УДК 621.316.13

МЕТОД РАСЧЕТА УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

ПАТАЛАХ Д.Г. Аспирант Национального университета «Запорізька політехніка», Запорожье, Украина, e-mail: patalakh.dmytro@gmail.com

ТИХОВОД С. М. д.т.н., доц. Национального университета «Запорізька політехніка», Запорожье, Украина, e-mail: stikhovod@gmail.com.

Цель работы. *Разработка метода расчета установившихся периодических процессов сложной формы.*

Методы исследования. *Использована полиномиальная аппроксимация функций, численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений, математический аппарат матричной алгебры, компьютерное программирование и методы теории электрических цепей.*

Полученные результаты. *В результате модификации известного метода расчета переходных процессов разработан метод, который позволяет непосредственно выполнять расчет установившихся периодических процессов. Это сокращает время компьютерного моделирования установившихся периодических электрических процессов в линейных электрических цепях. Показан пример применения предложенного метода. На основании разработанного метода составлена компьютерная программа для расчета установившегося процесса в модельной цепи. Данный пример показал сокращение процессорного времени на 45% по сравнению с применением известных методов.*

Научна новизна. *Процессы в электрических цепях описываются интегро-дифференциальными уравнениями. При их решении использована аппроксимация функций производных токов от времени рядами по ортогональным полиномам Чебышева. При аппроксимации функций полиномами Чебышева имеет место свойство равномерности погрешности во всем диапазоне изменения аргумента. Это выгодно выделяет их из ряда других ортогональных функций. В предложенном методе использована полиномиальная аппроксимация не самой функции решения, а ее производной. Сама функция находится операцией интегрирования. Эта операция имеет малую погрешность по сравнению с операцией дифференцирования. Непосредственный расчет установившегося периодического процесса достигается тем, что начальные условия для токов и их производных в начале периода берутся как значения этих же функций в конце периода. В предложенном методе интегро-дифференциальные уравнения состояния преобразуются в линейные алгебраические уравнения. Предложена методика составления единой системы линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы позволяет непосредственно выполнять расчет установившихся периодических процессов.*

Практическая ценность. *Разработанный метод открывает новую возможность использования многообразного аппарата теории электрических цепей для работы с изображениями токов. На основании этого метода разрабатывается универсальный программный комплекс для расчета установившихся периодических процессов в электрических цепях произвольной сложности. Это позволит сократить процессорное время моделирования сложных цепей.*

Ключевые слова: установившийся процесс; численные методы; схемная модель; полиномиальная аппроксимация; полиномы Чебышева

I. ВВЕДЕНИЕ

В конструкторской практике возникает потребность расчета установившихся периодических процессов. Известно [1], что установившийся процесс – это часть переходного процесса, рассматриваемая при полном затухании свободной составляющей. Теоретически полное затухание переходного процесса наступает при текущем времени t→∞ (практически t>3-х постоянных времени переходного процесса). Исходя из этого, установившийся процесс может быть получен численным методом [2], [3] путем расчета переходного процесса до его полного затухания. Переходные процессы в электротехнических устройствах могут быть длительными. При медленно затухающих переходных процессах этот способ требует значительного времени расчета, что может привести к большой накапливаемой ошибке.

II. АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

В литературе широко известен метод расчета установившихся несинусоидальных процессов в электрических цепях, основанный на разложении несинусоидальных функций ЭДС в тригонометрический ряд Фурье. Расчет выполняется последовательно для всех гармоник ЭДС комплексным (символическим) методом и, затем, используется принцип наложения [1] для получения результирующих кривых. В этом случае несинусоидальные токи и напряжения выражаются суммами тригонометрических рядов [4]. Метод

DOI 10.15588/1607-6761-2020-2-3

требует использования значительного числа гармоник, что не гарантирует от значительной погрешности расчета.

Расчету установившегося периодического режима в автономных [5] и неавтономных системах, минуя переходный процесс, посвящено значительное число работ, например, [6], [7].

В системах, когда период колебаний определяется периодом ЭДС источников, решение для установившегося режима может быть получено просто.

В работе [8] период моделирования разбивался на N участков. Каждый участок рассматривался как шаг интегрирования какого-то численного метода расчета дифференциальных уравнений. Уравнения состояния записывались для каждого шага. На каждом шаге начальные условия использовались как результаты расчета на предыдущем шаге. На первом шаге начальные условия использовались как результаты расчета на последнем шаге. Метод отличается простотой, но требует значительной оперативной памяти компьютера даже для не очень сложных цепей.

