

УДК 621.313

ВДОСКОНАЛЕННЯ ПІДХОДІВ ЩОДО ЛІНЕАРИЗАЦІЇ МАГНІТНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОСЕРДЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ

КОЦУР М.І.

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електричних та електронних апаратів, Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0072-5437>, e-mail: kotsur_m@ukr.net;

ДАНИЛЬЧЕНКО Д.О.

канд. техн. наук, доцент, професор кафедри передачі електричної енергії, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7912-1849>, e-mail: dmytro.danylchenko@khp.edu.ua;

СИНЕЦЬКИЙ А.В.

аспірант, Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1859-4171>, e-mail: xibi-tur@ukr.net;

Мета роботи. Вдосконалення математичної моделі лінеаризації магнітних властивостей електротехнічної сталі осердя статора та ротора на основі метода кусочно-лінійної апроксимації кривої намагнічування, що дозволить значно скоротити кількість нелінійних рівнянь, та значно зменшити час чисельної реалізації 3D та 2D коло-польової моделі асинхронного електромеханічного перетворювача при збереженні точності чисельних розрахунків.

Методи дослідження. Використовуються аналітичні методи розрахунку електромагнітного поля, метод скінчених елементів, аналітичні методи розрахунку електричних та магнітних кіл, методи кусочно-лінійної апроксимації.

Отримані результати. Вдосконалено математичні моделі щодо лінеаризації кривої намагнічування для електротехнічної сталі осердя статора та ротора просторових 3D та плоско-паралельних 2D геометричних моделей осердя статора та ротора активної частини електромеханічного перетворювача змінного струму. Реалізовано підхід, щодо дроблення 2D загальної геометричної моделі осердя статора та ротора електромеханічного перетворювача на n -ну кількість елементарних площин осердя статора та ротора з застосуванням лінійної функції кривої намагнічування при $\mu_r = \text{const}$. На основі даних результатів 2D польового моделювання дослідного зразка електромеханічного перетворювача для режиму неробочого ходу, у порівнянні з результатами моделювання при врахуванні загальної кривої намагнічування за всією розрахунковою областю, отримані значення нев'язки за струмом якоря, яка не перевищує 2,654%. Це дозволило знизити в 4,89 разів час чисельних розрахунків для 2D нестационарної постановки задачі при застосуванні спеціального програмного забезпечення Comsol Multiphysics.

Наукова новизна. Вдосконалено метод лінеаризації магнітних властивостей електротехнічної сталі осердя статора та ротора електромеханічного перетворювача, який дозволяє для окремих ділянок розрахункової області осердя статора та ротора застосовувати постійне значення відносної магнітної проникності $\mu_r = \text{const}$. з достатньою похибкою чисельних розрахунків.

Практична цінність. Запропонована методика щодо лінеаризації кривої намагнічування для електротехнічної сталі осердя статора та ротора просторових 3D та плоско-паралельних 2D геометричних моделей активної частини електромеханічного перетворювача змінного струму може бути застосована для різних типів електричних машин.

Ключові слова: кусочно-лінійна апроксимація, крива намагнічування, чисельні розрахунки, осердя, електрична машина.

І. ВСТУП

Сучасний етап розвитку електромеханіки характеризується жорсткими вимогами до точності проектування та енергоефективності електромеханічних перетворювачів (ЕМП) змінного струму, які залишаються основними споживачами електроенергії в промисловості. Проектування високоефективних ЕМП

неможливе без детального аналізу магнітного поля, що зазвичай реалізується за допомогою чисельних методів, зокрема методу скінчених елементів (МСЕ) [1]. Однією з головних проблем при моделюванні електромагнітних процесів в ЕМП є сильна нелінійність магнітних характеристик феромагнітних матеріалів осердя статора та ротора ЕМП. Залежність магнітної індукції від напруженості поля $B(H)$, відома як

© Коцур М.І., Данильченко Д.О., Синецький А.В., 2026

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (CC-BY-SA 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2026-1-1>

