

УДК.621.3

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІДНОВЛЕННЯ ПРИВЕДЕНОГО МАГНІТНОГО МОМЕНТУ ТОЧКОВОГО ДИПОЛЯ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ФЕРОМАГНІТНИХ ОБ'ЄКТІВ

- ШАРЕЙКО Д.Ю. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6460-9331>, e-mail: [dshareyko.mk@gmail.com](mailto:dshareyko.mk@gmail.com);
- БІЛЮК І.С. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1654-7468>, e-mail: [ivanbilyuk@gmail.com](mailto:ivanbilyuk@gmail.com);
- САВЧЕНКО О.В. завідувач лабораторіями кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9718-7857>, e-mail: [savchenko1984@gmail.com](mailto:savchenko1984@gmail.com);
- МАРДЗЯВКО В.А. асистент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Миколаївського національного аграрного університету, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-9215>, e-mail: [vitalijmardzavko@gmail.com](mailto:vitalijmardzavko@gmail.com);
- ТОДОСІЄНКО А.М. аспірант кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-3692-4723>, e-mail: [atodosienko@gmail.com](mailto:atodosienko@gmail.com);

**Мета роботи.** Мета роботи полягає у розробці та дослідженні математичної моделі для відновлення приведенного магнітного моменту точкового диполя на основі інтегральних характеристик магнітного поля, що дозволяє забезпечити коректне розв'язання оберненої задачі магнітометрії в умовах обмеженої апріорної інформації та реальних шумових завод.

**Методи дослідження.** У роботі застосовано математичне моделювання, аналітичні методи оберненої магнітометрії, інтегральні перетворення та чисельний експеримент для оцінки точності відновлення компонент магнітного моменту. Для побудови розрахункових залежностей використано дискретизацію поля на прямокутній сітці вимірювальних точок та алгоритми мінімізації похибки реконструкції.

**Отримані результати.** Побудовано узагальнену модель взаємозв'язку між вимірними складовими магнітної індукції та компонентами вектора магнітного моменту диполя. Запропоновано математичний алгоритм для обчислення приведенного моменту на основі сум інтегральних характеристик поля по координатних напрямках. Проведено дослідження для різних розмірів сітки вимірювань, що підтвердив працездатність методу та показав, що похибка реконструкції зменшується зі збільшенням кількості вимірювальних точок. Отримані результати свідчать про можливість надійної ідентифікації об'єкта за обмеженим набором даних магнітного поля.

**Наукова новизна.** Запропоновано метод відновлення приведенного магнітного моменту, що базується не на локальних значеннях поля, а на інтегральних характеристиках, що забезпечує підвищену стійкість до шуму та зменшення впливу неоднорідностей середовища. Показано ефективність використання дискретно-інтегрального підходу у задачах оберненої магнітометрії.

**Практична цінність.** Розроблена модель може бути використана у системах виявлення та класифікації феромагнітних об'єктів у підводних, підземних та наземних середовищах, зокрема у завданнях неруйнівного контролю, технічної діагностики та пошуково-рятувальних операцій. Запропонований підхід дозволяє реалізувати малогабаритні вимірювальні системи із зниженими вимогами до точності позиціонування сенсорів.

**Ключові слова:** магнітний диполь; обернена задача магнітометрії; приведений магнітний момент; інтегральна характеристика поля; чисельний експеримент; ідентифікація об'єктів.

### I. ВСТУП

Задача визначення розташування та характеристик джерела магнітного поля на основі результатів вимірювань є важливою й добре відомою науково-

технічною проблемою [1] - [6]. Подібні задачі виникають у найрізноманітніших галузях - від геофізичної розвідки та медичної діагностики (наприклад, магнітоенцефалографія) до військових систем виявлення об'єктів, контролю технічного стану трубопроводів

чи пошуку прихованих пошкоджень у конструкціях. У науковій літературі вони узагальнено відомі як обернені задачі магнітометрії.

Під оберненою задачею магнітометрії розуміють визначення просторового розподілу або параметрів джерел магнітного поля за відомими вимірними значеннями компонентів поля. При цьому функціональні залежності між типом джерела, його просторовим розташуванням та спостережуваними параметрами поля зазвичай невідомі наперед і потребують встановлення. Основна складність полягає в тому, що така задача у загальному випадку є некоректною та неоднозначною: різні конфігурації джерел можуть створювати подібні магнітні сигнали.

Отже, отримати єдиний розв'язок можливо лише за умови введення моделі джерела або використання апріорної інформації, що обмежує множину можливих рішень. Вибір адекватної моделі визначається кількома чинниками: по-перше, співвідношенням між геометричними розмірами області, де розташовані джерела сигналу, та відстанню до датчика вимірювання; по-друге, фізичною природою процесів, що генерують магнітне поле в об'єкті дослідження. Саме правильне врахування цих аспектів дозволяє перейти від абстрактної математичної задачі до практичного алгоритму ідентифікації магнітних об'єктів.

У практиці морської магнітометрії, зокрема під час виявлення підводних аномалій, локалізації субмарин чи діагностики пошкоджень продуктопроводів на значних глибинах, часто застосовують спрощене представлення цільових об'єктів у вигляді точкового магнітного диполя [1] - [3]. Таке наближення є виправданим у випадках, коли відстань від об'єкта до вимірювального обладнання суттєво перевищує його власні геометричні розміри - тоді магнітне поле на поверхні води формується в основному інтегральним ефектом усього об'єкта, а дрібні деталі його структури стають непомітними.