В работе [9] решение представлено в виде разложения в ряд по алгебраическим полиномам. Период T разбивается на n равных шагов и для каждой точки разбиения составляется уравнение состояния цепи. В результате получается система алгебраических уравнений, для которой записывается условие периодичности. Условие периодичности заключается в том, что начальные условия приравниваются к условиям в конце периода. Решение системы дает коэффициенты полинома, по которым определяется ток в любой момент времени в течение периода. Данный метод использован для одного уравнения состояния одноконтурной цепи, но может быть развит для сложных цепей.

В работе [10] показано развитие и модификация численного метода В.Ю. Ломоносова, использующего аппроксимацию решения алгебраическими полиномами, для расчета установившихся периодических несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях. Производную решения предложено аппроксимировать полиномом $p(t)$ $(N\text{-}1)$-ой степени. Интервал изменения аргумента разбивается на $N\text{-}1$ отрезков точками $t_1, t_2, \ldots t_N$. Для аппроксимирующего полинома задается дополнительное условие такое, чтобы в точках t_k деления интервала изменения аргумента выполнялось равенство:

$$i'(t_k) = p(t_k),$$

где $k = 1, 2, \ldots, N$ – номера опорных точек.

В результате этого получается система из $3N$ уравнений с количеством неизвестных, равным $3N$. При увеличении N до 45 погрешность расчета уменьшается, однако при N> 45 погрешность начинает возрастать. Это связано с потерей точности аппроксимации решения полиномами высокого порядка. Установлено, что если ЭДС источника содержит гармоники выше третьей, то приемлемой погрешности нельзя добиться ни при каких значениях N. Таким образом, востребованными практикой является разработка усовершенствованного компьютерного метода расчета установившихся периодических процессов сложной формы.

III. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является модификация разработанного метода расчета переходных процессов в электрических цепях [11] таким образом, чтобы сразу непосредственно выполнялся расчет установившихся процессов. При этом необходимо сократить процессорное время расчета и повысить точность расчета.

IV. ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для простоты изложения, также как и в работе [11], рассмотрим сначала одноконтурную электрическую цепь, содержащую включенные последовательно элементы: резистивный (R), индуктивный (L) и емкостный (C) (рис. 1).

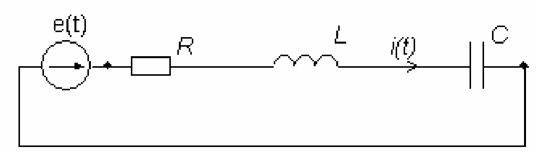

Рисунок 1. Моделируемая электрическая цепь

Интегро-дифференциальное уравнение состояния цепи $R\text{-}L\text{-}C\text{-}e$ имеет вид [1]:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + u_C(t_0) = e(t)\cdot \qquad (1)$$

Функцию для производной тока по времени аппроксимируем полиномом $p(x)$ $N\text{-}1$-ой степени [12], [13]:

$$\frac{di(x)}{dt} = i'(x) \approx p(x) = c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + + c_2T_2(x) + \cdots c_{N-1}T_{N-1}(x) \qquad (2)$$

Временной интервал моделирования $[a,b]$ выберем равным периоду ЭДС источника. Выберем в интервале моделирования $t \in [a,b]$ ряд N узловых точек. Положим, что для всех N узловых точек со значением аргумента t_m (x_m) соответствуют следующие значения функции [11]

$$i'(x_m) = p(x_m) \quad ,$$

$m = 0, 1, 2, \div N\text{-}1.$

Вычисление матриц **V, D, W** выполняется с помощью подпрограммы VDW по формулам [11] ф. (25,10,44). Эти матрицы фигурируют в уравнении второго закона Кирхгофа для изображений токов в цепи замещения:

$$\begin{aligned}&(L\cdot \boldsymbol{D}+R\cdot V+B\cdot \boldsymbol{W})\cdot \boldsymbol{C}=\\&=\boldsymbol{e}-R\cdot \boldsymbol{\Delta}\cdot \boldsymbol{I}_0{}'-R\cdot \boldsymbol{I}_0-L\cdot \boldsymbol{I}_0'-B\boldsymbol{Q}-u_{c0}\end{aligned} \quad (3)$$

В цепи замещения протекает не истинный ток, а проходит его изображение **C**. Изображение **C** – это вектор коэффициентов разложения тока *i(t)* по полиномам Чебышева. Вектор **I** значений тока *i(t)* в узловых точках определяется уравнением [11] ф. (25):

