} S_x(x_{01}) \\ S_x(x_0) \\ \vdots \\ S_x(x_0) \end{bmatrix} \quad (21)$$

Из (18) с учетом (19), (5) и (13) получим:

$$i(x) = i'_0 \cdot x - T_{x0} \cdot C \cdot x + S_x(x) \cdot C + d_1 \quad (22)$$

Откуда

$$d_1 = i_0 - i'_0 \cdot x + T_{x0} \cdot C \cdot x_0 + S_x(x_0) \cdot C \quad (23)$$

Подставим выражение (23) в (22):

$$i(x) = (S_x(x) - S_x(x_0) - (x - x_0) \cdot T_{x0}) \cdot C + (x - x_0) \cdot i'_0 + i_0 \quad (24)$$

Для узловых точек 1, 2, ... $N-1$ уравнение (24) в матричной форме имеет вид:

$$I = (S - S_0 - A \cdot T_{x0}) \cdot C + A \cdot i'_0 + i_0 = V \cdot C + A \cdot i'_0 + i_0 \quad (25)$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}; \quad V = (S - S_0 - A \cdot T_{x0}); \quad A = \begin{bmatrix} x - x_1 \\ x - x_2 \\ \vdots \\ x - x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Дифференциальное уравнение состояния для цепи $R-L-e$ имеет вид (1). Для узловых точек со значением аргумента времени t_m (соответственно x_m) $m=1, 2, \dots, N-1$ соответствует следующее уравнение в матричной форме:

$$L I' + R I = e, \quad (27)$$

где e - вектор значений ЭДС в узловых точках;

I - вектор значений тока в узловых точках;

I' - вектор значений производной тока в узловых точках.

Подставим выражения (9), (25) в (27):

$$L \cdot (D \cdot C + I'_0) + R \cdot (V \cdot C + A \cdot i'_0 + i_0) = e \quad (28)$$

Преобразуем (28):

$$(L \cdot D + R \cdot V) \cdot C = e - R \cdot A \cdot I'_0 - R \cdot i_0 - L \cdot I'_0 \quad (29)$$

Получили выражение второго закона Кирхгофа для изображений C .

Тогда при известных начальных значениях тока i_0 и производной тока i'_0 можно определить значения тока во всех произвольных точках x на отрезке $[-1, 1]$ или соответствующих точках t временного сегмента согласно (24).

Уравнение (29) можно интерпретировать следующим образом. Пусть в исходной ветви $R-L-e$ протекает реальный ток $i(t)$. Исходной ветви, соответствует ветвь замещения (рис. 2), в которой протекает некоторое изображение C , реального тока $i(t)$. Изображение C - это вектор, содержащий коэффициенты разложения тока $i(t)$ в ряд по ортогональным полиномам Чебышева.

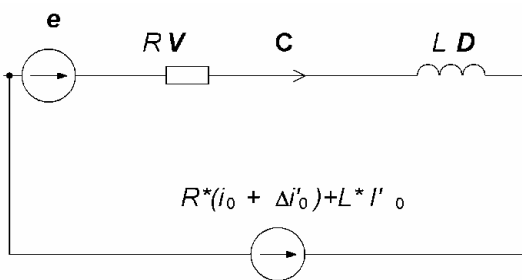


Рисунок 2. Схема замещения для изображений одноконтурной $R-L-e$ цепи

При этом в ветви замещения резистивный элемент R имеет сопротивление $R \cdot V$ и последовательно с ним навстречу току включается источник постоянной ЭДС величиной $R \cdot (A \cdot I'_0 + I_0)$ (см. рис.2). Индуктивный элемент L имеет сопротивление $L \cdot D$, и последовательно с ним навстречу току включается источник постоянной ЭДС величиной $L I'_0$.

Согласно разработанной теории составлена ком-

пьютерная программа, расчет по которой с точностью до долей процента совпадает с расчетом, полученным аналитически.

Напряжение на конденсаторе. Рассмотрим простую цепь, содержащую включенные последовательно элементы: резистивный (R), индуктивный (L) и емкостный (C) (рис. 3). При подключении источника ЭДС в цепи происходит переходный процесс.