крива намагнічування, має складний характер з яскраво вираженою зоною насичення. Пряме врахування повної нелінійності у 3D та 2D польових моделях вимагає колосальних ітераційних ресурсів, що значно сповільнює розрахункових процес при застосуванні МСЕ [1], [2]. Незважаючи на велику кількість існуючих аналітичних залежностей для опису кривої намагнічування (експоненціальні, степеневі функції, сплайни), пошук «золотої середини» між математичною простою моделі та її фізичною достовірністю залишається відкритим питанням. Лінеаризація на певних ділянках або застосування диференціальної магнітної проникності дозволяє пришвидшити розрахунки, проте вимагає ретельного підбору показника ступеня n (зазвичай від 7 до 11). В [12] автор вказує на ефективність використання степеневих рядів для опису «спинки» кривої намагнічування, що дозволяє зменшити похибку розрахунку магнітного опору зубцевої зони ЕМП.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Для вирішення крайових задач магнітостатики та динаміки магнітного поля в ЕМП за допомогою методу скінченних елементів, необхідно мати безперервну та диференційовану функцію зв'язку між вектором магнітної індукції \mathbf{B} та напруженістю магнітного поля \mathbf{H} [3]-[5]. Аналіз літератури дозволяє виділити декілька фундаментальних підходів до вирішення цієї задачі. Історично першими стали моделі, що використовують дробово-раціональні або експоненціальні залежності [4]-[6]. До них відноситься модель Фроліха-Кеннелі [5]. Ця модель описується виразом:

$$B = \frac{H}{a + bH}.$$

Хоча модель є зручною для аналітичних розрахунків магнітних кіл, вона демонструє значні похибки (до 10-15%) у зоні «коліна» кривої та не враховує початкову магнітну проникність [5]-[6]. До аналітичних моделей на основі елементарних функцій також відноситься експоненціальна апроксимація. У роботах [7]-[8] запропоновано використовувати суми експонент для кращого опису переходу до насичення. Такі моделі забезпечують високу гладкість, що може забезпечити погану збіжність за методом Ньютона.

Для підвищення точності в інженерних розрахунках часто застосовують кусково-поліноміальну інтерполяцію. Одною з різновидностей кусково-поліноміальну інтерполяцію є інтерполяція сплайнами. Як зазначають автори в [1] та [9]-[10], використання кубічних сплайнів дозволяє досягти мінімальної нев'язки з експериментальними даними. Головною перевагою є неперервність другої похідної, що забезпечує стабільність розрахунку диференціальної магнітної проникності dB/dH . Головним недоліком щодо застосування кубічних сплайнів можуть генерувати фізично некоректні перегиби (немонотонність) при

недостатній кількості вихідних точок, що веде до розбіжності ітераційного процесу [11]. Для апроксимації характеристик сучасних електротехнічних сталей (наприклад, марки 2412 або 2411) часто використовують метод найменших квадратів (МНК) для мінімізації середньоквадратичного відхилення. Автором у [12] запропоновано модель виду:

$$H = (a + b \cdot B^n) \cdot B.$$

Ця модель широко використовується в комерційному ПЗ для польових розрахунків (ANSYS Maxwell, MagNet). Вона добре описує глибоке насичення, але вимагає ретельного підбору показника ступеня n (зазвичай від 7 до 11). В [12] автор вказує на ефективність використання степеневих рядів для опису «спинки» кривої намагнічування, що дозволяє зменшити похибку розрахунку магнітного опору зубцевої зони ЕМП.

Сучасні дослідження також спрямовані на створення універсальних функцій, які мають властивість однаково точно описувати усі ділянки кривої намагнічування. Такі функції є основою для трансцендентних та гіперболічних моделей [13]. Одним з різновидів цих моделей є арктангенсові та гіперболічні моделі. В роботі [14] запропоновано описувати криву намагнічування сталі за допомогою функції виду:

$$B = k_1 \cdot \arctg(k_2 H) + \mu_0 H$$

Така структура автоматично враховує лінійне зростання індукції після повного насичення сталі (нахил до μ_0), що є критичним для розрахунку ЕМП великої потужності.

Таким чином, аналіз показує, що для польових та коло-польових розрахунків ЕМП найбільш перспективним є поєднання сплайн-інтерполяції (для робочих режимів) та експоненціальної екстраполяції (для розрахунку режимів пуску та короткого замикання). Вибір методу лінеаризації на кожній ітерації МСЕ дозволяє скоротити час розрахунку на 20-30% без втрати точності визначення моменту та електричних та магнітних втрат, а також збільшити збіжність в процесі чисельних розрахунків.