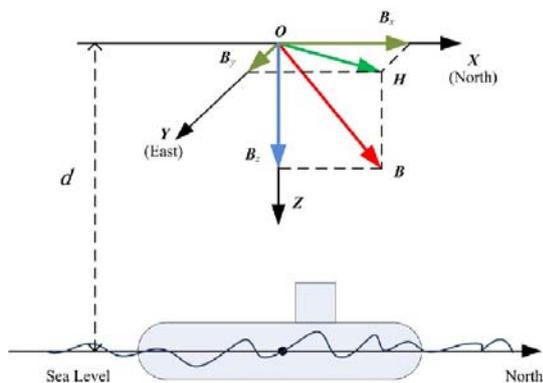


Рисунок 1. Координатна система магнітної аномалії, спричиненої підводним човном

Рис. 1 показує просторовий розподіл магнітної аномалії, спричиненої підводним човном, який моделюється як точковий диполь. Для реєстрації змін магнітно-

го поля використовуються високочутливі тривісні магнітні датчики, що вимірюють компоненти магнітної індукції  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ . Найчастіше у морській магнітометрії застосовують флюкстейтні магнітометри або датчики на ефекті Холла, які забезпечують високу роздільну здатність при малих рівнях сигналу. Принцип їх дії базується на реєстрації змін магнітної індукції у трьох ортогональних напрямках, що дозволяє відтворити векторне поле магнітної аномалії.

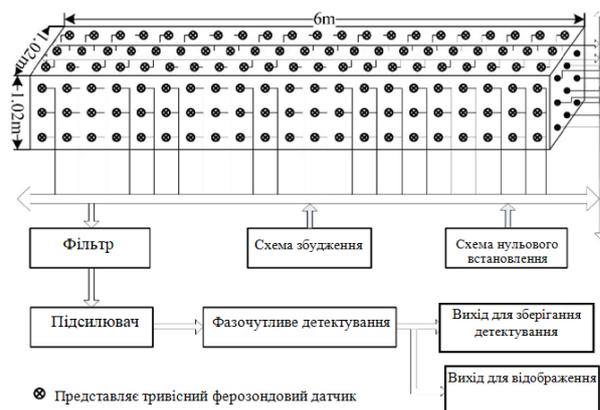


Рисунок 2. Моделювання магнітного поля підводного об'єкта

Рис. 2 демонструє наглядний результат зображення магнітного поля підводного об'єкта, який подано у вигляді точкового магнітного диполя з певним вектором магнітного моменту  $M$ . Показано ізолінії магнітної індукції та напрямки векторів  $B$ , що характеризують просторовий розподіл поля у навколишньому середовищі. Така модель дає змогу дослідити, як величина та орієнтація  $M$  впливають на форму і амплітуду аномалії, а також як змінюється поле на різних відстанях від об'єкта. Вона пояснює фізичну природу сигналів, які реєструють магнітні датчики, розташовані на поверхні води або в підводних буксирних платформах, і є основою для подальшого математичного відновлення параметрів дипольного джерела.

Знімання магнітного поля зазвичай виконується по замкненому контуру або у вигляді просторової сітки на поверхні води. Обмеженість зони вимірювань обумовлює те, що реконструкція джерела поля відбувається за неповними або неповноцінно розподіленими даними, що саме по собі ускладнює розв'язання оберненої задачі магнітометрії.

Додатковим фактором впливу є фізичні властивості середовища, через яке поширюється магнітне поле. У реальних умовах (наявність магнітних домішок у воді, феромагнітних включень у донному ґрунті тощо) магнітна проникність середовища може змінюватися, що призводить до порушення лінійності задачі. У таких випадках некоректним є застосування принципу суперпозиції - базової основи для більшості лінійних методів аналізу магнітних полів.

Важливим також є характер часової зміни поля -

як стаціонарний (постійний магнітний слід об'єкта), так і динамічний (наприклад, при русі судна чи при наявності змінних зовнішніх магнітних впливів). Тип динаміки поля визначає, чи може задача розв'язуватись у квазістатичному припущенні, чи потребує часового аналізу та фільтрації збурень.

У підсумку, хоча модель точкового диполя є корисним спрощенням, застосування її в морській магнітометрії потребує ретельного врахування умов вимірювань, структури середовища та поведінки сигналу, що безпосередньо впливає на точність та однозначність реконструкції джерела.

У даному дослідженні аналізується один із підходів до розробки методу розв'язання оберненої задачі магнітометрії. Передбачається, що для вимірюваного просторового розподілу магнітної індукції об'єкта в площині розташовується набір із  $N$  різних дипольних джерел. Робиться припущення, що для кожного диполя існує принаймні одна точка на площині вимірів, у якій магнітне поле диполя збігається із заданим значенням вектора магнітної індукції та всіх його просторових похідних першого порядку. Магнітним аномаліям можуть відповідати більш або менш широкі множини припустимих рішень, які практично є еквівалентними одне одному.

Запропонована технологія розроблялася для випадків, коли апріорна інформація обмежена, а основні дані потрібно отримувати з вимірювань магнітного поля на замкнутому контурі. Крім того, може виникати ситуація, коли вихідна аномалія ускладнена як випадковими, так і систематичними перешкодами.