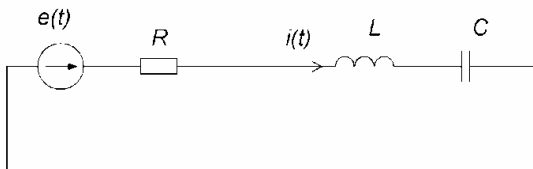


Рисунок 3. Схема одноконтурной R-L-C-е цепи

Напряжение на конденсаторе в течение переходного процесса определяется выражением:

$$u_C(x) = B \int i(x) dx + d_2; \quad B = \frac{1}{C}, \quad (30)$$

где d_2 – постоянная интегрирования, которая может быть определена из начальных условий.

Выражение для тока (30) получено из выражения (24) и начальных условий. Выражение для тока (22) получено интегрированием выражения (2) для производной тока. В этих выражениях вектор C коэффициентов разложения производной тока считается неопределенным.

Используем в формуле (30) выражение для тока из (22):

$$u_C(x) = B \cdot \int (\mathbf{S}_x(x) - \mathbf{S}_0 - (x - x_0) \cdot \mathbf{T}_{x0}) \cdot \mathbf{C} + (x - x_0) \cdot i_0' + i_0 dx + d_2. \quad (31)$$

Рассмотрим вектор-строку (19) как функцию от x и выполним интегрирование всех компонентов вектора $\mathbf{S}_x(x)$:

$$\mathbf{J}_1(x) = \int \mathbf{S}_x(x) dx = \int \left[\frac{1}{4} [T_2(x)], \dots, \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} \dots \frac{T_N(x)}{2N} - \frac{T_{N-2}(x)}{2(N-2)} \right] dx. \quad (32)$$

Используем правила интегрирования полиномов (16, 17). Интегрирование всех членов вектора $\mathbf{S}_x(x)$ дает вектор-строку:

$$\mathbf{J}_1(x) = \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[\frac{T_3(x)}{3} - \frac{T_1(x)}{1} \right], \dots \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2(k+1)} \left(\frac{T_{k+2}(x)}{k+2} - \frac{T_k(x)}{k} \right) - \frac{1}{2(k-1)} \left(\frac{T_k(x)}{k} - \frac{T_{k-2}(x)}{k-2} \right) \right], \dots \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2N} \left(\frac{T_{N+1}(x)}{N+1} - \frac{T_{N-1}(x)}{N-1} \right) - \frac{1}{2(N-2)} \left(\frac{T_{N-1}(x)}{N-1} - \frac{T_{N-3}(x)}{N-3} \right) \right] \end{aligned} \right]. \quad (33)$$

Выполним интегрирование остальных членов уравнения (31):

$$\mathbf{J}_2(x) = \int \mathbf{S}_x(x_0) dx = \mathbf{S}_x(x_0) x; \quad (34)$$

$$\mathbf{J}_3 = \int (x - x_0) \cdot \mathbf{T}_{x0} dx = \mathbf{T}_{x0}(x_0) \cdot (x^2 / 2 + x_0 \cdot x), \quad (35)$$

где $\mathbf{J}_2(x), \mathbf{J}_3(x)$ вектор-строки, функция $T_x(x)$ – вектор (5) значений полиномов Чебышева в точке x ,

$$\mathbf{J}_4(x) = \int (x - x_0) \cdot i_0' dx = i_0' \cdot (x^2 / 2 + x_0 \cdot x); \quad (36)$$

$$\mathbf{J}_5(x) = \int i_0 dx = i_0 \cdot x, \quad (37)$$

$\mathbf{J}_4(x), \mathbf{J}_5(x)$ – скаляры.

С учетом выражений (32) – (37) напряжение на конденсаторе (31) примет вид:

$$\begin{aligned} u_C(x) &= \\ &= B \cdot \{ [\mathbf{J}_1(x) - \mathbf{J}_2(x) - \mathbf{J}_3(x)] \mathbf{C} + \mathbf{J}_4(x) + \mathbf{J}_5(x) \} + d_2 = (38) \\ &= B \cdot W(x) \cdot \mathbf{C} + q(x) + d_2. \end{aligned}$$

Обозначим функции:

$$W(x) = [\mathbf{J}_1(x) - \mathbf{J}_2(x) - \mathbf{J}_3(x)]; \quad (39)$$

$$q(x) = \mathbf{J}_4(x) + \mathbf{J}_5(x). \quad (40)$$

При $x = x_0$ $u_C(x_0) = u_{C0}$.