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{\Delta}\cdot \boldsymbol{T}_{x0}))\cdot \boldsymbol{C}+\Delta\cdot \boldsymbol{I}_0^{'}+\boldsymbol{I}_0=\\&=\boldsymbol{V}\cdot \boldsymbol{C}+\boldsymbol{\Delta}\cdot \boldsymbol{I}_0^{'}+\boldsymbol{I}_0\end{aligned} \quad (4)$$

Этот вектор задает значения тока *i(t)* в заданных узловых точках в течение переходного процесса. Для его однозначного определения необходимо иметь значения тока и его производной в начальной точке. В уравнении (4) начальные значения – это векторы $\mathbf{I}_0$ и $\mathbf{I}_0^{'}$. Вектор $\mathbf{I}_0$ содержит все элементы, имеющие одинаковые значения, равные $i(t_0)$. Вектор $\mathbf{I}_0^{'}$ содержит все элементы, имеющие одинаковые значения, равные $i^{'}(t_0)$.

Чтобы уравнение (3) описывало не переходный процесс в электрической цепи, а установившийся процесс, необходимо, чтобы начальные значения тока и его производной были равны значениям тока и его производной в конце периода.

В уравнении (3) также фигурируют значения векторов **Q**, $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_0^{'}$ и значение u_{C0}, которые вычисляются при использовании значений $i(t_0)$, $i^{'}(t_0)$, u_{C0}. Эти значения необходимо получить исходя из значений соответствующих функций в конце периода.

В работе [11] расчет переходного процесса по предложенному методу заключается в выполнении пунктов:

- Определение чебышевских узлов интерполяции на $x \in[-1,1]$:

$$x_k=-cos\left[\frac{2k+1}{2N}\pi\right], \quad \kappa=0,\ 1, \div N-1.$$

- Формирование матриц **V, D, W**.
- Вычисление функций:

$$J_4(x)=i_0'\cdot(x^2/2+x_0\cdot x);$$

$$J_5(x)=i_0\cdot x$$

для чего используются начальные значения тока i_0 и производной тока i'_0.

- Вычисление функции

$$q(x)=J_4(x)+J_5(x),$$

которая используется для формирования матрицы **Q**.

Чтобы уравнение (3) описывало установившийся процесс, необходимо, чтобы начальные значения тока и его производной были равны этим же значениям в конце периода. При этом векторы **C, I , I', $\mathbf{U}_c$** должны вычисляться одним математическим действием. Этим же действием необходимо вычислять значения векторов: $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I_0'}$, $\mathbf{U}_{c0}$. В этих векторах все значения равны значениям последних элементов векторов **I** , **I'** , $\mathbf{U_c}$.

Покажем, как это выполнить одним действием.

Пусть дана матрица-столбец, содержащая всего три значения:

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}. \quad (5)$$

Требуется получить матрицу-столбец $\mathbf{I_0}$, все элементы которой были бы равны **I**(3). Это можно выполнить решением следующего уравнения:

$$\boldsymbol{M}\cdot \boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}, \quad (6)$$

где

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I_0}\\ \boldsymbol{i_0}\end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{Nul} & \mathbf{s_0}\\ \mathbf{Nul} & \mathbf{E} & -\mathbf{E}_2\\ \mathbf{N_1} & \mathbf{N_0} & \mathbf{-1}\end{bmatrix}; \quad (8)$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$\boldsymbol{Nul}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$\boldsymbol{N}_0=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$\boldsymbol{N}_1=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$\boldsymbol{s}_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \quad (15)$$

Решение уравнения

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{M}^{-1}\cdot \boldsymbol{F} \quad (16)$$

дает вектор **X** размера (7*1). Первые три значения вектора **X** содержат значения вектора **I**. Последующие три значения вектора **X** содержат значение **I**(3): то есть:

$$\boldsymbol{I_0} = \boldsymbol{X}(4:6).$$

Этот прием используем для формирования единой системы уравнений для решения задачи (1). Эту систему можно свести в матричную форму.

Систему составим из следующих уравнений.