У алгоритмах локалізації об'єкта за наявності магнітних шумів спочатку необхідно створити умови для виявлення джерела сигналу, а потім визначити та оцінити ймовірність розв'язання оберненої задачі з певною похибкою. Виконання цих завдань залежить від численних факторів, зокрема від співвідношення сигнал/шум, рівня власних шумів вимірювальної апаратури, точності вимірювальної системи та інших параметрів. Дослідження цих аспектів частково викладено у [7].

## II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У роботі [4] розглядається розв'язання оберненої задачі магнітометрії в умовах сильно обмеженої апріорної інформації. Основні дані отримуються безпосередньо з спостережуваних магнітних аномалій. Зазначені задачі мають невелику розмірність і використовують прості модельні класи та фундаментальні форми для інтерпретації аномалій. Ці моделі забезпечують теоретичну однозначність розв'язку обернених задач завдяки застосуванню алгоритмів автоматизованого підбору. Взаємозв'язок між аномалією та потенційними джерелами встановлюється через цільовий функціонал, який може бути представлений у вигляді карт. Проте одному цільовому функціоналу може відповідати кілька можливих рішень.

Розв'язання оберненої задачі магнітометрії для випадку, коли геологічна модель представлена сукупністю однорідних, горизонтально орієнтованих кругових тіл, наведено у [5]. У цій моделі передбачається, що нульовий пункт вимірювань обрано в умовах нормального магнітного поля, а всі аномальні поля виникають виключно через неоднорідності геологічної будови. Водночас немає обґрунтування вважати, що магнітне поле нульового пункту не піддається впливу інших намагнічених об'єктів. На практиці інтерпретатор самостійно коригує рівень відліку аномального поля. Крім того, результат розв'язання задачі значною мірою залежить від вибору початкового наближення.

У роботах [8] досліджується розв'язання оберненої лінійно-нелінійної задачі магнітометрії. Для вертикальної проекції магнітного поля при вертикальному намагнічуванні гірських порід застосовуються екстремальні ітераційні методи, які забезпечують стійкі розв'язки цих задач. Однак експериментальні дослідження показали, що багато гірських порід мають значне відхилення вектора намагнічення від вертикального напрямку, що є суттєвим недоліком, оскільки спотворює результати розв'язання. Існують роботи, які розглядають застосування даного методу для випадків косоного намагнічення [6], проте вони потребують додаткової обробки даних із застосуванням фільтрів Вінера–Калмана. Такі фільтри мають бути спеціально адаптовані для магнітометрії, щоб забезпечити надійну фільтрацію вискоелективних перешкод магнітного поля та отримання стійких і точних рішень обернених задач.

Найбільш близьким до задачі, розглянутої у статті, є підхід, наведений у роботах [2], [3]. Проте в цих задачах аналізується обмежена область, передбачається, що джерело знаходиться саме в цій області, а далі шляхом дослідження точок екстремуму та розв'язання простих лінійних систем алгебраїчних рівнянь визначаються магнітні моменти диполів та їх координати. Основна проблема полягає в тому, що магнітне поле у точках вимірів носить інтегральний характер, і джерело може перебувати поза заздалегідь визначеним об'ємом. Це особливо актуально для задач морської магнітометрії, де урахування нескінченної сітки вимірів неможливе через технічні обмеження обладнання, часові рамки та обмежені можливості математичного моделювання. Тому для практичного розв'язання таких задач необхідні методи, що забезпечують коректну оцінку джерела при обмеженому числі вимірювальних точок та адаптовані до реальних умов морських спостережень.

У математичній моделі, запропонованій у цій роботі, оновлення приведенного магнітного моменту диполя здійснюється на основі інтегральних характеристик магнітного поля. Вихідними даними можуть слугувати, наприклад, вимірювання магнітного поля на поверхні води по замкнутому контуру за допомогою гірлянди датчиків, що фіксують магнітну індукцію. Далі за допомогою моделі визначаються значення

поля всередині контуру, після чого штучно формується і поступово розширюється сітка вимірювальних точок. Такий підхід дозволяє поступово уточнювати розподіл магнітного поля та забезпечує більш точне відтворення характеристик дипольного джерела, як це показано у роботах [9]–[11].

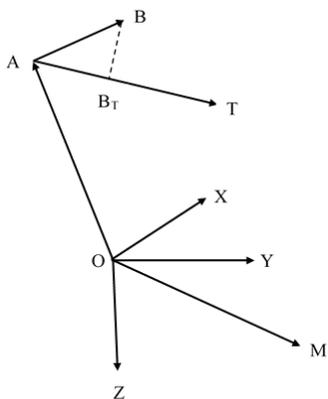
Об'єктом дослідження є зв'язок між інтегральними характеристиками магнітного поля та приведеним магнітним моментом точкового диполя довільно розташованому у просторі. Задача розглядається у лінійній постановці коли інтерпретація об'єкта точковим диполем здійснюється на відстанях у багато разів перевищуючих геометричні розміри об'єкту. Вважаємо що перешкоди у вимірах враховуються методиками, що наведені у [7].

### III. МЕТА РОБОТИ

Мета роботи полягає у розробці та дослідженні математичної моделі для відновлення приведенного магнітного моменту точкового диполя на основі інтегральних характеристик магнітного поля, що дозволяє забезпечити коректне розв'язання оберненої задачі магнітометрії в умовах обмеженої апріорної інформації та реальних шумових завод.

### IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГУ МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Вважаємо, що положення магнітного диполя може бути визначене за допомогою вектора магнітної індукції та його просторових похідних у конкретній точці простору (рис. 3).



**Рисунок 3.** Векторне співвідношення вимірних характеристик магнітного дипольного поля

Саме ці величини становлять основу даних, необхідних для розв'язання оберненої задачі магнітометрії. Використання таких характеристик дозволяє більш точно відтворювати положення та магнітні моменти джерела, а також підвищує стійкість алгоритмів до шумів і неоднорідностей вимірювального середовища [1].

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3} \right], \quad (1)$$

де  $\vec{M}$  - вектор магнітного моменту диполя;  $\vec{R}$  - до точки вимірювання, з модулем R;  $\mu_0$  - магнітна константа.

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi R^5} \begin{bmatrix} 3R_x^2 - R^2 & 3R_x R_y & 3R_x R_z \\ 3R_y R_x & 3R_y^2 - R^2 & 3R_y R_z \\ 3R_z R_x & 3R_z R_y & 3R_z^2 - R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де  $B(\cdot)$ ,  $R(\cdot)$ ,  $M(\cdot)$  - проекції відповідних векторів на осі декартової системи координат  $X, Y, Z$ .

Визначення приведенного магнітного диполя здійснюється на підставі інтегральних характеристик постійного магнітного поля. Розглянемо об'єкт, якій потрібно відшукати, як деякій об'єм  $V$ , якій містить  $N$  магнітних диполів, у загальному випадку які мають різний магнітний момент  $\vec{M}$  та довільно орієнтовані. За базове рівняння у розв'язку задачі, що розглядається візьмемо рівняння та його матричну форму (1), (2). Представимо кожний диполь  $\vec{M}_i$  об'єму  $V$ , як векторну суму трьох диполів ( $\vec{M}_{ix}, \vec{M}_{iy}, \vec{M}_{iz}$ ), що визначаються в довільно обраній декартовій системі координат  $X, Y, Z$ . Отже маємо  $3N$  кількість диполів в об'ємі  $V$ . Поставимо задачу визначення сумарних (приведених) моментів  $\left| \sum_{i=1}^N M_{xi} \right|, \left| \sum_{i=1}^N M_{yi} \right|, \left| \sum_{i=1}^N M_{zi} \right|$  на основі ві-

домих значень магнітної індукції  $B_x^{x,y,z}, B_y^{x,y,z}, B_z^{x,y,z}$ , що отримана на полі датчиків с відомими координатами  $x_i, y_i, z_i$ . Верхні індекси відповідають моментам  $\sum_{i=1}^N M_{xi}, \sum_{i=1}^N M_{yi}, \sum_{i=1}^N M_{zi}$ . Враховуючи, що є три

складові проекції  $B_x: B_x^x, B_x^y, B_x^z$  - розглянемо обчислення подвійних інтегралів типу  $\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} x B_x^x dx dy$ . В цьому

рівнянні  $B_x^x$  розраховується як елемент матриці коефіцієнтів у матричному виразі розрахунку моменту диполя (2) у відповідності до складової моменту  $\sum_{i=1}^N M_{xi}$ , що розглядається як сумарний (приведений). Координати приведення сумарних моментів позначаємо як  $x_0, y_0, z_0$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^x dx dy = k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{3R_x^2 - R^2}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x-x_0)^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$$

$$= \frac{2x_0\pi}{\Delta z} k - \frac{2x_0\pi}{\Delta z} k = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^x dx dy = k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{3R_x^2 - R^2}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(x-x_0)^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy =$$

$$= \frac{2y_0\pi}{\Delta z} k - \frac{2y_0\pi}{\Delta z} k = 0$$

де  $k = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N M_{xi}$ ;  $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0$ .

Для складових від моменту  $\sum_{i=1}^N M_{yi}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^y dx dy = 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{R_x R_y}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy +$$

$$+ 3kx_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^y dx dy = 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{R_x R_y}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta y^2 \Delta x}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy +$$

$$+ 3ky_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy = 0$$

де  $k = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N M_{yi}$ .

Для складових від моменту  $\sum_{i=1}^N M_{zi}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^z dx dy = 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{R_x R_z}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \Delta z \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy +$$

$$+ 3k \Delta z x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy = 2k\pi = \frac{\mu_0}{2} \sum_{i=1}^N M_{zi}$$

Отже:

$$\sum_{i=1}^N M_{zi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^z dx dy, \tag{8}$$

Враховуємо рівність коефіцієнтів (2)  $B_x^z = B_z^x$  можна записати вираз для моменту  $\sum_{i=1}^N M_{zi}$ :

$$B_{yi} = M_x \left( \frac{3R_y R_x}{4\pi R^5} \right) + M_y \left( \frac{3R_y^2 - R^2}{4\pi R^5} \right) + M_z \left( \frac{3R_y R_z}{4\pi R^5} \right), \tag{9}$$

Таким чином, рівняння (3)-(9) утворюють основу математичної моделі, яка забезпечує зв'язок між інтегральними характеристиками вимірюваного магнітного поля та компонентами приведенного магнітного моменту точкового диполя. Це створює основу для розв'язання оберненої задачі магнітометрії в умовах обмеженої кількості точок вимірювання.