III. МЕТА РОБОТИ

Метою роботи є вдосконалення математичної моделі лінеаризації магнітних властивостей електротехнічної сталі осердя статора та ротора на основі метода кусочно-лінійної апроксимації кривої намагнічування, що дозволить значно скоротити кількість нелінійних рівнянь та значно зменшити час чисельної реалізації 3D та 2D коло-польової моделі асинхронного ЕМП при збереженні точності чисельних розрахунків.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГУ МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

У більшості випадків, саме із-за нерівномірного розподілу електромагнітного поля, яке викликане нерівномірним магнітним опором по контуру замикання основного магнітного потоку, має місце нерівномірне насичення електротехнічної сталі на різних ділянках осердя статора та ротора ЕМП. Тому для більш детального врахування процесів насичення електротехнічної сталі в нестационарних режимах роботи ЕМП є необхідність у розробці математичної моделі, яка заснована на уявленні суцільного нелінійного середовища активної частини ЕМП та схеми заміщення у вигляді взаємопов'язаних магнітних та електричних кіл, яка являється дискретно-інтегральним аналогом рівнянь Максвелла.

Відомо, що електромагнітне поле описується рівняннями Максвелла [107]:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta} \tag{1}$$

$$\text{rot}\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

де \vec{E}, \vec{H} - вектори напруженості відповідно електричного та магнітного полів; \vec{B} - вектор магнітної індукції; $\vec{\delta}$ - вектор щільності струму.

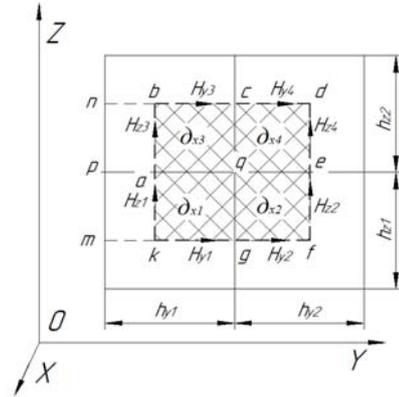
Використовуючи кінцево-різницеву апроксимацію рівнянь (1), (2), безперервний простір поля можна представити у вигляді елементарних об'ємів EO, в середні яких вектори $\vec{B}, \vec{E}, \vec{H}$ та $\vec{\delta}$ розкладаються на складові по координатним осям та приймають деякі усереднені значення, при цьому в декартовій системі координат ці EO матимуть вигляд прямокутних паралелепіпедів. Розглянемо проекцію чотирьох EO, що мають кінцеві розміри, на площину YOZ (рис.1, а). Усереднюючи складові напруженості магнітного поля по вісі Y та Z в межах відрізків $ka, ab, bc, cd, ed, fe, kg, gf$ та складові щільності електричного струму по вісі X в межах площ $S_{abcd}, S_{kaqf}, S_{gqef}$ кожного EO, рівняння $\text{rot}_x\vec{H} = \vec{\delta}_x$ можна наближено записати у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{H_{z2} - H_{z1}}{2} h_{z1} + \frac{H_{z4} - H_{z3}}{2} h_{z2} + \dots \\ & \dots + \frac{H_{y1} - H_{y3}}{2} h_{y1} + \frac{H_{y2} - H_{y4}}{2} h_{y2} = \\ & = \delta_{x1} S_{kaqg} + \delta_{x2} S_{gqef} + \delta_{x3} S_{abcd} + \delta_{x4} S_{qcde}. \end{aligned} \tag{3}$$

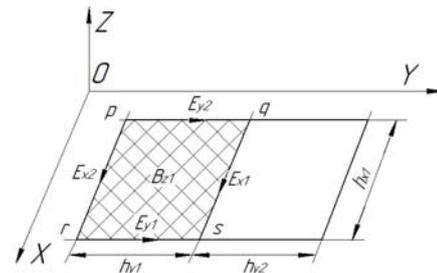
На рис. 1, б наведені проекції двох EO на площину XOY. Усереднюючи складові напруженості електричного поля по вісі X та Y в межах відрізків qs, rs, pr, pq , та складові індукції магнітного поля

по вісі Z в межах S_{pqrs} , рівняння $\text{rot}_z\vec{E} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ у наближеному вигляді можна представити як:

$$\begin{aligned} E_{x2}h_{x1} + E_{y1}h_{y1} - E_{x1}h_{x1} - E_{y2}h_{y1} = \dots \\ \dots = -\frac{\partial B_{z1}}{\partial t} (h_{x1}h_{y1}). \end{aligned} \tag{4}$$



а) площина YOZ;



б) площина XOY;

Рисунок 1. Проекції елементарних об'ємів розрахункові області активної частини ЕМП на площину YOZ та XOY