Уравнение (3) после переноса всех слагаемых в левую часть имеет вид:

$$\boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{C} - \boldsymbol{U} + R \cdot \boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{I}_0' + R \cdot I_0 + L \cdot \boldsymbol{I}_0' + B\boldsymbol{Q} + u_{c0} = 0, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{Z} = L \cdot \boldsymbol{D} + R \cdot \boldsymbol{V} + B \cdot \boldsymbol{W}. \quad (18)$$

Уравнение (4) после переноса всех слагаемых в левую часть:

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{C} - \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{I}_0' + \boldsymbol{I}_0 = 0. \quad (19)$$

Уравнение [11] ф. (44) после переноса всех слагаемых в левую часть имеет вид:

$$B[\boldsymbol{WC} + \boldsymbol{Q}] - \boldsymbol{U}_C + u_{c0} = 0. \quad (20)$$

Используя [11] ф. (40) запишем:

$$q(x) = J_4(x) + J_5(x) = i_0' \cdot (x^2/2 + x_0 \cdot x) + i_0 \cdot x. \quad (21)$$

В уравнении (17) фигурирует матричная переменная, которая имеет вид:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_0' \cdot ((x^2/2 + x_0 \cdot x) - (x_0^2/2 + x_0 \cdot x_0)) + \boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{I}_0,$$

или

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_0' \cdot \boldsymbol{\Delta}_2 + \boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{I}_0, \quad (22)$$

где

$$\boldsymbol{\Delta}_2 = (x_2 - x_{20}). \quad (23)$$

С учетом принятых обозначений уравнение (17) примет вид:

$$\boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{C} - \boldsymbol{U} + \boldsymbol{Z}_0 \cdot \boldsymbol{I}_0' + (B \cdot \boldsymbol{\Delta} + R) \cdot \boldsymbol{I}_0 + \boldsymbol{U}_{c0} = 0, \quad (24)$$

где

$$\boldsymbol{Z}_0 = R \cdot \boldsymbol{\Delta} + L + B \cdot \boldsymbol{\Delta}_2. \quad (25)$$

С учетом принятых обозначений уравнение (20) примет вид:

$$B\boldsymbol{WC} + B\boldsymbol{\Delta I}_0 + B\boldsymbol{\Delta}_2\boldsymbol{I}_0' - \boldsymbol{U}_C + \boldsymbol{U}_{c0} = 0. \quad (26)$$

Обозначим **X** – вектор, состоящий из восьми подвекторов, имеющих размер (*N*-1)* 1, и подвектора размера (3*1), содержащего три скалярных значения:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}' & \boldsymbol{Uc} & \boldsymbol{I_0} & \boldsymbol{I_0}' & \boldsymbol{Uc_0} & \boldsymbol{U} & i_0 & i_0' & uc_0 \end{bmatrix}^T, \quad (27)$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{bmatrix}; \quad (28)$$

I, I′ - векторы значений тока и его производной в узловых точках в уравнениях (17, 19).

$$\boldsymbol{Uc} = \begin{bmatrix} uc_1 \\ uc_2 \\ \vdots \\ uc_{N-1} \end{bmatrix}; \quad (29)$$

$$\boldsymbol{I}_0 = \begin{bmatrix} i_0 \\ i_0 \\ \vdots \\ i_0 \end{bmatrix}; \quad (30)$$

$$\boldsymbol{I}_0' = \begin{bmatrix} i_0' \\ i_0' \\ \vdots \\ i_0' \end{bmatrix}; \quad (31)$$

$$\boldsymbol{Uc}_0 = \begin{bmatrix} uc_0 \\ uc_0 \\ \vdots \\ uc_0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Вектор **U** содержит значения напряжения всей ветви в узловых точках:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Уравнения (24), (19), (26), (2.38-2.40) составят первые четыре строки матрицы $\mathbf{M}_0$. Последние три строки носят вспомогательный характер, как в матрице (7). Последние три скалярных элемента вектора **X** также носят вспомогательный характер, как в матрице (7).

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}' & \boldsymbol{Uc} & \boldsymbol{I_0} & \boldsymbol{I_0}' & \boldsymbol{Uc_0} & \boldsymbol{U} & i_0 & i_0' & uc_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & B \cdot \boldsymbol{d} + R & \boldsymbol{Z_0} & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} \\ \boldsymbol{V} & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} \\ B \cdot \boldsymbol{W} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{E} & B \cdot \boldsymbol{\Delta} & B \cdot \boldsymbol{\Delta_2} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{E_2} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s_0} & -\boldsymbol{E_2} & \boldsymbol{s_0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} & -\boldsymbol{E_2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

(Жирными нулями обозначены нулевые матрицы размера (*N-1)* (N-1))*.

Присоединим к матрице (34) вспомогательную матрицу (35).

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} N_0 & N_1 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 \\ N_0 & N_0 & N_1 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 \\ N_0 & N_0 & N_0 & N_1 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 & N_0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

В результате получим матрицу:

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix} \boldsymbol{M_0} \\ \hline \boldsymbol{S} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Матрица $\mathbf{M}_1$ имеет размер (N-1)*7+3, а вектор $\mathbf{X}$ имеет размер (N-1)*8+3.

