

УДК.621.313

ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ КОРИГУВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ

САВЧЕНКО О.В. завідувач лабораторіями кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9718-7857>, e-mail: savchenko1984@gmail.com;

ШАРЕЙКО Д.Ю. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6460-9331>, e-mail: dshareyko.mk@gmail.com;

БІЛЮК І.С. канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1654-7468>, e-mail: ivanbilyuk@gmail.com;

МАРДЗЯВКО В.А. асистент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Миколаївського національного аграрного університету, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-9215>, e-mail: vitalijmardzavko@gmail.com ;

Мета роботи. Метою даної роботи є дослідження нелінійного коригувального пристрою для системи автоматичного керування електроприводом постійного струму, який забезпечує наближення до оптимального режиму роботи за критерієм швидкодії та точності, з одночасним визначенням умов стійкості й меж працездатності системи.

Методи дослідження. У роботі застосовано математичне моделювання, теорію оптимального керування на основі принципу мінімаксу, метод гармонічної лінеаризації для аналізу стійкості, а також чисельні методи для визначення оптимальних параметрів фазовипереджувальної ланки. Використано структурні схеми електроприводів постійного струму та моделі з релейними характеристиками, що дозволило дослідити вплив нелінійної корекції на динамічні властивості системи.

Отримані результати. У процесі дослідження побудовано структурну схему електропривода постійного струму з нелінійним регулятором, що включає фазовипереджувальну ланку та релейні елементи. Запропоновано методику апроксимації оптимального закону керування за принципом мінімаксу, що забезпечує мінімізацію відхилення від оптимального режиму у широкому діапазоні амплітуд вхідних впливів. Встановлено залежності між параметрами фазовипереджувальної ланки та величиною відхилення системної похибки, що дозволило сформулювати критерії вибору її часових сталих. Отримано аналітичні вирази для оцінки моменту перемикання сигналу, побудовано нормовані співвідношення між амплітудою та часом перемикання, які визначають якість процесу регулювання. Показано, що запропонований нелінійний коректор дозволяє скоротити час перехідного процесу та зменшити величину похибки без істотного збільшення перерегулювання. Проведений аналіз стійкості системи із застосуванням методу гармонічної лінеаризації дав змогу визначити критичні значення коефіцієнтів підсилення та частот автоколивань. Встановлено, що наявність нелінійного коректора суттєво впливає на динамічні характеристики і водночас звужує межі стійкості. Побудовані графіки критичного коефіцієнта підсилення та частоти автоколивань залежно від параметра нелінійної ланки дозволили чітко визначити області стійкої та нестійкої роботи електропривода постійного струму. Таким чином, результати підтверджують, що використання нелінійного коригувального пристрою забезпечує підвищення швидкодії системи та зменшення похибки, але потребує врахування компромісу між якістю регулювання та запасом стійкості.

Наукова новизна. У роботі обґрунтовано новий підхід до синтезу систем керування електроприводами постійного струму на основі нелінійної динамічної корекції. Запропоновано застосування принципу мінімаксу для апроксимації оптимального закону керування та показано його ефективність у широкому діапазоні вхідних впливів. Вперше проведено комплексний аналіз взаємозв'язку між параметрами нелінійної ланки та межами стійкості системи.

Практична цінність. Результати роботи можуть бути використані при проектуванні електроприводів, які працюють у режимах із високими вимогами до швидкодії та точності регулювання. Запропоновані підходи сприяють створенню більш ефективних алгоритмів керування, що враховують компроміс між швидкодією, точністю та стійкістю системи.

Ключові слова: електропривод, двигун постійного струму, система автоматичного керування, неліній-

ний коригувальний пристрій, оптимальне керування, фазовипереджувальна ланка, стійкість, мінімакс.

I. ВСТУП

Підходи до аналізу й синтезу нелінійних систем суттєво відрізняються від методів, що застосовуються для лінійних систем. Найбільш помітно це проявляється у питанні визначення стійкості. Для лінійних систем стійкість залежить виключно від їхніх внутрішніх характеристик, тоді як у нелінійних - вона визначається значно ширше, враховуючи не лише внутрішні властивості, але й зовнішні впливи.

Нелінійні системи можуть мати кілька станів рівноваги, різні форми стійкості - як у цілому, так і в малому, включаючи абсолютну стійкість. Характерною особливістю таких систем є явище автоколивань та питання їх стійкості. Аналіз і синтез у цій галузі базується на складному математичному апараті, а значна частина задач розв'язується лише чисельними методами, які часто дають лише наближені результати. Незважаючи на це, інтерес дослідників до нелінійних систем постійно зростає.

У лінійних системах усі показники якості керування тісно пов'язані між собою: наприклад, підвищення швидкодії неминуче призводить до зростання перегулювання на перехідній характеристиці. Це означає, що покращення одних параметрів завжди пов'язане з погіршенням стійкості. Основні принципи аналізу та синтезу лінійних систем спираються на два твердження: будь-яка система автоматичного керування діє як фільтр, а будь-яка координата може бути представлена рядом Фур'є. Це пояснюється тим, що гармонійний сигнал, проходячи через таку систему, зберігає свою форму, змінюючись лише за амплітудою та фазою. У випадку нелінійних систем ситуація зовсім інша: вони спотворюють форму сигналу, тому принцип суперпозиції тут не працює. Ця особливість відкриває нові можливості: у нелінійних системах можна одночасно покращувати кілька показників якості керування або вдосконалювати один параметр без істотного погіршення інших. Наприклад, підвищення швидкодії може відбутися без істотного збільшення перегулювання, а якщо й відбудеться його зростання, то воно буде значно меншим, ніж у лінійних системах.