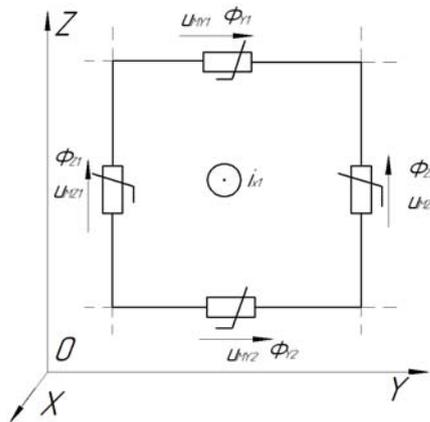
За допомоги схеми заміщення розрахункової області EO (рис. 2) рівняння (3), (4) можна записати в наступному співвідношенні:

$$\begin{cases} u_{my2} + u_{mz2} - u_{my1} - u_{mz1} = i_{x1}; \\ u_{x2} + u_{y1} - u_{x1} - u_{y1} = -\frac{d\Phi_{z1}}{dt} = e_{kz1}, \end{cases} \tag{5}$$

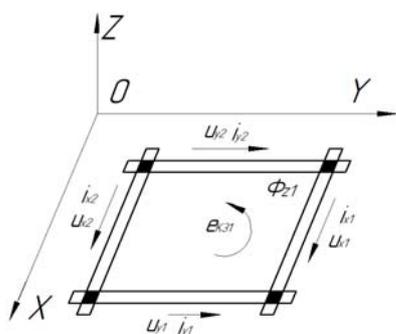
де

$$\begin{cases} u_{mz1} = \frac{1}{2} (H_{z1}h_{z1} + H_{z3}h_{z2}); \\ u_{mz2} = \frac{1}{2} (H_{z2}h_{z1} + H_{z4}h_{z2}); \\ u_{my1} = \frac{1}{2} (H_{y3}h_{y1} + H_{y4}h_{y2}); \\ u_{my2} = \frac{1}{2} (H_{y1}h_{y1} + H_{y2}h_{y2}); \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} i_{x1} &= \delta_{x1} S_{kaqg} + \delta_{x2} S_{gqef} + \delta_{x3} S_{abcq} + \delta_{x4} S_{qede}; & \bar{\delta} &= \gamma \bar{E}, \\ u_{x1} &= E_{x1} h_{x1}; u_{x2} = E_{x2} h_{x1}; & (6) & \text{де } \gamma - \text{питома провідність матеріалу.} \\ u_{y1} &= E_{y1} h_{y1}; u_{y2} = E_{y2} h_{y1}; \\ \Phi_{z1} &= B_{z1} S_{rpqs}. \end{aligned} \right.$$



а) контур магнітного кола;



б) контур електричного кола;

Рисунок 2. Контури магнітного та електричного кіл схеми заміщення розрахункової області

Рівняння (5) можна розглядати як рівняння, що записані за другим законом Кіргофа для контурів магнітного та електричного кіл, в яких величини i_{x1} та e_{kz} являються відповідно контурними МДС та ЕРС (рис. 2). Таким чином, усереднюючи складові векторів електромагнітного поля \vec{B} , \vec{H} , \vec{E} та $\vec{\delta}$ в середині кожного ЄО, розрахункову область суцільного нелінійного провідного середовища активної частини ЕМП можна представити у вигляді схеми заміщення, яка має взаємопов'язані магнітні та електричні кола по яким протікають магнітні потоки та електричні струми та на яких встановлюються магнітна та електрична напруга. Рівняння (4) та (5) при аналізі електромагнітних полів повинні доповнюватися параметричними рівняннями зв'язку $\vec{B}(\vec{H})$ та $\vec{\delta}(\vec{E})$. Якщо зневажити струмами зміщення у порівнянні зі струмомами провідності та не враховувати теплові процеси, вектори $\vec{\delta}$ та \vec{E} будуть зв'язані лінійними рівняннями:

Зв'язок між індукцією та напруженістю магнітного поля в загальному випадку може бути нелінійним, неоднозначним та залежить від напрямку векторів \vec{B} та \vec{H} . Якщо знехтувати явищем гістерезису та прийняти колінарність векторів \vec{B} та \vec{H} , то в якості єдиної залежності $B(H)$ можна прийняти основну криву намагнічення матеріалу. Тоді в цьому випадку:

$$\vec{B} = \mu(H) \cdot \vec{H}, \tag{8}$$

де $\mu(H)$ - нелінійна скалярна функція.