Напряжение на конденсаторе (38) в начальной точке:

$$u_{C0} = B \cdot [W(x_0) \cdot \mathbf{C} + q(x_0)] + d_2. \quad (41)$$

Определим постоянную интегрирования:

$$d_2 = u_{C0} - B \cdot [W(x_0) \cdot \mathbf{C} + q(x_0)]. \quad (42)$$

Окончательно функция напряжения на конденсаторе (38) примет вид:

$$u_C(x) = B \cdot [W(x) - W(x_0)] \cdot C + q(x) - q(x_0) + u_{c0} \quad (43)$$

Если уравнение (43) записать для узловых точек со значением аргумента времени t_m (соответственно x_m) $m=1, 2, \dots, N-1$, то получим систему уравнений, которая в матричной форме имеет вид:

$$U_C = B[WC + Q] + u_{c0}, \quad (44)$$

где $W = W_x - W_0$,

$$W_x = \begin{bmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ \vdots \\ w(x_{N-1}) \end{bmatrix}; W_0 = \begin{bmatrix} w(x_0) \\ w(x_0) \\ \vdots \\ w(x_0) \end{bmatrix};$$

$$Q_x = \begin{bmatrix} q(x_1) \\ q(x_2) \\ \vdots \\ q(x_{N-1}) \end{bmatrix}; Q_0 = \begin{bmatrix} q(x_0) \\ q(x_0) \\ \vdots \\ q(x_0) \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Интегро-дифференциальное уравнение состояния цепи $R-L-C-e$ (рис. 3) имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i(t) dt + u_C(t_0) = e(t). \quad (46)$$

Для узловых точек со значением аргумента времени t_m (соответственно x_m) $m=1, 2, \dots, N-1$ уравнению (46) соответствует система уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$LI' + RI + U_C = e. \quad (47)$$

Подставим в (47) выражения: I - вектор значений тока в узловых точках (25), I' - вектор значений производной тока в узловых точках (9), U_C - вектор значений напряжений на конденсаторе в узловых точках (44):

$$L \cdot (D \cdot C + I_0') + R \cdot (V \cdot C + A \cdot i_0' + i_0) + B[WC + Q] + u_{c0} = e. \quad (48)$$

После преобразований (48) получим:

$$(L \cdot D + R \cdot V + B \cdot W) \cdot C = e - R \cdot A \cdot I_0' - R \cdot I_0 - L \cdot I_0' - BQ - u_{c0}. \quad (49)$$

Получили выражение второго закона Кирхгофа для цепи, показанной на рис. 4. В этой цепи протекает не истинный ток, а его изображение S .

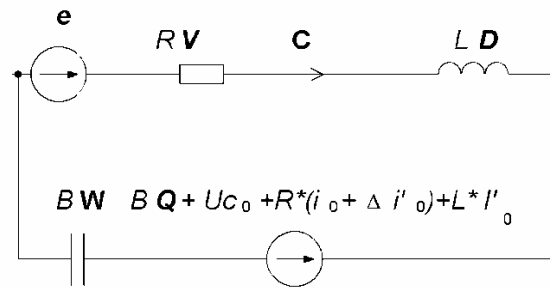


Рисунок 4. Схема замещения для одноконтурной R-L-C- e цепи

Уравнение (49) и схему замещения рис. 3 можно интерпретировать следующим образом. Исходной ветви соответствует ветвь замещения (рис. 3). В ветви замещения протекает не истинный ток $i(t)$, а его изображение S . Изображение S - это вектор коэффициентов разложения тока $i(t)$ по полиномам Чебышева. При этом в ветви замещения резистивный элемент R имеет изображение сопротивления $R \cdot V$ и последовательно с ним навстречу току включается источник постоянной ЭДС величиной $R \cdot (\Delta \cdot I_0' - I_0)$ (см. рис. 4).

Индуктивный элемент имеет изображение сопротивления $L \cdot D$ и последовательно с ним навстречу току включается источник постоянной ЭДС величиной $L \cdot I_0'$, а емкостный элемент - изображение сопротивления $B \cdot W$, и последовательно с ним навстречу току включается источник постоянной ЭДС величиной $BQ - u_{c0}$.