Таким чином, виникає потреба у поглибленому дослідженні процесів, що відбуваються в автоматичних системах керування з нелінійними коректувальними пристроями. Особливо актуальними залишаються завдання оптимізації таких систем, визначення їхньої стійкості та умов виникнення автоколивань.

II. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Основним завданням під час проектування систем автоматичного керування є раціональний вибір їхньої структурної схеми, параметрів елементів, способів технічної реалізації, а також урахування експлуатаційних вимог, пов'язаних із масогабаритними характеристиками та енергоспоживанням. Водночас велика кількість

задач, що розв'язуються за допомогою нелінійних коректувальних пристроїв, а також різноманітність методів їх синтезу й технічного виконання, значно ускладнюють вибір конкретного варіанта схеми.

Попри це, у деяких випадках можна виділити певні ознаки, що дозволяють класифікувати різні схеми. Насамперед важливо визначити, чи була система лінійною до введення в неї нелінійного коректора, а також яке функціональне призначення має цей коректувальний пристрій. Залежно від завдань, які він вирішує, виділяють кілька основних груп:

- 1) пристрої, що забезпечують покращення перехідних процесів;
- 2) пристрої, орієнтовані на оптимізацію системи за певним критерієм;
- 3) пристрої, які надають системі інваріантні властивості щодо зовнішніх збурень чи змін параметрів;
- 4) пристрої, що реалізують необхідні конструктивні або експлуатаційні характеристики.

Більшість сучасних досліджень [1], [2] зосереджена на вивченні нелінійних властивостей окремих елементів систем автоматичного керування та їх впливі на статичні характеристики. Інші роботи [3]–[6] орієнтовані на дослідження нелінійних властивостей самих об'єктів керування. Однак питання стійкості нерідко залишаються поза увагою авторів: зазвичай розглядається лише стійкість лінійної частини системи, що не відображає повної картини. Водночас саме аналіз стійкості в умовах нелінійності є ключовим аспектом, особливо для практичного застосування.

У статтях [5], [6] розглянуто використання нелінійних динамічних перемикаючих коректувальних сигналів, що дозволяють отримати нові результати. Їх фізична сутність полягає в тому, що вони змінюють лише динамічні параметри ланок системи, залишаючи статичні характеристики незмінними. Такі зміни здійснюються під час перехідного процесу завдяки заміні на певних часових інтервалах реального сигналу спеціально сформованим $[F_{t_2}^h]$, який у проміжку від t_1 до t_2 має амплітуду F . Таким чином, при гармонійному вхідному сигналі виду $x = x_0 \sin(\omega t)$, вихід системи набуває вигляду $y = [F_{t_2}^h] y_0 \sin(\omega t)$. Як показано у дослідженнях [7], технічно доцільним є використання обмеженого набору значень амплітуди коректувального сигналу: $F = 0, -1, k$ (де k - певний коефіцієнт). Наприклад, інтервал $[-1_{t_2}^h]$ відповідає зміні знаку керуючого сигналу, що дозволяє суттєво впливати на динаміку процесів у системі.

Схожі задачі досліджувалися в роботах [7]–[9], проте у них не було приділено достатньої уваги питанням стійкості при використанні таких методів корекції.

У роботі [10] аналізуються проблеми синтезу та забезпечення стійкості нелінійних слідкуючих систем

електроприводів із релейними характеристиками. Водночас, на відміну від запропонованого підходу, там розглядаються лише умови абсолютної стійкості, причому для систем зі значними спотвореннями статичних характеристик, спричиненими суттєвими нелінійностями.

Таким чином, актуальним завданням є поглиблене вивчення нелінійних коректувальних пристроїв, що дозволяють змінювати динаміку системи, з одночасним визначенням умов її стійкості та ефективності роботи в реальних умовах експлуатації.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ МЕТИ РОБОТИ

Метою даної роботи є дослідження нелінійного коригувального пристрою для системи автоматичного керування електроприводом постійного струму, який забезпечує наближення до оптимального режиму роботи за критерієм швидкодії та точності, з одночасним визначенням умов стійкості й меж працездатності системи.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Характерною особливістю оптимальних систем є їх здатність забезпечувати максимальну якість функціонування за умов обмежених можливостей, тобто з урахуванням наявних у системі обмежень на ресурси керування [7]. Оптимальність системи визначається за допомогою критерію, що задається у вигляді функціоналу:

$$J = \int_0^T F(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_2, t) dt, \quad (1)$$

де T - час керування; $x_1 \dots x_n$ - фазові координати системи; $u_1 \dots u_r$ - керуючі на вході незмінної частини системи (об'єкта керування).

Метою синтезу оптимального керування є визначення вектора керуючих дій U з компонентами $u_1 \dots u_r$, який забезпечує досягнення екстремального значення функціоналу. При цьому вектор U повинен належати обмеженій області Ω_u допустимих керувань.

В електроприводах найчастіше виникає необхідність забезпечення максимальної швидкодії системи з урахуванням особливостей механічних передач. У теоретичному аспекті для широкого класу систем ця задача ефективно розв'язується за допомогою принципу максимуму. Встановлено, що керуючі впливи u_i на вході об'єкта повинні мати кусково-гладкий характер із амплітудою, яка дорівнює максимально допустимому значенню [7], [8]. Крім того, кількість інтервалів, на яких знак сигналу залишається сталим, при дійсних полюсах передавальної функції об'єкта не перевищує її порядку.

Разом із тим побудова оптимальних систем супроводжується значними технічними труднощами. Практична реалізація оптимального керування зазвичай ґрунтується або на обчисленні моментів перемикання релейних елементів, що формують кусково-гладке керування, або на визначенні функціональної залежності керуючого сигналу u від поточних координат об'єкта. Обидва підходи потребують розв'язання складних інженерних задач [7]–[9].