Для координатних складових \vec{B} та \vec{H} рівняння (8) можна написати у наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} B_x &= \mu(H) H_x = \mu\left(\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}\right) H_x; \\ B_y &= \mu(H) H_y = \mu\left(\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}\right) H_y; \\ B_z &= \mu(H) H_z = \mu\left(\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}\right) H_z. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Згідно рівняння (9) кожна складова індукції нелінійно залежить від усіх складових напруженості магнітного поля, тобто:

$$\left\{ \begin{aligned} B_x &= f(H_x, H_y, H_z); \\ B_y &= f(H_x, H_y, H_z); \\ B_z &= f(H_x, H_y, H_z) \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Спочатку розглянемо плоско-паралельне магнітне поле ($B_z = H_z = 0$). Маючи залежність $\mu(H)$ для різних значень складової напруженості H_y , за допомогою (9) побудуємо сімейство характеристик $B_x(H_x)$. На рис. 3 наведені частини двох таких кривих $B_x = f(H_x, H_{ym})$ та $B_x = f(H_x, H_{yn})$.

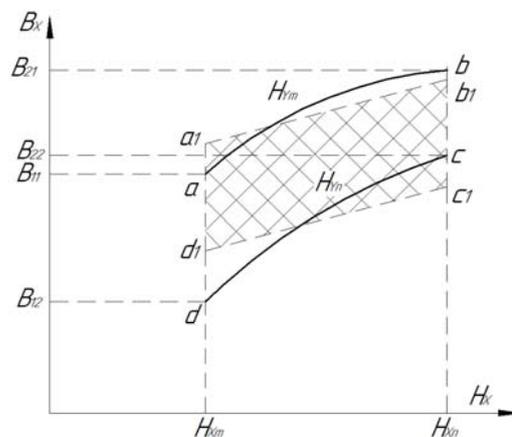


Рисунок 3. Щодо визначення апроксимуючих коефіцієнтів залежності

В інтервалі складових напруженості магнітного поля $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$ та $H_{ym} \leq H_y \leq H_{yn}$ складова індукції B_x визначається безліччю точок, що розташовані в криволінійному чотирикутнику a, b, c, d . Апроксимуємо чотирикутник паралелограмом a_1, b_1, c_1, d_1 , тоді в середині цього паралелограму складова B_x може бути визначена через складові H_x та H_y за наступним співвідношенням:

$$B_x = \mu_{11}H_x + \mu_{12}H_y + B_{0x}. \quad (11)$$

Коефіцієнти кусочно-лінійної апроксимації μ_{11} , μ_{12} , B_{0x} рівняння (11) можуть бути визначені із наступних міркувань. З рис. 3 для точок $a(B_{11}, H_{xm}, H_{ym})$, $b(B_{21}, H_{xn}, H_{ym})$, $c(B_{22}, H_{xn}, H_{yn})$, $d(B_{12}, H_{xm}, H_{yn})$, запишемо рівняння (11) у наступному вигляді:

$$\begin{cases} B_{11} = \mu_{11}H_{xm} + \mu_{12}H_{ym} + B_{0x}; \\ B_{12} = \mu_{11}H_{xn} + \mu_{12}H_{ym} + B_{0x}; \\ B_{22} = \mu_{11}H_{xn} + \mu_{12}H_{yn} + B_{0x}; \\ B_{12} = \mu_{11}H_{xm} + \mu_{12}H_{yn} + B_{0x}. \end{cases} \quad (12)$$

Виконуючи деякі перетворення рівнянь (12) можна визначити коефіцієнти μ_{11} , μ_{12} та B_{0x} :

$$\begin{cases} \mu_{11} = \frac{(B_{21} - B_{11}) + (B_{22} - B_{12})}{2(H_{xn} - H_{xm})}; \\ \mu_{12} = \frac{(B_{11} - B_{12}) + (B_{21} - B_{22})}{2(H_{ym} - H_{yn})}; \\ B_{0x} = \frac{1}{4} \left[(B_{11} - \mu_{11}H_{xm} - \mu_{12}H_{ym}) + \dots \right. \\ \dots + (B_{12} - \mu_{11}H_{xn} - \mu_{12}H_{ym}) + \dots \\ \dots + (B_{21} - \mu_{11}H_{xn} - \mu_{12}H_{yn}) + \dots \\ \left. \dots + (B_{22} - \mu_{11}H_{xm} - \mu_{12}H_{yn}) \right] \end{cases} \quad (13)$$

Значення коефіцієнтів μ_{11} , μ_{12} та B_{0x} з виразу (13) дозволяє наближено знайти B_x , при $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$ та $H_{ym} \leq H_y \leq H_{yn}$.