Чтобы уравнение $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}$ имело единственное решение, к матрице $\mathbf{M_1}$ необходимо присоединить подматрицу:

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

В результате получим матрицу:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{M_0} \\ \hline \boldsymbol{S} \\ \hline \boldsymbol{U} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Подматрица $\mathbf{U}$ соответствует уравнению

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{e}, \quad (39)$$

где $\mathbf{e}$ – вектор значений ЭДС источника в узловых точках.

В результате уравнение

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{F}$$

имеет единственное решение – вектор $\mathbf{X}$ (4.21).

Вектор $\mathbf{X}$ содержит подвекторы размера (N-1)*1 значений коэффициентов полинома $\mathbf{C}$, значений тока и его производной в узловых **точках** $\mathbf{I}$, $\mathbf{I'}$, значений напряжения на конденсаторе в узловых точках $\mathbf{U}$c.

Пример расчета установившегося процесса в сложной электрической цепи на основе разработанного метода. Пусть задана электрическая цепь (рис.2).

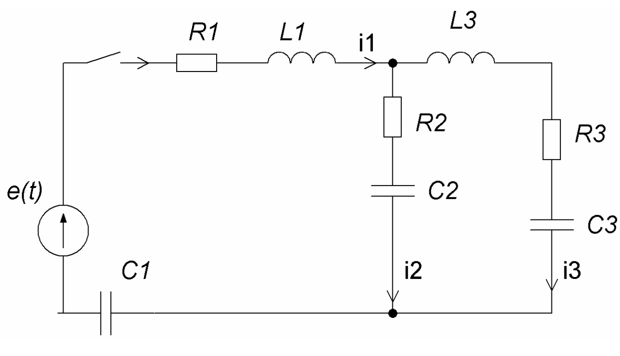

Рисунок 2. Моделируемая двухконтурная электрическая цепь

Порядок расчета можно формализовать следующей последовательностью действий:

1. Задание исходных данных. ∈Значения элементов каждой ветви:

L1=0.01; R1=1; C1=0.0001; L2=0.001; R2=2; C2=0.0002; L3=0.006; R3=3; C3=0.0003,

значение периода T =0.02, функция ЭДС источника на одном периоде, состоящая из двух гармоник:

$$e(t)=E_m\sin(2\pi f+\varphi_1)+E_m\sin(2\pi f\cdot 5+\varphi_5),$$

где $E_m=100; f=50; \varphi_1=0; \varphi_5=0$,

количество узловых точек $N=120$.

2. Определение чебышевских узлов интерполяции на $x\in[-1,1]$.
3. Вычисление матриц $\mathbf{V}$,$\mathbf{D}$,$\mathbf{W}$ с помощью подпрограммы VDW [11].
4. Вычисление значений ЭДС источника в узловых точках - вектор $\mathbf{e}$.
5. На основе подпрограммы MatrM формирование матриц $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ … $\mathbf{M}_b$ для каждой ветви *1…b*.
6. Формирование матрицы $\mathbf{M}$.
7. Запись в матричной форме уравнений второго закона Кирхгофа. В цепи имеется два независимых контура. Согласно (37) напряжение одной ветви равно:

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} & \boldsymbol{s_0} \end{bmatrix}.$$

Сумма напряжений 1 и 2-й ветвей равна:

$$\mathbf{U_{12}=[U,U,M_R];}$$

Сумма напряжений 2-й и 3-й ветвей равна:

$$\mathbf{U_{23}=[M_R,-U,U],}$$

где $\mathbf{M_R=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ s_0\ s_0\ s_0]}$ **–** рабочая матрица.

8. Запись уравнений первого закона Кирхгофа. Значения в узловых точках тока одной ветви, а также его производная определяются подматрицей:

$$\mathbf{M_C=[E\ E\ E\ E\ E\ \ E\ E\ 0\ s_0\ s_0\ s_0];}$$

В цепи имеется два узла. Независимый только один узел. Для него уравнение имеет вид:

$$\mathbf{C_1=[-M_C,M_C,M_C].}$$

9. Присоединение матриц, полученных на основании законов Кирхгофа, к матрице **М:**

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{123} \\ \hline \mathbf{U_{12}} \\ \hline \mathbf{U_{23}} \\ \hline \mathbf{C}_1 \end{bmatrix}$$

10. Формирование вектора правых частей $\mathbf{F}$.