На основі рівнянь (3)-(9) виконано аналітичні обчислення інтегралів для всіх комбінацій компонент магнітної індукції  $B_x, B_y, B_z$  відносно координат  $x, y, z$ , для визначення тих складових поля, які вносять суттєвий вклад у формування приведенного магнітного моменту точкового диполя. Результати розрахунків наведено у таблиці 1, що відображає, для яких комбінацій компонент поля інтегральна характеристика дорівнює нулю, а для яких - має ненульове значення. Нульові інтеграли (=0) відповідають симетричним складовим поля, які компенсуються в межах області інтегрування, тоді як ненульові ( $\neq 0$ ) характеризують напрямки, уздовж яких виникає результуючий вплив поля на приведений момент.

Виходячи з результатів розрахунків, проведених за принципом суперпозиції магнітного поля, можна сформулювати рівняння для складових магнітного моменту приведенного диполя (10)-(13).

**Таблиця 1.** Результати розрахунків

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^z dx dy \neq 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^z dx dy = 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_y^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_y^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_y^z dx dy = 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_y^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_y^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_y^z dx dy \neq 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_z^x dx dy \neq 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_z^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_z^z dx dy = 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_z^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_z^y dx dy \neq 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_z^z dx dy = 0$

Виходячи з результатів розрахунків, проведених за принципом суперпозиції магнітного поля, можна сформулювати рівняння для складових магнітного моменту приведенного диполя (10)-(13). Це дозволяє описати внесок кожного джерела у загальне магнітне поле та забезпечує основу для точного визначення положення і характеристик диполя в оберненій задачі магнітометрії.

$$\sum_{i=1}^N M_{zi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_x dx dy, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N M_{xi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_z dx dy, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^N M_{zi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_y dx dy, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N M_{yi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_z dx dy, \quad (13)$$

Щоб підтвердити коректність побудованої математичної моделі, необхідно виконати чисельний експеримент, який проводиться у два етапи.

На першому етапі розв'язується пряма задача. Обчислюється розподіл магнітної індукції від одиничного диполя у заданій площині. Диполь розташований на відстані п'яти метрів від початку координат і орієнтований вздовж осі OZ. Для спрощення розрахунків приймаємо  $\mu_0 = 1$ . Однією з основних проблем на цьому етапі є визначення сітки точок у площині, на якій буде обчислюватися магнітна індукція, оскільки це безпосередньо впливає на розмірність розрахункових масивів та обчислювальні ресурси.

Приклад розрахункової сітки представлена на рис. 4 – рис.5. Рис. 4 ілюструє вимірювальний контур S та створений зовнішній контур C, які є основою для постановки та розв'язання задачі машинного розрахунку магнітного поля. Контур S задає вихідну сітку вимірів, на якій фіксується значення магнітної індукції, а контур C позначає розширену границю області, що охоплює контур S для подальшого чисельного поширення розрахунків.

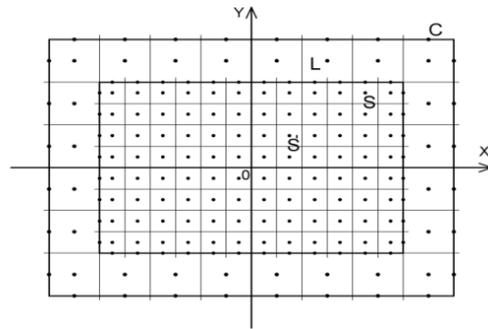


Рисунок 4. Контур виміру S та створений контур C

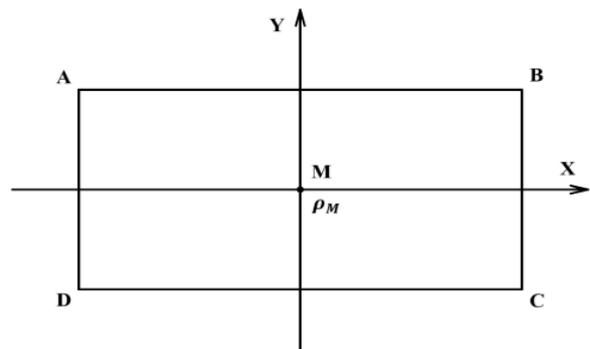


Рисунок 5. Прямокутна комірка сітки

Рис. 5 відображає прямокутну комірку сітки, яка є базовою геометричною одиницею дискретизації для чисельних розрахунків. Комірка характеризується кроками дискретизації за осями  $\Delta X$  та  $\Delta Y$ , а поверхневий заряд, що бере участь у формуванні магнітного поля, вважається зосередженим у центрі цієї комірки.

На другому етапі здійснюється розв'язок оберненої задачі - поновлення магнітного моменту диполя, який був заданий у прямій задачі. Основна складність полягає у тому, що розрахунок складових моменту ідеально ведеться на нескінченній сітці, реалізувати яку у чисельному експерименті неможливо. Тому перевірка адекватності запропонованої математичної моделі можлива лише через розв'язок цих задач у рамках скінченної сітки.

Магнітну індукцію визначаємо у вигляді проєкцій на осі декартової системи координат:  $B_x, B_y, B_z$ .