Розглянемо структурну схему слідкувального електроприводу постійного струму з нелінійним регулятором, що наведена на рисунку 1.

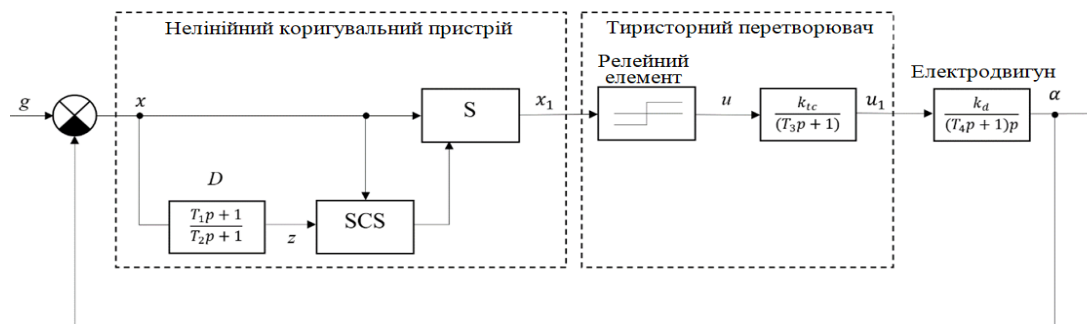


Рисунок 1. Електропривод постійного струму з нелінійним регулятором: k_c - коефіцієнт передачі, T_i - стала часу, D - фазовипереджувальна ланка, SCS - схема порівняння знаків, S - двопозиційний ключ

На структурній схемі (рис. 1) двигун постійного струму подано у вигляді аперіодичної ланки з коефіцієнтом передачі k_d та сталою часу T_4 . Навантаження, приведені до вала двигуна, враховується цією ж сталою часу. Тиристорний перетворювач, який живить двигун, також моделюється як аперіодична ланка з коефіцієнтом передачі k_{1c} і сталою часу T_3 . Водночас тиристорний перетворювач виконує роль релейного перемикача. Для забезпечення оптимальної реакції си-

стеми на стрибкоподібний сигнал на вході релейного елемента необхідно реалізувати функціональну залежність такого вигляду:

$$F_x = x - \text{sign} x \ln(1 + |x|), \quad (2)$$

Нелінійний перетворювач, що реалізує залежність F_x , функціонує на основі коригувального сигналу типу $[-1_{t_2}^1]$. Такий підхід вважається найбільш доцільним

для реалізації нелінійної динамічної корекції з позиції технічної здійсненності. Це пояснюється тим, що інші методи апроксимації оптимальних законів керування - скорочення числа вимірюваних фазових координат, зменшення кількості інтервалів керування чи спрощення математичної форми закону керування - зазвичай не забезпечують значного спрощення апаратної реалізації.

У більшості випадків вони все одно потребують використання нелінійних функціональних перетворювачів, аналогічно до варіантів із суворо оптимальним керуванням [7].

Запропонований нелінійний коригувальний пристрій має відносно просту структуру. Він складається з двопозиційного ключа S , схеми порівняння знаків (SCS) та фазовипереджувальної ланки D , що описується передавальною функцією:

$$W_D(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}, (T_1 > T_2), \quad (3)$$

У реальних електроприводах стала часу тиристорного перетворювача T_3 зазвичай на два-три поряд-

ки менша від сталої часу двигуна T_4 . Це дозволяє суттєво спростити математичний опис системи. При перемноженні двох аперіодичних ланок, що формують лінійну частину, у знаменнику передавальної функції виникає квадратний тричлен, однак член із добутком $T_3 T_4$ внаслідок його малої величини можна знехтувати.

Таким чином, замість двох послідовно з'єднаних аперіодичних ланок лінійну частину системи доцільно подати у вигляді однієї еквівалентної аперіодичної ланки з коефіцієнтом передачі

$$k = k_d \cdot k_{ic},$$

та еквівалентною сталою часу

$$T = T_3 + T_4,$$

Подібна апроксимація значно полегшує аналіз і подальший синтез системи, оскільки дозволяє зменшити порядок математичної моделі без втрати адекватності опису її основних динамічних властивостей. Відповідна структурна схема подана на рис. 2.

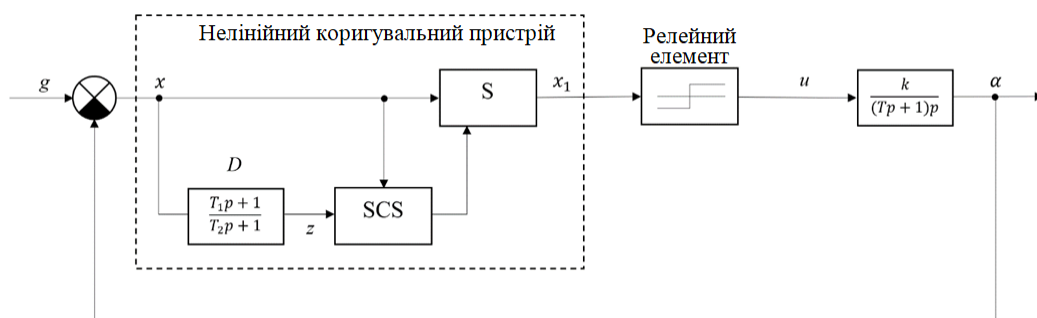


Рисунок. 2. Спрощена структурна схема електроприводу постійного струму

Якщо до системи, що перебуває у стані спокою, прикласти стрибкоподібний сигнал, то на початковому етапі знак помилки x та вихідного сигналу фазовипереджальної ланки z збігається. У цей момент ключ S пропускає сигнал помилки без інверсії, завдяки чому система починає рух у напрямку зменшення невідповідності. Це викликає розгін електропривода.