Правые части уравнений, соответствующих матрице М имеют нулевые значения; следующие N-1 значений – это вектор е, то есть сумма напряжений первой и второй ветвей равна ЭДС. ; следующие N-1 значений - нулевые, то есть сумма напряжений второй и третьей ветвей равна нулю. Согласно первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма токов в узле равна нулю. Таким образом, следующие *N-1* значений –

нулевые.

11. Решение уравнения

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}.$$

12. Построение графиков $i_1(t)$, $i_2(t)$…

Вектор значений тока i_1 в узловых точках определяется как:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{X}(N{:}2*N\text{-}2).$$

На основании изложенного порядка действий разработана компьютерная программа в системе GNU Octave [14], совместимой с системой Matlab [15]. Матрица **M** имеет значительные размеры, но она является разреженной. В системе Matlab есть аппарат работы с разреженными матрицами - sparse [16]. Использование этого аппарата снимает проблему использования больших матриц.

Зависимость тока $i_1(t)$ приведена на рис. 3. Расчет установившегося процесса точным комплексным методом, согласно условиям этой задачи, дает кривую, которая имеет хорошее совпадение с кривой, показанной на рис. 3. Это значит, что в точках локальных экстремумов погрешность расчета предложенным методом составляет меньше одного процента.

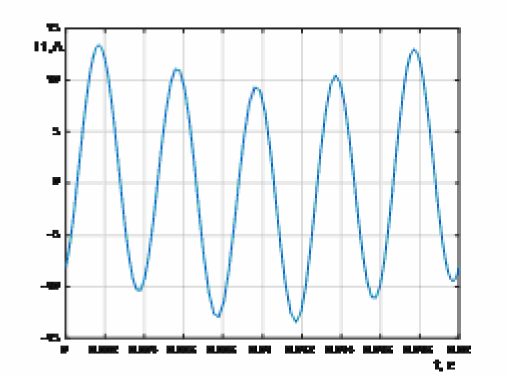

Рисунок 3. Зависимость тока i1(t)

V. ВЫВОДЫ

Разработанный метод позволяет выполнять расчет установившегося периодического электрического процесса сложной формы, минуя переходный процесс. При этом сокращается процессорное время расчета и повышается его точность по сравнению с использованием известных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т2 / К.С. Демирчян , Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – Питер, 2003. – 567 с.

[2] Ортега Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пулл . – М.: Наука, 1986. – 288 с.

[3] Сегеда М.С. Математичне моделювання в електроенергетиці / М.С. Сегеда. –Львів: «Львівська політехніка» , 2002. – 300 с.

[4] Зиґмунд А. Тригонометрические ряды. Т 2. / А. Зиґмунд. – М.: Мир . – 1965. –538 с.

[5] Aprille T.J. Steady state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs / T.J. Aprille , T.N. Trick // IEEE Trans. Circuit Theory. – 1972. – Vol. 60, №1. – P. 108-114.

[6] Маляр В.С. Розрахунок усталених режимів у нелінійних електричних колах з реактивними елементами і несинусоїдними джерелами живлення / В. С. Маляр, І. А. Добушовська // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Електроенергетичні та електромеханічні системи. – 2011. – № 707. — С. 82-86.

[7] Маляр В.С. Розрахунок статичних характеристик періодичних процесів диференціальним сплайн-методом / В.С. Маляр // Теоретична електротехніка. – 2000. –№55. – С. 37-42.

[8] Тиховод С.М. Метод расчета установившихся и переходных процессов в сложных нелинейных цепях / С.М. Тиховод // Электротехника и электроэнергетика . – 2001 . – № 2 . – С. 5-9.

[9] Тиховод С.М. Совершенствование методики расчета установившихся процессов в электрических цепях переменного тока / С.М. Тиховод // Електротехніка та електроенергетика . −2007 .− № 2. − С. 29-33.

[10] Ломоносов В.Ю. Периодические процессы в нелинейных цепях / В.Ю. Ломоносов // Электричество. – 1952. – №7. – С. 55-58.

[11] Паталах Д.Г. Модификация метода численного расчета переходных процессов в электрических цепях на основе полиномов Чебышева / Д.Г. Паталах // Електротехніка та електроенергетика. – 2019. – № 4. – С. 11-24.

[12] Васильев Н.И. Применение полиномов Чебышева в численном анализе / Н.И. Васильев, Ю.А. Клоков, А.Я. Шкерстена.– Рига.:Зинатне, 1984.– 240 с.