Докажем, что в узлах схемы замещения для изображений S соблюдается первый закон Кирхгофа. Для этого воспользуемся уравнением (25).

$$I = (S - S_0 - A \cdot T_{x0}) \cdot C + \Delta \cdot i_0' + i_0 = V \cdot C + A \cdot i_0' + i_0.$$

Просуммировав векторы токов в узле, можно показать, что изображений токов в схеме замещения выполняется закон токов Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^b C_k = 0. \quad (50)$$

Таким образом, в схеме замещения электрической цепи все изображения S_k оригиналов токов $i_k(t)$ удовлетворяют законам Кирхгофа. Уравнения, составленные по законам Кирхгофа для изображений - линейные алгебраические уравнения. Следовательно, при известных значениях токов ветвей i_{0k} и напряжений на конденсаторах u_{c0k} в начале моделируемого временного сегмента $[t_0, t_{N-1}]$ система уравнений, составленная для схемы замещения по первому закону Кирхгофа, для всех узлов без одного и по второму закону Кирхгофа для всех главных контуров, имеет единственное решение. В результате решения системы линейных алгебраических уравнений получаем

векторы C_k (здесь k – номер ветви), содержащие значения коэффициентов полиномиальной аппроксимации токов для всех ветвей.

Зная для любой k -й ветви коэффициенты полинома, значение тока i_{0k} и производной тока в начальной точке t_0 , а также напряжение на конденсаторе u_{c0} , мы можем получить значение тока во всех произвольных точках в сегменте времени $[t_0, t_{N-1}]$ согласно (30):

$$i(x) = (S_x(x) - S_x(x_0) - (x - x_0) \cdot T_{x0}) \cdot C + (x - x_0) \cdot i'_0 + i_0.$$

Для узловых точек $1, 2, \dots, N-1$ уравнение (30) в матричной форме имеет вид (31).

Функция напряжения на конденсаторе имеет вид (38).

Для узловых точек со значением аргумента времени t_m (соответственно x_m) $m=1, 2, \dots, N-1$ уравнению (50) соответствует следующее уравнение (51) в матричной форме:

$$U_c = B \cdot [WC + Q] + u_{c0}. \quad (51)$$

Для уменьшения погрешности аппроксимации рекомендуется узловые точки выбирать в нулях полиномов Чебышева [12].

V. ИСПЫТАНИЕ МЕТОДА

Для испытания метода, как и в работе [6], использована модельная электрическая цепь, показанная на рис. 5. Согласно разработанному методу модельной электрической цепи (рис. 5) соответствует схема замещения, показанная на рис. 6.