Згодом у певний момент часу t_n знак сигналу z змінюється. Схема порівняння знаків SCS впливає на ключ S , внаслідок чого знак сигналу у прямому каналі системи інвертується, що призводить до її гальмування. При коректному виборі моменту перемикавання t_n , у кінці другого інтервалу фазова точка системи потрапляє у початок координат фазового простору [7]. Це означає, що як помилка системи, так і її похідна дорівнюють нулю. Такий процес при релейному законі керування з одним перемиканням вважається оптимальним [7].

У цьому випадку зв'язок між моментом перемикавання t_n та амплітудою стрибка A (для $A > 0$) задається нормованим співвідношенням:

$$t_n^* = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - e^{-a}}}, \quad (4)$$

де

$$t_n^* = \frac{t_n}{T}, \quad a = \frac{A}{(k u_m \cdot T)},$$

Аналогічна функціональна залежність для досліджуваної системи, що описується виразом $t_n^* = f(a_k)$, визначається наступним чином.

Відповідно до рис. 2, отримано нормоване співвідношення, яке характеризує величину системної помилки за умови сталого збурювального впливу $g(t) = A_k = \text{const}$:

$$\dot{x}^* + x^* = -u^*, \quad (5)$$

де $x^* = x/(ku_m T)$, $u^* = u/u_m$, а диференціювання проводиться за нормованим часом $t^* = t/T$.

Вирішуючи його при $x^* = a_k = A_k/(ku_m T)$ та $x^*(0) = 0$, отримаємо:

$$x^* = a_k - u^*(1 - e^{-t^*}) + u^* t^*, \quad (6)$$

$$x^* = u^*(1 - e^{-t^*}), \quad (7)$$

Підставляючи (6) та (7) в рівняння фазовипережувальної ланки

$$\tau_2 \dot{z}^* + z^* = \tau_1 x^* + x^*, \quad (8)$$

де $\tau_1 = T_1/T$; $\tau_2 = T_2/T$; $z^* = z/(ku_m T)$.

Отримаємо

$$\tau_2 \dot{z}^* + z^* = a_k - u^*(1 - \tau_1) + u^*(1 - \tau_1)e^{-t^*} + u^* t^*, \quad (9)$$

Початкова умова для (6)

$$z^*(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1} x^*(0) = \frac{\tau_1}{\tau_2} a_k, \quad (10)$$

Оскільки зміна знака сигналу в прямому каналі відбувається у момент часу $t_{пк}^*$, коли $z^* = 0$, то, розв'язуючи рівняння (9) з початковою умовою (10) та враховуючи співвідношення $z^*(t_{ск}^*) = 0$, у підсумку отримуємо кінцевий вираз (при припущенні $u^* = +1$, що забезпечує рух системи до стану рівноваги за умови $a_k > 0$).

$$t_{пк}^* = a_k \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} e^{-t_{пк}^*/\tau_2} - \frac{\tau_1 - \tau_2}{1 - \tau_2} \tau_2 e^{-t_{пк}^*/\tau_2} - \frac{1 - \tau_1}{1 - \tau_2} e^{-t_{пк}^*} + \tau_2 - \tau_1 + 1 + a_k, \quad (11)$$

Спільний розв'язок рівнянь (4) та (11) можливий лише за умови, що параметр a набуває єдиного значення $a = a_k$. У зв'язку з цим, для забезпечення коректного відпрацювання впливів різної амплітуди виникає необхідність такого вибору параметрів нелінійної коригувальної ланки, який би гарантував мінімальне відхилення реального закону керування від оптимального в усьому заданому діапазоні амплітуд $0 \leq a \leq a_{\max}$.

Ступінь наближення отриманого закону керування до оптимального доцільно оцінювати за залежністю амплітуди від моменту перемикавання. Такий підхід дозволяє визначити якість функціонування системи в різних режимах та оцінити ефективність вибраних параметрів коригувальної ланки.

$$a = t_i^* - \ln(2 - e^{-t_i^*}), \quad (12)$$

$$a_k = \left(t_{пк}^* + \frac{\tau_1 - \tau_2}{1 - \tau_2} \tau_2 e^{-t_{пк}^*/\tau_2} + \frac{1 - \tau_1}{1 - \tau_2} e^{-t_{пк}^*} + \tau_1 - \tau_2 - 1 \right) \times$$

$$\times \frac{1}{1 + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} e^{-t_{пк}^*/\tau_2}}, \quad (13)$$

Будемо визначати ступінь близькості керування до оптимального величиною:

$$\Delta = a_k - a, \quad (14)$$

де a_k і a визначаються з (6) і (7) при $t_{пк}^* = t_{пк}^*$, Δ це величина помилки системи з нелінійною корекцією в кінці другого інтервалу:

$$\Delta = x_k^* = \frac{x_k}{ku_m \cdot T}, \quad (15)$$

За умов строго оптимального керування виконується рівність $x_k = 0$ (а отже, і $\Delta = 0$). Тому чим меншою є величина Δ , тим ближче перебіг процесу до оптимального, таким чином, Δ може розглядатися як кількісний показник ступеня наближення до оптимального режиму, а її використання для оцінки якості керування є обґрунтованим.