[13] Данилов Ю.А. Многочлены Чебышева / Ю.А. Данилов.– Минск.: Вышэйшая школа, 1984 .– 157 с.

[14] GNU Octave [Электронный ресурс]. – режим доступа:http://www.gnu.org/software/octave/index.html . – заголовок с экрана . – Язык англ.

[15] Ануфриев И.Е., MATLAB 7 / И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.

[16] Тьюарссон Р. Разреженные матрицы / Р. Тьюарссон.– М.: Мир, 1977. – 172 с.

Стаття надійшла до редакції 26.05.2020

МЕТОД РОЗРАХУНКУ УСТАЛЕНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

ПАТАЛАХ Д.Г. *Аспірант Національного університету «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, e-mail: patalakh.dmytro@gmail.com;*

ТИХОВОД С. М. *д-р техн. наук, доцент, завідувач кафедри теоретичної та загальної електротехніки Запорізького національного технічного університету, Запоріжжя, Україна, e-mail: stikhovod@gmail.com.;*

Мета роботи. *Розробка методу розрахунку усталених періодичних процесів складної форми.*

Методи дослідження. *Використана поліноміальна апроксимація функцій, числові методи розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь, математичний апарат матричної алгебри, комп'ютерне програмування і методи теорії електричних кіл.*

Отримані результати. *В результаті модифікації відомого методу розрахунку перехідних процесів розроблений метод, який дозволяє безпосередньо виконувати розрахунок усталених періодичних процесів. Це дозволить скоротити час комп'ютерного моделювання усталених електричних процесів в лінійних електричних колах. Показаний приклад застосування запропонованого методу. На підставі розробленого методу складена комп'ютерна програма для розрахунку усталеного процесу в модельному колі. Даний приклад показав скорочення процесорного часу на 45% в порівнянні з застосуванням відомих методів.*

Наукова новизна. *Процеси в електричних колах описуються інтегро-диференціальними рівняннями. При їх вирішенні використана апроксимація функцій похідних струмів від часу рядами по ортогональних поліномах Чебишова. При апроксимації функцій поліноми Чебишова мають рівномірність похибки в усьому діапазоні зміни аргументу. Це вигідно виділяє їх з ряду інших ортогональних функцій. У запропонованому методі використана поліноміальна апроксимація не самій функції рішення, а її похідної. Сама функція знаходиться операцією інтегрування. Ця операція має малу похибку в порівнянні з операцією диференціювання. Безпосередній розрахунок усталеного періодичного процесу досягається тим, що початкові умови для струмів і їх похідних на початку періоду беруться як значення цих же функцій в кінці періоду. У запропонованому методі інтегро-диференціальні рівняння стану перетворюються в лінійні алгебраїчні рівняння. Запропоновано методику складання єдиної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Вирішення цієї системи дозволяє безпосередньо виконувати розрахунок усталених періодичних процесів.*

Практична цінність. *Розроблений метод відкриває нову можливість використання різноманітного апарату теорії електричних кіл для роботи з зображеннями струмів. На підставі цього методу розробляється універсальний програмний комплекс для розрахунку усталених періодичних процесів в електричних колах довільної складності. Це дозволить скоротити процесорний час моделювання складних кіл.*

Ключові слова: *усталений процес; числові методи; схемна модель; поліноміальна апроксимація; поліноми Чебишова.*

METHOD OF CALCULATION OF STEADY-STATE PROCESSES IN ELECTRICAL CIRCUITS

PATALAKH D. *Postgraduate student of National University "Zaporizka politekhnika", Zaporizhzhia , Ukraine, e-mail: patalakh.dmytro@gmail.com;*

TYKHOVOD S. *Doctor technical sciences, Assoc. Prof., Chief of the department of the Theoretical and general electronics, National University "Zaporizka politekhnika", Ukraine, e-mail: stikhovod@gmail.com*

Purpose. *Development of a method for calculating established periodic processes of complex shape*

Methodology. *Polynomial approximation of functions, numerical methods for solving integro-differential equations, mathematical apparatus of matrix algebra, computer programming and methods of electric circuit theory are used.*

Findings. *As a result of modification of the known method for calculating transient processes, a method has been developed that allows you to directly perform the calculation of steady-state periodic processes. This will reduce the time of computer simulation of electrical processes in linear electrical circuits. An example of using the proposed* *method is shown. Based on the developed method, a computer program for calculating the steady-state process in the model circuit is worked out. This example shows a 45% reduction in CPU time compared to the use of known methods.*