Цей підхід дозволяє як оцінити просторовий розподіл магнітного поля, так і провести коректне порівняння результатів прямої та оберненої задач, що є ключовим для перевірки точності та стійкості чисельної моделі.

$$B_{xi} = M_x \left( \frac{3R_x^2 - R^2}{4\pi R^5} \right) + M_y \left( \frac{3R_x R_y}{4\pi R^5} \right) + M_z \left( \frac{3R_x R_z}{4\pi R^5} \right), (14)$$

$$B_{yi} = M_x \left( \frac{3R_y R_x}{4\pi R^5} \right) + M_y \left( \frac{3R_y^2 - R^2}{4\pi R^5} \right) + M_z \left( \frac{3R_y R_z}{4\pi R^5} \right), (15)$$

$$B_{zi} = M_x \left( \frac{3R_z R_x}{4\pi R^5} \right) + M_y \left( \frac{3R_z R_y}{4\pi R^5} \right) + M_z \left( \frac{3R_z^2 - R^2}{4\pi R^5} \right), (16)$$

Обчислення індукцій від окремих складових магнітного моменту диполя проводиться шляхом обнулення інших компонент у відповідних виразах. Використання методики, наведеної у [9], дозволяє суттєво зменшити розмірність розрахункових масивів.

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}, (17)$$

$$\frac{\partial B_{xi}}{\partial x} = M_x \left( \frac{3}{4\pi} \left( \frac{2R_x R^5 - 5R^3 R_x^3}{R^{10}} \right) + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3RR_x}{R^6} \right) \right) + M_y \left( \frac{3}{4\pi} R_y \left( \frac{R^5 - 5R^3 R_x^2}{R^{10}} \right) \right) + M_z \left( \frac{3}{4\pi} R_z \left( \frac{R^5 - 5R^3 R_x^2}{R^{10}} \right) \right), (18)$$

$$\frac{\partial B_{yi}}{\partial y} = M_x \left( \frac{3}{4\pi} R_x \left( \frac{R^5 - 5R^3 R_y^2}{R^{10}} \right) \right) + M_y \left( \frac{3}{4\pi} \left( \frac{2R_y R^5 - 5R^3 R_y^3}{R^{10}} \right) + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3RR_y}{R^6} \right) \right) + M_z \left( \frac{3}{4\pi} R_z \left( \frac{R^5 - 5R^3 R_y^2}{R^{10}} \right) \right), (19)$$

Застосуємо до виразу (14) операцію  $\partial/\partial x$ , а до виразу (15) операцію  $\partial/\partial y$ . Визначимо поверхневу густину вторинних джерел на відповідних ділянках розрахункової сітки  $-\partial B_z/\partial z = \rho$ , і потім  $B_z$ .

Розрахункова сітка була обрана відповідно до умов, викладених у [11]. Її розміри становлять 6 метрів вздовж осі  $OX$  та 4 метри вздовж осі  $OY$ . Відновлений магнітний момент одиничного диполя, отриманий на основі магнітної індукції, розподіленої у вузлах цієї сітки згідно з запропонованою математичною моделлю, дає такі результати.

Значення  $M_z$ , розраховане за індукцією  $B_x$ , склало 0,03 Вб·м, а за індукцією  $B_y$  - 0,015 Вб·м. Складові  $M_x = -0,14 \cdot 10^{-6}$ ,  $M_y = -0,33 \cdot 10^{-8}$  близькі до машинного нуля і дуже наближені до значень магнітного моменту з прямої задачі. Водночас значення  $M_z$  суттєво відрізняється від одиниці і становить лише 2–3% від магнітного моменту у прямій задачі. Така розбіжність пояснюється тим, що формули розрахунку у математичній моделі передбачають інтегрування на нескінченній сітці, що неможливо реалізувати у чисельному експерименті.

Для покращення результатів можна застосувати математичну модель та чисельний експеримент, наведені у [10], та поступово розширити сітку вимірювань на метр уздовж кожної осі у площині, використовуючи лише значення магнітної індукції на вже розрахованій сітці. Після такого розширення отримуємо:  $M_z$  за  $B_x = 0,075$  Вб·м,  $M_z$  за  $B_y = 0,046$  Вб·м, що все ще далеко від задовільного результату.

Найбільш адекватні результати досягаються при розширенні сітки розповсюдження магнітної індукції до  $200 \times 200$  м, як запропоновано у [11]. У цьому випадку  $M_z$ , розраховане за  $B_x$ , становить 0,93 Вб·м, а за  $B_y$  - також 0,93 Вб·м;  $M_x = 0,88 \cdot 10^{-3}$ ,  $M_y = -0,74 \cdot 10^{-5}$ . Розбіжність від справжнього магнітного моменту диполя складає приблизно 7%, тоді як розбіжність між нульовим значенням і одиницею становить близько тисячі разів.

Результати розрахунку порівнювалися з опублікованими чисельними даними та методиками розширення сітки, наведеними в роботах [9]-[11]. В результаті отриманий результат під час розв'язання оберненої задачі є цілком задовільним. Проте точність розрахунків може бути суттєво підвищена шляхом подальшого розширення сітки вимірів. Наприклад, для сітки розміром  $1000 \times 1000$  точок похибка розрахунку становить менше 1%. Водночас слід враховувати, що це стосується чисельного експерименту; у натурних вимірах досягти такої точності неможливо. Точність реальних вимірів обмежується не лише причинами, зазначеними у [7], але й чутливістю датчиків.