Аналіз виразів (12) та (13) дозволяє встановити, що відповідні залежності $a(t_{пк}^*)$ і $a_k(t_{пк}^*)$ при достатньо великих значеннях $t_{пк}^* = t_{пк}^*$ асимптотично прямують до таких виразів:

$$a_a = t_{пк}^* - \ln 2, \quad (16)$$

$$a_{ка} = t_{пк}^* - (1 - (\tau_1 - \tau_2)), \quad (17)$$

при

$$1 - (\tau_1 - \tau_2) = \ln 2, \quad (18)$$

асимптоти збігаються, тобто при $t_{пк}^* \rightarrow \infty$ (і, отже, $a \rightarrow \infty$):

$$\lim_{t_{пк}^* \rightarrow \infty} \Delta = 0, \quad (19)$$

З формул (12-14) випливає, що при $a = a_k = t_{пк}^* = 0$ дорівнює нулю і Δ . Це означає, що за певного значення параметра a абсолютне значення Δ досягає свого максимуму. Таким чином, для наближення керування до оптимального в процесі зміни a від нуля до нескінченності необхідно вибирати параметри τ_1 та τ_2 так, щоб мінімізувати максимальне значення $|\Delta|$, тобто реалізувати принцип мінімаксу $|\Delta|$.

На практиці амплітуда вхідних стрибкоподібних сигналів обмежена. У цьому випадку підбір τ_1 та τ_2 також повинен забезпечувати досягнення мінімаксу $|\Delta|$ ($|\Delta|_{\min \max}$) у визначеному діапазоні зміни параметра a . Завдання вибору τ_1 та τ_2 вирішувалося чисельно. Для різних діапазонів відносних амплітуд обчислення проводилися на ЕОМ методом перебору значень a , τ_1

та τ_2 , які вимірюються у відносних (нормованих) одиницях.

Отримані результати дозволили побудувати залежності параметрів τ_1 та τ_2 , що забезпечують $|\Delta|_{\min \max}$, від ширини діапазону, визначеної верхньою межею $a_{\max}$. Відповідні графіки залежностей τ_1 та τ_2 від $a_{\max}$ у натуральному та логарифмічному масштабах наведено на рис. 3.

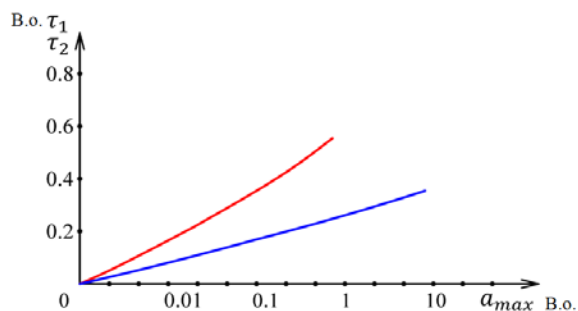


Рисунок 3. Графіки залежностей τ_1 і τ_2 від $a_{\max}$: червоною лінією показана залежність для τ_1 , а синію для τ_2

Фазовипереджувальну ланку можна реалізувати простою схемою пасивного чотирьохполюсника, що наведена на рис. 4.

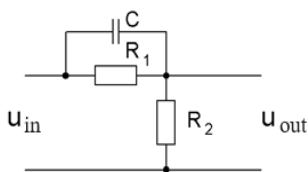


Рисунок 4. Фазовипереджувальна ланка

Часові сталі визначаються за відомими формулами: $T_1 = R_1 C$; $T_2 = C R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Отже, нелінійні коригувальні пристрої можуть застосовуватися як прості засоби оптимізації автоматизованих систем.

Проведені дослідження параметрів коригуючих пристроїв дозволили визначити умови, за яких досягається оптимальне керування системою. Однак, отримані результати є недостатніми без урахування властивостей стійкості, оскільки саме вони визначають можливість практичної реалізації побудованої системи. Тому далі розглянемо питання стійкості оптимізованої системи та межі її працездатності.

Як відомо, релейні системи характеризуються підвищеною схильністю до виникнення автоколивань [7]–[10]. Додатковим фактором є наявність нелінійного коригуючого пристрою, який у певні проміжки часу формує позитивний зворотний зв'язок у системі (рис. 1), що може суттєво зменшити запас стійкості. Тому вибір параметрів цього пристрою повинен здійснюватися не лише з позицій оптимізації, але й з урахуванням їх впливу на стабільність роботи системи. Варто

також підкреслити, що реальні автоматичні системи, поряд із високою швидкістю, мають забезпечувати досягнення й інших показників якості. У цьому контексті застосування лінійних методів керування здатне істотно спростити задачу стабілізації. Для подальшого аналізу розглянемо випадок синусоїдного вхідного впливу, коли вихідний сигнал нелінійної частини (рис. 1) визначається виразами [11], [12]:

$$x = x_{\max} (\sin \psi - a), \psi_1 < \psi \leq \psi_2, \quad (20)$$

$$x = x_{\max} (\sin \psi_2 - a), \psi_2 \leq \psi < \pi + \psi_1. \quad (21)$$

Кути ψ_1 та ψ_2 обмежують область коливань нелінійного елемента, де виконується умова $x_1 = \text{const}$. Коефіцієнти гармонічної лінеаризації визначаються як значення першої гармоніки під час розкладу функції $x(\psi)$ у ряд Фур'є. З урахуванням того, що для аперіодичної ланки на відріжку $\psi_1 - \psi_2$ координата x змінюється згідно з формулою (20), а на проміжку $\psi_2 - (\pi + \psi_1)$ - відповідно до формули (21), отримаємо вирази для коефіцієнтів q і q' :

$$q = \frac{1}{\pi} (\psi_2 - \psi_1 + \frac{1}{2} (\sin 2\psi_2 - \sin 2\psi_1)), \quad (22)$$

$$q' = -\frac{1}{\pi} (\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1), \quad (23)$$