Originality. *Processes in electrical circuits are described by integro-differential equations. The approximation of functions of current derivatives to time by series on orthogonal Tchebyshev's polynomials is used in their solution.When approximating functions, Chebyshev polynomials have uniform error in the whole range of argument change. It is advantageous stand out them from a number of other orthogonal functions. The proposed method uses a polynomial approximation not of the solution function itself, but of its derivative. The function itself is obtained with the help of integration operation. This operation has a small margin of error compared to the differentiation operation. The direct calculation of the steady-state periodic process is achieved by taking the initial conditions for currents and their derivatives at the beginning of the period as the values of the same functions at the end of the period. In the proposed method, integro-differential equations of state are transformed into linear algebraic equations. A method for creating a unified system of linear algebraic equations is proposed. The solution of this system allows you to perform directly the calculation of steady-state periodic processes.*

Practical value *The developed method opens a new possibility of using a diverse apparatus of the electric circuits theory to work with images of currents. Based on this method, a universal software package is developed for calculating steady-state periodic processes in electrical circuits of arbitrary complexity. This will reduce the CPU time for modeling complex circuits.*

Keywords: steady-state process, numerical methods, circuit model, polynomial approximation, Tchebyshev's polynomial.

REFERENCES

[1] Demirchyan, K.S., Nejman, L.R., Korovkin, N.V., Chechurin, V.L. (2003). *Teoreticheskie osnovy` e`lektrotekhniki*. Vol. 2, Piter, 567.

[2] Ortega, Dzh. (1986). Vvedenie v chislenny`e metody` resheniya differenczial`ny`kh uravnenij. Moscow, Nauka, 288.

[3] Segeda, M.S. (2002). Matematichne modelyuvannya v elektroenergeticzi. L`vi`v: L`vi`vs`ka poli`tekhni`ka, 300.

[4] Zig`mund, A. (1965). *Trigonometricheskie ryady`*. Vol. 2. Moscow, Mir, 538.

[5] Aprille, T.J., Trisk, T.N. (1972). Steady state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs. *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. 60, No 1, 108-114.

[6] Malyar, V.S., Dobushovs`ka, I`.A. (2011) Rozrakhunok ustalenikh rezhimi`v u nelinijnikh elektrichnikh kolakh z reaktivnimi elementami i` nesinusoyidnimi dzherelami zhivlennya. *Vi`snik Naczi`onal`nogo universitetu "L`vi`vs`ka poli`tekhni`ka", Elektroenergetichni` ta elektromekhani`chni` sistemi.* No 707, 82-86.

[7] Malyar V.S., (2000). Rozrakhunok statichnikh kharakteristik peri`odichnikh proczesi`v diferenczi`al`nim splajn-metodom. *Teoretichna elektrotekhni`ka*, No 55, 37-42.

[8] Tikhovod, S.M., (2001). Metod rascheta ustanovivshikhsya i perekhodny`kh proczessov v slozhny`kh nelinejny`kh czepyakh. *E`lektrotekhnika i e`lektroe`nergetika*, No 2, 5-9.

[9] Tikhovod, S.M. (2007). Sovershenstvovanie metodiki rascheta ustanovivshikhsya proczessov v e`lektricheskikh czepyakh peremennogo toka. *Elektrotekhni`ka ta elektroenergetika,* Vol. 2, 29-33.

[10] Lomonosov, V.Yu., (1952). Periodicheskie proczessy` v ne-linejny`kh czepyakh. *E`lektrichestvo.* Vol. 7, 55-58.

[11] Patalakh, D.G., (2019). Modifikacziya metoda chislennogo rascheta perekhodny`kh proczessov v e`lektricheskikh czepyakh na osnove polinomov Cheby`sheva. *Elektrotekhni`ka ta elektroenergetika,* Vol. 4, 11-24.

[12] Vasil`ev, N.I., Klokov, Yu.A., Shkerstena, A.Ya., (1984). Primenenie polinomov Cheby`sheva v chislennom analize. Riga, Zinatne, 240.

[13] Danilov, Yu.A., (1984). Mnogochleny` Cheby`sheva. Minsk, Vy`she`jshaya shkola, 157.

[14] GNU Octave [E`lektronny`j resurs]. – rezhim dostupa:http://www.gnu.org/software/octave/index.html .– zagolovok s e`krana . – Yazy`k angl.

[15] Anufriev, I.E., Smirnov, A.B., Smirnova, E.N., (2005). MATLAB 7. BKhV-Peterburg, 1104.

[16] T`yuarsson, R. (1977). Razrezhenny`e matriczy`. Moscow, Mir, 172 s.