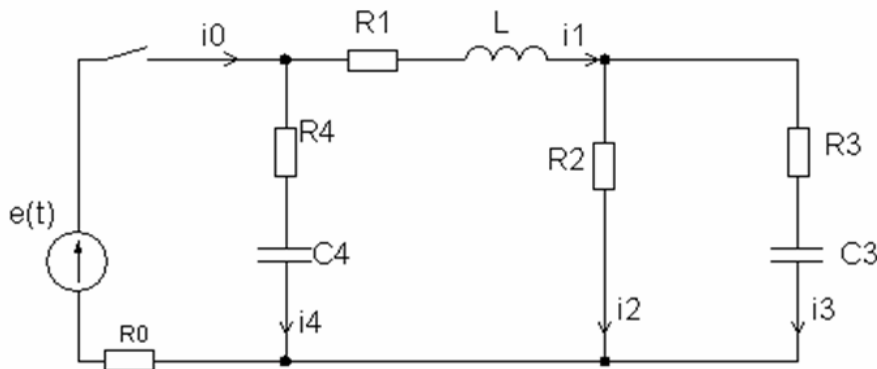


Рисунок 5. Электрическая схема исследуемой модельной цепи

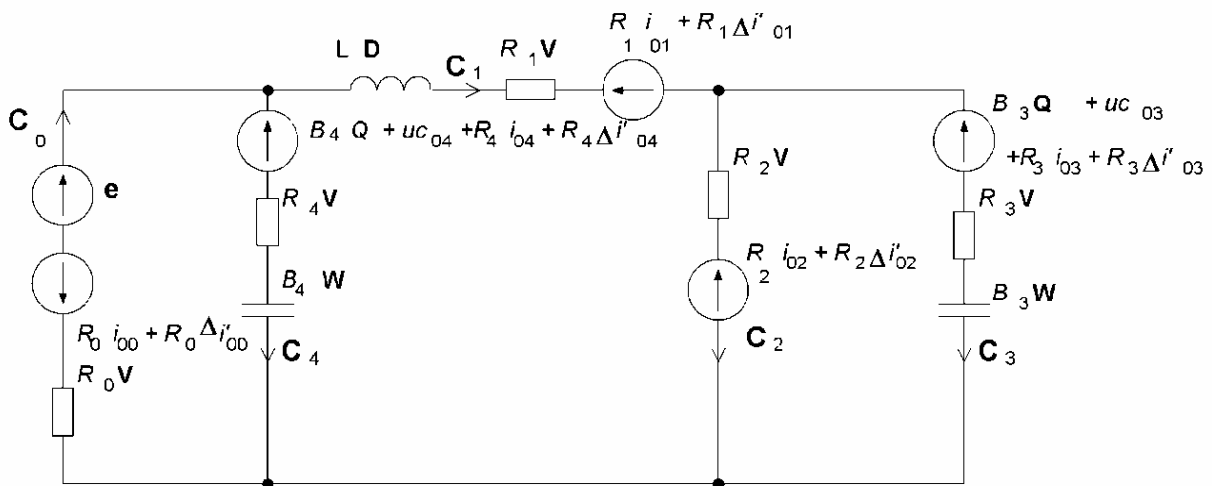


Рисунок 6. Операторная схема замещения исследуемой модельной цепи

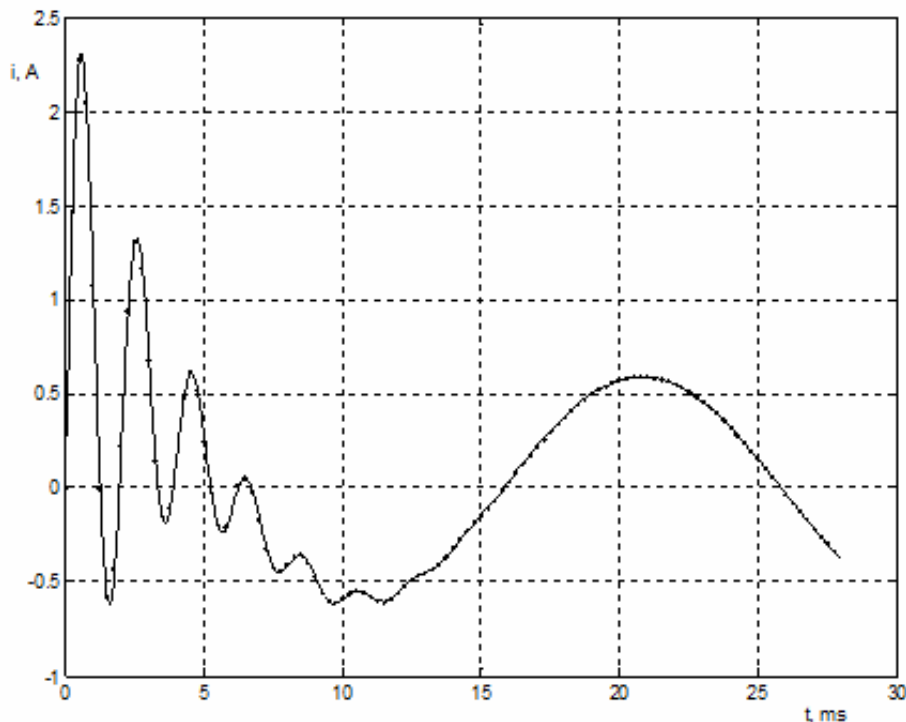


Рисунок 7. Зависимость тока $i_1(t)$, полученная в результате расчета по программе

Этой схеме соответствуют уравнения, составленные по законам Кирхгофа (52). В схеме замещения вместо реальных токов фигурируют изображения токов – векторы, содержащие коэффициенты аппрокси-

мации этих токов полиномами Чебышева. Первые два уравнения составлены по первому закону Кирхгофа, а остальные уравнения составлены по второму закону Кирхгофа для независимых контуров.