Коефіцієнти гармонічної лінеаризації визначаються як параметрами вхідного сигналу, так і характеристиками самої ланки. Припустимо, що ланки порівняння знаків та ключова ланка не мають постійної часу. У цьому випадку маємо: $\psi_0 = 0$, $\cos \psi_0 = 1$, $\sin \psi_0 = 0$, $\psi_2 = \pi/2$, $\psi_1 = -\arcsin(1-2a)$. Використовуючи формули (22) та (23), можна отримати вирази для коефіцієнтів гармонічної лінеаризації нелінійної ланки, наведеної на рис. 1.

$$q = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin(1-2a) + 2(1-2a)\sqrt{a(1-a)} \right), \quad (24)$$

$$q' = -\frac{4a}{\pi} (1-a), \quad (25)$$

Характеристичне рівняння лінійної частини системи рис.1 має вигляд:

$$T_3 T_4 p^3 + (T_3 + T_4) p^2 + p + k, \quad (26)$$

Критичний коефіцієнт підсилення лінійної системи k_{kl} та частота коливань системи на границі стійкості ω_1 визначаються наступними виразами:

$$k_{kl} = \frac{T_3 + T_4}{T_3 T_4}, \omega = \sqrt{\frac{1}{T_3 T_4}}, \quad (27)$$

Спираючись на [11], [12] припустимо, що $T_3 = 0,018$ с, $T_4 = 0,12$ с., тоді у відповідності до (26) маємо: $k_k = 64 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 = 21,5 \text{ с}^{-1}$.

Для дослідження стійкості нелінійної системи

рис.1 представимо рівняння нелінійної ланки у виді:

$$x_1 = (q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p)g, \quad (28)$$

Коефіцієнти гармонійної лінеаризації визначаються за формулами (22), (23). Характеристичне рівняння набуває наступного виду:

$$T_3 T_4 p^3 + (T_3 + T_4) p^2 + p + (q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p)k = 0, \quad (29)$$

Щоб визначити границю стійкості, підставимо $p = j\omega$ у рівняння (27).

$$-T_3 T_4 j\omega^3 - (T_3 + T_4)\omega^2 + j\omega + kq(a) + jkq'(a) = 0, \quad (28)$$

Після перетворень:

$$\omega = \frac{(T_3 + T_4)q'(a)}{2T_3 T_4 q(a)} + \sqrt{\left(\frac{(T_3 + T_4)q'(a)}{2T_3 T_4 q(a)}\right)^2 + \frac{1}{T_3 T_4}}, \quad (29)$$

Вираз для критичного коефіцієнта передачі системи має вигляд:

$$k_k = \frac{(T_3 + T_4)\omega^2}{q(a)}, \quad (30)$$

Рівняння (29) та (30) дозволяють визначити межу стійкості системи, зображеної на рис. 1, для довільних значень її параметрів. Це дає змогу аналізувати поведінку системи та обирати оптимальні режими роботи.

Після отримання та аналітичного виведення формул (29)–(30) виконаємо побудову графіків стійкості системи, що відображають залежності критичного коефіцієнта передачі $k_k(a)$ та частоти автоколиваний $\omega(a)$ від параметра a .

Вихідними даними для побудови графіків стійкості використаємо є структурну схему системи (рис. 1), яка включає двигун постійного струму, змодельований у вигляді аперіодичної ланки з коефіцієнтом передачі k_d та сталою часу T_d , тиристорний перетворювач, поданий як аперіодична ланка з коефіцієнтом передачі k_{ts} і сталою часу T_3 , а також нелінійний регулятор. Оскільки стала часу перетворювача значно менша від сталої часу двигуна, лінійну частину системи було спрощено до однієї еквівалентної аперіодичної ланки. Для аналізу стійкості застосовано метод гармонійної лінеаризації, при якому нелінійний елемент замінюється еквівалентною ланкою з коефіцієнтами q та q' , визначеними за формулами (22) і (23).

Виконуючи чисельне розв'язання рівнянь (29) і (30) для різних значень параметра a з подальшим нанесенням на одну координатну площину залежностей $k_k(a)$ та $\omega(a)$, отримаємо значення границь стійкості системи. Такий підхід забезпечує наочність дослідження впливу параметра a на динамічні властивості системи та дає можливість оцінити її стійкість у різних режимах.

Для проведення розрахунку та визначення границь стійкості системи було використано програму MATLAB, який автоматизував обчислення критичних параметрів і дозволило візуалізувати отримані залежності у вигляді границь стійкості.

Границі стійкості системи були визначені за допомогою методу гармонійної лінеаризації, який дозволяє досліджувати нелінійні системи керування шляхом заміни їх на еквівалентні лінійні моделі з певними параметрами.

У процесі аналізу нелінійний регулятор електропривода, що містить релейний елемент і фазовипереджувальну ланку, був представлений у вигляді еквівалентної лінійної ланки з коефіцієнтами гармонійної лінеаризації q та q' . Ці коефіцієнти були визначені через розклад функцій у ряд Фур'є, що дозволило врахувати вплив амплітуди вхідного сигналу на поведінку системи.

На основі отриманих коефіцієнтів було складено характеристичне рівняння системи, у яке підставлявся комплексний параметр $p = j\omega$, що відповідає умові нейтральної стійкості - моменту, коли система знаходиться на межі між стійким станом і виникненням автоколиваний. Це дало змогу отримати аналітичні залежності для критичного коефіцієнта підсилення k_k та частоти автоколиваний ω , які характеризують границі стійкої роботи системи.

Далі ці рівняння були розв'язані чисельним методом у середовищі MATLAB, що дозволило побудувати графіки залежностей критичного коефіцієнта передачі $k_k(a)$ та частоти автоколиваний $\omega(a)$ від параметра нелінійної ланки a , (див. рис. 5).