На практиці рекомендується поширювати сітку вимірів до таких розмірів, коли результати сусідніх розрахунків при подальшому розширенні сітки будуть співрозмірні з похибкою вимірювальної системи. Варто зазначити, що у чисельному експерименті для цього розширення не потрібно розв'язувати пряму задачу заново - достатньо використовувати дані попередніх розрахунків для сітки  $4 \times 6$  м, згідно з математичною моделлю, наведеною у [10].

Подальший розвиток досліджень передбачає проведення натурного експерименту, у якому прямі виміри магнітного поля на замкнутому контурі можна перевіряти та коригувати за допомогою виразів (14-19) та методики, наведеної у [11]. Використання цієї методики дозволяє доволі розширювати сітку вимірів без безпосереднього вимірювання магнітного поля датчиками. Природно, що результати натурного експерименту будуть відрізнятися від чисельного через ряд факторів: чутливість датчиків, умови проведення експерименту, анізотропію середовища, фізико-хімічні властивості води (якщо експеримент проводиться у басейні) та інші впливи.

У подальших дослідженнях також планується розробка математичної моделі для відновлення координат приведенного магнітного моменту диполя, що дозволить проводити як чисельні, так і натурні експерименти з підвищеною точністю.

**Конфлікт інтересів.** Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

### V. ВИСНОВКИ

Проведений аналіз математичних моделей розв'язку обернених задач магнітометрії та дослідження розробленої математичної моделі для відновлення приведеного магнітного моменту точкового диполя з урахуванням інтегральних властивостей магнітного поля дозволяє сформулювати наступні висновки:

1. У випадках, коли відстань до точок вимірювання магнітного поля значно перевищує геометричні розміри об'єкта пошуку, цей об'єкт можна апроксимувати як точковий диполь із приведеним магнітним моментом. Для визначення цього моменту достатньо використовувати значення магнітної індукції, зафіксовані на замкнутому контурі.

2. Для розширення сітки вимірів ефективно застосовується методика, наведена у [10], [11]. Це пояснюється тим, що розроблена математична модель базується на інтегральних характеристиках магнітного поля, які формально визначені на нескінченній сітці.

3. Точність розрахунків безпосередньо залежить від розмірності сітки вимірів. Однак необмежено поширювати сітку немає сенсу: достатньо обмежити її розмір таким чином, щоб результати сусідніх розрахунків при збільшенні сітки були співрозмірні з похибкою вимірювальної системи.

Планується проведення натурального експерименту, який дозволить перевірити розроблену модель та здійснити розв'язок оберненої задачі магнітометрії для поновлення координат приведеного магнітного моменту точкового диполя. Цей етап досліджень є ключовим для практичного підтвердження точності моделі та методики обробки даних.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Zaporozhets Y. Mathematical model of detection and identification of underwater ferromagnetic objects / Y. Zaporozhets, V. Krol, D. Shareiko // *Elect. equip. ships: collection scientific papers Mykolaev*. – 1992. – № 2. – С. 82–89.
- [2] Primin M. Algorithms for the analytical solution of the magnetostatics inverse problem for the signal source of the dipole model / M. Primin, I. Nedayvoda // *Cybern syst anal*. – 2023. – № 59. – С. 821–831.
- [3] Прімін М. А. Алгоритм аналітичного вирішення зворотного завдання магнітостатики для джерела поля дипольної моделі / М. А. Прімін, І. В. Недайвода // *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. – 2015. – № 14. – С. 5–15.
- [4] Зейгельман М. С. Обернена задача магніторозвідки: особливості технології пошуку багатоваріантних розв'язків / М. С. Зейгельман, Н. В. Панченко // *Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики*. – 2011. – С. 158–169.
- [5] Direct and inverse magnetometry problems for a set of horizontally located circular cylindrical bodies / E. G. Bulah // *Rep. Nat. Acad. Sci. Ukraine*. – 2019. – № 5. – С. 136–141.
- [6] Екстремальні ітераційні методи у зворотному завданні магнітометрії при косому намагнічуванні / П. А. Міненко // *Доп. НАН України*. – 2007. – № 5. – С. 131–135.
- [7] Primin M. Algorithm for solving the inverse problem of magnetostatics in magnetocardiography: new approaches and results / M. Primin, I. Nedajvoda // *Electron. model*. – 2006. – № 5. – С. 99–116.
- [8] Minenko P. A. On the search for selectively extremal solutions to the inverse problem of magnetometry during studies on the crystalline foundation / P. A. Minenko, R. V. Minenko // *Sci. Visn. Nat. mountain univ*. – 2016. – № 9. – С. 39–44.
- [9] Expansion of measurement grid in field problems / I. Biliuk [та ін.] // *2021 IEEE international conference on modern electrical and energy systems (MEES), Kremenchuk*. – 2021. – С. 1–5.
- [10] Reduction of Numerical Arrays in Magnetometry Problems Calculations / D. Shareyko [та ін.] // *2022 IEEE international conference on modern electrical and energy systems (MEES), Kremenchuk*. – 2022. – С. 1–5.
- [11] Machine Calculation of the Problem of Expansion of the Magnetic Field Measurement Grid / I. Biliuk [та ін.] // *2023 IEEE international conference on modern electrical and energy systems (MEES), Kremenchuk*. – 2023. – С. 1–6.