$$\left. \begin{aligned}
 C_0 - C_1 - C_4 &= 0; \\
 C_1 - C_2 - C_3 &= 0; \\
 R_0VC_0 + R_4VC_4 + B_4WC_4 &= \\
 &= e - R_0i_{00} - R_0\Delta i'_{00} - R_4i_{04} - R_4\Delta \cdot i'_{04} - B_4Q - u_{C04}; \\
 R_1VC_1 + LDC_1 + R_2VC_2 - B_4WC_4 - R_4VC_4 &= \\
 &= -R_1i_{01} - R_1\Delta \cdot i'_{01} - R_2i_{02} - R_2\Delta \cdot i'_{02} + B_4Q + u_{C04} + R_4\Delta \cdot i'_{04}; \\
 -R_2VC_2 + R_3VC_3 + B_3WC_3 &= \\
 &= R_2i_{02} + R_2\Delta \cdot i'_{02} - R_3i_{03} - R_3\Delta \cdot i'_{03} - B_3Q,
 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где $i_{00}, i_{01}, i_{02}, i_{03}, i_{04}, i'_{00}, i'_{01}, i'_{02}, i'_{03}, i'_{04}, u_{C03}, u_{C04}$ – значения токов и их производных по времени ветвей 0-4 и напряжений на конденсаторах 3,4 в начале текущего расчета, Δ – вектор отклонений узловых точек от нулевой точки.

Решение этих уравнений дает вектор полиномиальных коэффициентов, по которым согласно (25) могут быть вычислены значения токов в узловых точках. Результаты расчета приведены на рис 7.

Некоторым недостатком уравнений (52), которые соответствуют схеме замещения рис. 6, является то, что в качестве начальных условий требуется задавать значения производных не только переменных состояния, но и зависимых переменных. Однако эти значения легко получить с помощью законов Кирхгофа по методике, приведенной в работе [16].

ВЫВОДЫ

Расчет переходных процессов в электрических

цепях сводится к решению интегродифференциальных уравнений состояния. Предложенный метод расчета переходных процессов в электрических цепях позволяет интегродифференциальные уравнения состояния сводить к алгебраическим уравнениям. Для этого предложено составлять специальную схему замещения. Схема замещения строится формально по схеме моделируемой цепи. В схеме замещения фигурируют не истин-

ные токи, а их изображения. Для изображений токов справедливы законы Кирхгофа. Вычислять их можно по законам расчета постоянных токов. Сравнение процессорного времени расчета переходного процесса модельной задачи по предложенному методу и по методу, описанный в работе [6], показало, что при одинаковой заданной погрешности, предложенный метод имеет быстроедействие на 45% лучше, чем метод, описанный в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Electromagnetic Transient Program (EMTP) Application Guide // EPRI Report No: EL – 4650, Project 2149–1, Westinghouse Electric Corp., Pittsburgh, PA, 1986.
- [2] Кеун Д. OrCAD Pspice. Анализ электрических цепей. / Дж. Кеун. – СПб.: Питер, 2008. – 640 с.
- [3] Черных И.В. Simulink среда создания инженерных приложений. / И.В Черных. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 496 с.
- [4] Татевян С.К. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышёва. / С.К. Татевян, Н.А. Сорокин, С.Ф. Залеткин Вычислительные методы и программирование.– 2002.– Т.3, с. 52-81.
- [5] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1983. – 384 с.
- [6] Тиховод С.М. Использование полиномов Чебышева для расчета переходных процессов в электрических цепях / С.М. Тиховод // Вісник національного університету «ХПІ» . – 2013 . – № 1 . – С. 91-105.
- [7] Тиховод С.М. Расчет переходных процессов в трансформаторах на основе магнитоэлектрических схем замещения с использованием полиномов Чебышёва / С.М. Тиховод // Електротехніка та електроенергетика. – 2015. – № 2. – С. 5-14.
- [8] Tikhovod S.M. Calculation of transient processes in electrical circuits using chebyshev polynomials/ Tikhovod // RUSSIAN ELECTRICAL ENGINEERING.- 2016.-№3.- С. 172-180
- [9] Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченкова. – М.: Высш. шк., 1994. – 544 с.
- [10] Тиховод С.М. Расчет переходных процессов в магнитоэлектрических цепях при использовании полиномиальной аппроксимации решения / С.М. Тиховод // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2015. – №3. – С. 25-32.
- [11] Тиховод С.М. Метод ускоренного численного расчета переходных процессов в электрических цепях на основе аппроксимации решения алгебраическими полиномами/ С.М. Тиховод, Т.М. Корнус, Д. Паталах // Електротехніка та електроенергетика. – 2015. – № 2. – С. 11-24.
- [12] Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Наука, 1987. – 630 с.
- [13] Васильев Н.И. Применение полиномов Чебышева в численном анализе. / Н.И. Васильев, Ю.А. Клоков, А.Я. Шкерстена. – Рига.: Зинатне. – 1984. – 240 с.
- [14] Данилов Ю.А. Многочлены Чебышева / Ю.А. Данилов. – Минск.: Вышэйшая школа, 1984. – 157 с.
- [15] Ильина В.А. Численные методы для физиков-теоретиков.1. / В.А. Ильина, П.К. Силаев. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2003. – 132 с.
- [16] Чуа Л.О. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы / Л. О. Чуа, Пен-Мин. Лин; [пер. с англ.]. – М.: Энергия, 1980. – 640 с.