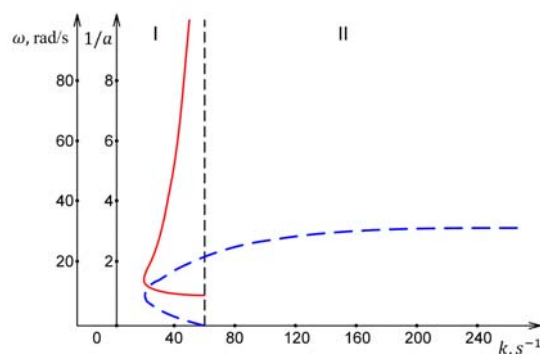


Рисунок 5. Границі стійкості системи

На рис. 5 область стійкості позначена як I, а зона нестійкості - як II. Із графіка видно, що наявність нелінійної ланки суттєво звужує межі стійкості системи, зображеної на рис. 1. За значень коефіцієнта передачі k , менших від певного критичного значення k_k , система перебуває у стійкому стані. Якщо ж k знаходиться в інтервалі між k_k та k_{kl} , у системі можуть виникати стійкі автоколивання. При подальшому збільшенні k понад k_{kl} система втрачає стійкість. Синя крива демонструє, що зі зменшенням амплітуди коливаний

відбувається зниження їх частоти.

Отримані результати (рис. 5) стосуються узагальненої моделі електропривода з релейним законом керування для двигунів постійного струму привідного класу потужності 0,75–2,2 кВт. Як приклад можна представити відповідні електродвигуни в табл. 1.

Table 1. Приклади відповідних двигунів

Модель двигуна	Потужність, кВт	Напруга, В	Струм, А	Швидкість, об/хв
ДПМ-20-Н1-01	0,75	110	8,5	1500
ДПМ-25-Н2	1,1	220	6,0	1500
ДПР-52-Н1	1,5	220	8,0	2000
ПБМ-100-2УХЛ4	2,2	220	12,0	1500
2ПН90-1УХЛ4	1,6	220	9,0	1600
ДПР-52-УХЛ4	1,2	110	10	1800

Таким чином, результати дослідження підтверджують ефективність використання нелінійних коригувальних пристроїв для оптимізації автоматичних систем керування, однак їх практична реалізація потребує ретельного врахування динамічних властивостей та меж стабільності.

V. ВИСНОВКИ

1. Розроблено методику апроксимації оптимального закону керування на основі принципу мінімаксу, що мінімізує відхилення від оптимального режиму у широкому діапазоні вхідних впливів.

2. Встановлено умови, за яких досягається оптимальне керування при використанні нелінійного коректора, та отримано залежності параметрів фазовипереджувальної ланки від амплітуди вхідних сигналів.

3. Показано, що застосування нелінійної корекції значно покращує динамічні властивості системи, забезпечуючи швидке зменшення похибки без істотного погіршення інших показників якості.

4. Виконаний аналіз стійкості з використанням методу гармонічної лінеаризації підтвердив, що нелінійний коректор звужує межі стійкості системи. Зокрема, при перевищенні критичного коефіцієнта підсилення можливе виникнення автоколивань і втрата стабільності.

5. Запропоновані теоретичні положення можуть бути використані на практиці для побудови електроприводів, де висувуються підвищені вимоги до швидкодії та точності регулювання, але водночас необхідно враховувати компроміс із запасом стійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kodkin V., Anikin A., Baldenkov A. Structural correction of nonlinear dynamics of frequency-controlled induction motor drives // *Int. J. Power Electron. Drive Syst.* – 2020. – №11. – С. 220–227.
2. Islam R., Islam M., Hossain K. Pintukumar Sadhu performance analysis of a DTC and SVM based field-orientation control induction motor drive // *Int. J. Power Electron. Drive Syst.* – 2015. – №3. – С. 336–343.
3. Chunmei Li, A., L. A. Nonlinear system control strategy based on single chip computer // *5th International Conference on Advanced Design and Manufacturing Engineering.* – 2015. – С. 321–325. DOI: 10.2991/icadme-15.2015.64
4. Kimstach O. Optimisation Problem of Bi-current System of Distribution Generation // *2023 IEEE 5th International Conference on Modern Electrical and Energy System.* – 2023. – С. 1–5. DOI: 10.1109/MEES61502.2023.10402508
5. Kimstach O. Optimal starting of the induction motor // *ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK.* – 2020. – №89. – С. 263–268.
6. Kimstach O. Definition of Optimal Structure of Power Network // *Problemele energeticii regionale.* – 2019. – №1(39). – С. 22–33. DOI: 10.5281/zenodo.2650415
7. Hlypalo E. Nonlinear correcting devices in automatic systems // *Energy.* – 1973.
8. Шарейко Д.Ю., Фоменко Л. Оптимізація автоматичних систем нелінійними коригуючими пристроями // *Інновації в суднобудуванні та океанотехніці.* – 2023. – С. 349–352.
9. Biluk I., Shareyko D., Fomenko S. Adaptive Control in Complete Electric Drives // *2020 IEEE Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP).* – 2020. – С. 1–4. DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240856
10. Biluk I., Shareyko D., Savchenko O. Development of a laboratory stand for the study of asynchronous electric drives // *Int. Scientific Discussion: Problems, Tasks, Prospects Brighton.* – 2024. – С. 464–481. DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240856
11. Beaty H.W. *Electrical equipment handbook: Troubleshooting and maintenance.* – New York, NY: McGraw-Hill. – 2003. – 832 с.
12. Лавріненко Ю. Електропривод / Ю. Лавріненко, О. Марченко, П. Савченко. – Київ: Ліра-К, 2009. – 504 с.