Надійшла (Received) 02.10.2025;

Прийнята (Accepted) 04.11.2025;

Опублікована (Published) 30.03.2026;

## MATHEMATICAL MODEL OF RECOVERY OF THE REDUCED MAGNETIC MOMENT OF A POINT DIPOLE FOR IDENTIFICATION OF FERROMAGNETIC OBJECTS

SHAREYKO D.U.

candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the

- department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6460-9331>, e-mail: [dshareyko.mk@gmail.com](mailto:dshareyko.mk@gmail.com);
- BILIUK I.S. candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the department of automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1654-7468>, e-mail: [ivanbilyuk@gmail.com](mailto:ivanbilyuk@gmail.com);
- SAVCHENKO O.V. head of laboratories, department of automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9718-7857>, e-mail: [savchenko1984@gmail.com](mailto:savchenko1984@gmail.com);
- MARZIAVKO V.A. assistant professor, department of electric power, Electrical Engineering and Electromechanics, Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-9215>, e-mail: [vitalijmardzavko@gmail.com](mailto:vitalijmardzavko@gmail.com);
- TODOSIENKO A.M. postgraduate student of the Department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-3692-4723>, e-mail: [atodosienko@gmail.com](mailto:atodosienko@gmail.com);

**Purpose of the work.** The purpose of the work is to develop and study a mathematical model for restoring the reduced magnetic moment of a point dipole based on the integral characteristics of the magnetic field, which allows to ensure the correct solution of the inverse problem of magnetometry in conditions of limited a priori information and real noise interference.

**Research methods.** The work uses mathematical modeling, analytical methods of inverse magnetometry, integral transformations and a numerical experiment to assess the accuracy of restoring the magnetic moment components. To construct the calculated dependencies, the field discretization on a rectangular grid of measuring points and algorithms for minimizing the reconstruction error were used.

**Results.** A generalized model of the relationship between the measured components of magnetic induction and the components of the magnetic moment vector of the dipole was constructed. A mathematical algorithm for calculating the reduced moment based on the sums of the integral characteristics of the field in the coordinate directions was proposed. A study was conducted for different sizes of the measurement grid, which confirmed the efficiency of the method and showed that the reconstruction error decreases with an increase in the number of measurement points. The results obtained indicate the possibility of reliable identification of the object from a limited set of magnetic field data.

**Scientific novelty.** A method for restoring the reduced magnetic moment is proposed, which is based not on local field values, but on integral characteristics, which provides increased noise resistance and reduces the influence of medium inhomogeneities. The effectiveness of using the discrete-integral approach in inverse magnetometry problems is shown.

**Practical value.** The developed model can be used in systems for detecting and classifying ferromagnetic objects in underwater, underground and terrestrial environments, in particular in tasks of non-destructive testing, technical diagnostics and search and rescue operations. The proposed approach allows the implementation of small-sized measuring systems with reduced requirements for the accuracy of sensor positioning.

**Keywords:** magnetic dipole; inverse magnetometry problem; reduced magnetic moment; integral field characteristic; numerical experiment; object identification.

## REFERENCES

- [1] Zaporozhets, Y., Krol, V., & Shareiko, D. (1992). Mathematical model of detection and identification of underwater ferromagnetic objects. *Electrical equipment of ships: Collection of scientific papers*, (2), 82–89. Mykolaiv.
- [2] Primin, M., & Nedayvoda, I. (2023). Algorithms for the analytical solution of the magnetostatics inverse problem for the signal source of the dipole model. *Cybernetics and Systems Analysis*, 59(6), 821–831.
- [3] Primin, M. A., & Nedayvoda, I. V. (2015). Algorithm for the analytical solution of the inverse problem of magnetostatics for a dipole model field source. *Computer Tools, Networks and Systems*, (14), 5–15.
- [4] Zeigelman, M. S., & Panchenko, N. V. (2011). Inverse problem of magnetoprospecting: Features of the technology for searching multi-variant solutions. *Theoretical and Applied Aspects of Geoinformatics*, 158–169.
- [5] Bulah, E. G. (2019). Direct and inverse magnetometry problems for a set of horizontally located circular cylindrical bodies. *Reports of the National Academy*

- of Sciences of Ukraine*, (5), 136–141.
- [6] Minenko, P. A. (2007). Extremal iterative methods in the inverse problem of magnetometry under oblique magnetization. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (5), 131–135.
- [7] Primin, M., & Nedajvoda, I. (2006). Algorithm for solving the inverse problem of magnetostatics in magnetocardiography: New approaches and results. *Electronics and Modelling*, (5), 99–116.
- [8] Minenko, P. A., & Minenko, R. V. (2016). On the search for selectively extremal solutions to the inverse problem of magnetometry during studies on the crystalline foundation. *Scientific Bulletin of the National Mining University*, (9), 39–44.
- [9] Biliuk, I., et al. (2021). Expansion of measurement grid in field problems. In *2021 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)* (pp. 1–5). Kremenchuk. IEEE.
- [10] Shareyko, D., et al. (2022). Reduction of numerical arrays in magnetometry problems calculations. In *2022 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)* (pp. 1–5). Kremenchuk. IEEE.
- [11] Biliuk, I., et al. (2023). Machine calculation of the problem of expansion of the magnetic field measurement grid. In *2023 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)* (pp. 1–6). Kremenchuk. IEEE.