Стаття надійшла до редакції 25.10.2019

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДА ЧИСЛОВОГО РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМІВ ЧЕБИШОВА

ПАТАЛАХ Д.Г. Аспірант Національного університету «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, e-mail: patalakh.dmytro@gmail.com

Мета роботи. Модифікація методу числового розрахунку перехідних процесів в лінійних електричних колах, а також розробка схемної моделі методу, що приводить до зручності розрахунку і підвищенню швидкодії розрахунку на комп'ютері.

Методи дослідження. Використана поліноміальна апроксимація функцій, числові методи розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь, матричні методи, програмування на комп'ютері і методи теорії електричних кіл.

Отримані результати. В результаті модифікації відомого методу розрахунку перехідних процесів розроблено удосконалений метод, який дозволяє скоротити час комп'ютерного моделювання динамічних електричних процесів в лінійних електричних колах. Показаний приклад застосування запропонованого методу. На підставі розробленого методу складена комп'ютерна програма для розрахунку перехідного процесу в модельному колі. Даний приклад показав скорочення процесорного часу на 45% в порівнянні з застосуванням відомих методів.

Наукова новизна. Використана апроксимація функцій струмів від часу рядами по ортогональних поліномам Чебишова. Поліноми Чебишова мають властивість рівномірності похибки апроксимації функцій у всьому діапазоні зміни аргументу, що виділяє їх з ряду інших ортогональних функцій. Запропоновано використовувати поліноміальну апроксимацію не самою функцій рішення, а її похідної. Це істотно знижує похибку апроксимації, як функцій рішення, так і похідною рішення, яка фігурує в методі розрахунку. Показано, як в запропонованому методі інтегро-диференціальні рівняння стану перетворюються в лінійні алгебраїчні рівняння. Розроблено схемну модель запропонованого числового методу розрахунку. Схемна модель дозволяє від електричного кола, в якому процеси описуються інтегро-диференціальними рівняннями, перейти до схеми заміщення з зображеннями струмів. Зображення справжніх струмів схемою заміщення інтерпретуються, як постійні струми. Показано, що для зображень струмів в схемі заміщення справедливі закони Кирхгофа, що призводять при розрахунку до системи алгебраїчних рівнянь. Схемна модель створює зручність інженеру, який виконує розрахунки перехідних процесів.

Практична цінність. Розроблений метод відкриває можливість використання всього різноманітного апарату теорії електричних кіл для роботи з зображеннями струмів. На підставі цього розробляється універсальний програмний комплекс для розрахунку перехідних процесів в електричних колах довільної складності.

Ключові слова: *перехідний процес, числові методи, схемна модель, поліноміальна апроксимація*

MODIFICATION OF NUMERICAL CALCULATION OF TRANSIENTS IN ELECTRIC CIRCUITS ON BASIS OF TCHEBYSHEV'S POLYNOMIALS

PATALAKH D. Postgraduate student, Zaporizhzhia Polytechnic National University, Ukraine, e-mail: patalakh.dmytro@gmail.com

Purpose. Modification of the numerical calculation method of transients in linear electric circuits, as well as the development of a schematic model of the method, leading to ease the calculation and to increase the speed of calculation on a computer.

Methodology. Polynomials approximation of functions, numeral methods of solution of integro-differential equations, matrix methods, computer programming and methods of electric circuits theory are used.