Надійшла (Received) 15.09.2025;

Прийнята (Accepted) 27.10.2025;

Опублікована (Published) 26.12.2025;

OPTIMIZATION OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS FOR DC ELECTRIC DRIVES USING NONLINEAR CORRECTION DEVICES

- SAVCHENKO O.V. head of Laboratories, department of automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9718-7857>, e-mail: savchenko1984@gmail.com;
- SHAREYKO D.U. candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6460-9331>, e-mail: dshareyko.mk@gmail.com;
- BILIUK I.S. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1654-7468>, e-mail: ivanbilyuk@gmail.com;
- MARZIAVKO V.A. Assistant Professor, Department of Electric Power, Electrical Engineering and Electromechanics, Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-9215>, e-mail: vitalijmardzavko@gmail.com;

Purpose of the work. The purpose of this work is to study a nonlinear correction device for an automatic control system for a DC electric drive, which provides an approach to the optimal operating mode according to the criterion of speed and accuracy, while simultaneously determining the stability conditions and limits of the system's performance.

Research methods. The work uses mathematical modeling, the theory of optimal control based on the minimax principle, the harmonic linearization method for stability analysis, as well as numerical methods to determine the optimal parameters of the phase-leading link. Structural diagrams of DC electric drives and models with relay characteristics were used, which made it possible to study the influence of nonlinear correction on the dynamic properties of the system.

Results. In the process of research, a structural diagram of a DC electric drive with a nonlinear regulator, including a phase-leading link and relay elements, was constructed. A method for approximating the optimal control law using the minimax principle is proposed, which ensures minimization of deviations from the optimal regime in a wide range of input amplitudes. Dependencies between the parameters of the phase-leading link and the magnitude of the system error deviation are established, which made it possible to formulate criteria for selecting its time constants. Analytical expressions for estimating the signal switching moment are obtained, the normalized relations between the amplitude and the switching time are constructed, which determine the quality of the control process. It is shown that the proposed nonlinear corrector allows to reduce the time of the transient process and reduce the error magnitude without a significant increase in overshoot. The analysis of the system stability using the harmonic linearization method made it possible to determine the critical values of the gain coefficients and self-oscillation frequencies. It is established that the presence of a nonlinear corrector significantly affects the dynamic characteristics and at the same time narrows the limits of stability. The constructed graphs of the critical gain and self-oscillation frequency depending on the nonlinear link parameter allowed us to determine clearly the areas of stable and unstable operation of the DC electric drive. Thus, the results confirm that the use of a nonlinear correction device provides an increase in the system speed and a decrease in the error, but requires consideration of a compromise between the quality of regulation and the margin of stability.

Scientific novelty. The work substantiates a new approach to the synthesis of DC electric drive control systems based on nonlinear dynamic correction. The application of the minimax principle for approximating the optimal control law is proposed and its effectiveness in a wide range of input influences is shown. For the first time, a comprehensive analysis of the relationship between the parameters of the nonlinear link and the system stability limits is carried out.

Practical value. The results of the work can be used in the design of electric drives operating in modes with high requirements for speed and regulation accuracy. The proposed approaches contribute to the creation of more effective control algorithms that take into account the trade-off between speed, accuracy, and system stability.

Keywords: electric drive, DC motor, automatic control system, nonlinear correction device, optimal control, phase-advancing link, stability, minimax.

REFERENCE

10.5281/zenodo.2650415

- [1] Kodkin, V., Anikin, A., & Baldenkov, A. (2020). Structural correction of nonlinear dynamics of frequency-controlled induction motor drives. *Int. J. Power Electron. Drive Syst.*, (11), 220–227.
- [2] Islam, R., Islam, M., & Hossain, K. (2015). Pintukumar sadhu performance analysis of a dtc and svm based field-orientation control induction motor drive. *Int. J. Power Electron. Drive Syst.*, 5(3), 336–343.
- [3] Chunmei Li, A, L. A. (2015). Nonlinear system control strategy based on single chip computer. In *5th international conference on advanced design and manufacturing engineering* (p. 321–325). DOI: 10.2991/icadme-15.2015.64
- [4] Kimstach, O. (2023). Optimisation Problem of Bi-current System of Distribution Generation. In *2023 IEEE 5th International Conference on Modern Electrical and Energy System* (p. 1–5). DOI: 10.1109/MEES61502.2023.10402508.
- [5] Kimstach, O. (2020). Optimal starting of the induction motor. *ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK*, 5(89), 263–268.
- [6] Kimstach, O. (2019). Definition of Optimal Structure of Power Network. *Problemele energeticii regionale*, 1(39), 22–33. DOI: 10.5281/zenodo.2650415
- [7] Hlypalo, E. (1973). *Nonlinear correcting devices in automatic systems*. Energy.
- [8] Shareiko, D. Yu., & Fomenko, L. (2023). Optymizatsiia avtomatichnykh system neliniinykh kory-huiuchymy prystroiamy [Optimization of automatic systems by nonlinear corrective devices]. In *Innovations in shipbuilding and ocean engineering* (p. 349–352). NUK.
- [9] I. Biluk, D. Shareyko, A. & Fomenko, S. (2020). Adaptive Control in Complete Electric Drives. In *2020 IEEE Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP)* (p. 1–4). DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240856
- [10] I. Biluk, D. Shareyko, A. & Savchenko, O. (2024). Development of a laboratory stand for the study of asynchronous electric drives. In *Int. Scientific Discussion: Problems, Tasks Prospects Brighton* (p. 464–481). DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240856
- [11] Beaty, H. W. (2003). *Electrical equipment handbook: Troubleshooting and maintenance*. New York, NY: McGraw-Hill, 832p.
- [12] Lavrinenko, Y., Marchenko, O., & Savchenko, P. (2009). *Elektropryvod. [Electric drive]*, 504p.