Findings The improved method of transient calculation is worked out as the modification of the known one. It allows to reduce the computer modeling time of dynamic electric processes in linear electric circuits. The example of the application of the proposed method is shown. Based on the developed method, the computer program was compiled for calculating the transient in the model circuit. This example showed the reduction in CPU time of 45% compared with the use of known methods

Originality. The approximation of the functions of currents with time by series in the Chebyshev orthogonal polynomials is used. Chebyshev polynomials possess the property of the approximation error uniformity of functions in the entire range of the argument, which distinguishes them from a number of other orthogonal functions. It is proposed to use a polynomial approximation not of the solution functions themselves, but of its derivative. This significantly reduces the approximation error of both the solution function and the derivative of the solution, which appears in the calculation method. It is shown how, in the proposed method, integro-differential equations of state are transformed into linear algebraic equations. The schematic model of the proposed numerical calculation method is developed. The schematic model allows you to move from an electrical circuit in which processes are described by integro-differential equations to an equivalent circuit with images of currents. Images of true currents in the equivalent circuit are interpreted as direct currents. It is shown that the Kirchhoff laws are valid for current images in the equivalent circuit, which leads to the calculation of a system of algebraic equations. Such a circuit model creates convenience for an engineer performing transient calculations.

Practical value. The developed method opens up the possibility of using the entire diverse apparatus of the theory of electric circuits for working with current images. Based on this, a universal software package is developed for calculating transients in electrical circuits of arbitrary

Keywords: *transient, numeral methods, scheme model, polynomial approximation*

REFERENCES

[1] Electromagnetic transient program (EMTP) ap-

- plicationguide (1986). // epr report no: el – 4650, project 2149–1, Westinghouse electric corp., Pittsburgh.
- [2] Keoun, D., (2008). Orcad Pspice. analiz jelektricheskikh cepej. Piter, 640.
- [3] Chernyh, I.V. (2003). Simulink sreda sozdaniya inzhenernykh prilozhenij, Moscow, dialog-mifi, 496.
- [4] Tatevjan, S.K., (2002). Chislennoe integrirovaniye obyknovennykh differencial'nykh uravnenij s ispol'zovaniem rjadov Chebysheva. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*, 3, 52-81.
- [5] Pashkovskij, S. (1983). Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i rjadov Chebysheva. Moscow, Nauka, 384.
- [6] Tihovod, S.M., (2013). Ispol'zovanie polinomov Chebysheva dlja rascheta perehodnykh processov v jelektricheskikh cepjah. *Visnik nacional'nogo universitetu «HPI»*, 1, 91-105.
- [7] Tihovod, S.M., (2015). Raschet perehodnykh processov v transformatorakh na osnove magnitoelektricheskikh skhem zameshheniya s ispol'zovaniem polinomov Chebysheva. *Elektrotehnika ta elektroenergetika*, 2, 5-14.
- [8] Tihovod, S.M., (2016). Calculation of transient processes in electrical circuits using Chebyshev polynomials. *Russian electrical engineering*, 3, 172-180.
- [9] Amosov, A. A., Dubinskij, N. V., (1994). Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov. Moscow, Vyssh. shk., 544.
- [10] Tihovod, S.M. (2015). Raschet perehodnykh processov v magnitoelektricheskikh cepjah pri ispol'zovanii polinomial'noj approksimacii reshenija. *Izvestija vysshih uchebnykh zavedenij. jelectromehanika*, 3, 25-32.
- [11] Tihovod, S.M., Kornus, T.M., Patalah D., (2015). Metod uskorennoho chislennogo rascheta perehodnykh processov v jelektricheskikh cepjah na osnove approksimacii reshenija algebraicheskimi polinomami. *Elektrotehnika ta elektroenergetika*, 2, 11-24.
- [12] Bahvalov, N.S. Zhidkov, N.P., Kobel'kov, G.M., (1987). Chislennye metody. Moscow, Nauka, 630.
- [13] Vasil'ev, N.I., Klovok, Ju.A., Shkerstena A.Ja., (1984). Primenenie polinomov Chebysheva v chislennom analize. Riga, Zinatne, 240.
- [14] Danilov, Ju.A., (1984). Mnogochleny Chebysheva. Minsk, Vyshhejschaja shkola, 157.
- [15] Il'ina, V.A. Silaev, P.K., (2003). Chislennye metody dlja fizikov-teoretikov.1. Moskva-Izhevsk: institut komp'juternykh issledovanij 132.
- [16] Chua, L.O., Pen–Min Lin, (1980). Mashinnyj analiz elektronnykh skhem: Algoritmy i vychislitel'nye metody. Moscow, Energiya, 640.