За аналогією (11) складову індукції B_y можна визначити за наступним співвідношенням:

$$B_y = \mu_{21}H_x + \mu_{22}H_y + B_{0y}. \quad (14)$$

Коефіцієнти μ_{21} , μ_{22} та B_{0y} можна визначити за аналогією (12) та (13). У випадку, коли магнітне поле в активній частині ЕМП розподіляється рівномірно при визначенні B_y можна використати коефіцієнти μ_{11} , μ_{12} та B_{0x} . Тобто якщо μ_{11} , μ_{12} та B_{0x} визначені для $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$ та $H_{ym} \leq H_y \leq H_{yn}$,

то для $H_{xm} \leq H_y \leq H_{xn}$ та $H_{ym} \leq H_x \leq H_{yn}$ буде виконуватись рівність $\mu_{22} = \mu_{11}$, $\mu_{21} = \mu_{12}$ та $B_{0x} = B_{0y}$.

Переходячи з усереднених складових індукцій та напруженості магнітного поля до магнітних потоків та напруг, розглянемо фрагмент магнітного кола, що зображений на рис. 4, та запишемо рівняння магнітних потоків та напруг за наступним співвідношенням:

$$\begin{cases} \Phi_x = B_x l_y l_z; \\ u_{mx} = H_x l_x; \\ u'_{my} = H_y l_y \end{cases} \quad (15)$$

де l_z – довжина розрахункової області по осі Z.

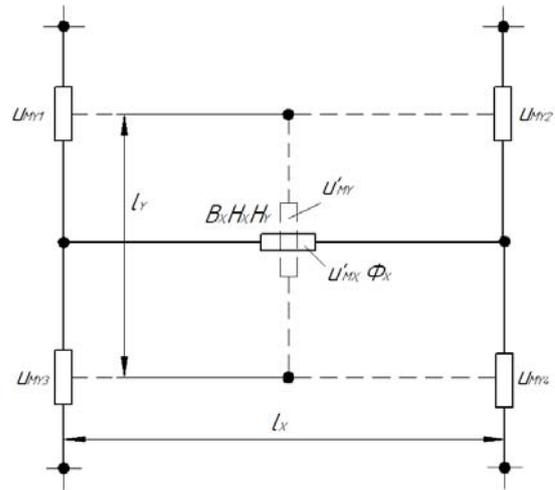


Рисунок 4. Врахування впливу складової напруженості поля H_y на величину магнітного потоку Φ_x

Для врахування впливу складової H_y на величину B_x в схемі заміщення на рис. 4 у відповідності до [15] був ведений елемент з магнітною напругою u'_{my} . Згідно [15], величина u'_{my} може бути визначена через магнітну напругу інших елементів схеми заміщення:

$$u'_{my} = \frac{1}{4} (u_{my1} + u_{my2} + u_{my3} + u_{my4}) \quad (16)$$

З врахуванням (11), (15) та (16) магнітний потік Φ_x може бути визначений через магнітну напругу елементів кола:

$$\begin{cases} \Phi_x = \Lambda_x u_{mx} + \Lambda_{xy} u'_{my} + J_x = \Lambda_x u_{mx} + \\ + \frac{1}{4} \Lambda_{xy} (u_{my1} + u_{my2} + u_{my3} + u_{my4}) + J_x; \\ \Lambda_x = \mu_{11} \frac{l_y l_z}{l_x}; \Lambda_{xy} = \mu_{11} l_z; J_x = B_{0x} l_y l_z. \end{cases} \quad (17)$$

При розгляді 2D електромагнітного поля, будують сімейство кривих $B_x(H_x)$ при різних значеннях H_y та H_z . На рис. 5 для одного із інтервалів $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$ наведені чотири залежності $B_x = f(H_x, H_{ym}, H_{zm})$, $B_x = f(H_x, H_{yn}, H_{zm})$, $B_x = f(H_x, H_{ym}, H_{zn})$, $B_x = f(H_x, H_{yn}, H_{zn})$. В межах $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$, $H_{ym} \leq H_y \leq H_{yn}$ та $H_{zm} \leq H_z \leq H_{zn}$, використовуючи кусочно-лінійну апроксимацію, маємо:

$$B_x = \mu_{11} H_x + \mu_{12} H_y + \mu_{13} H_z + B_{0x}. \quad (18)$$

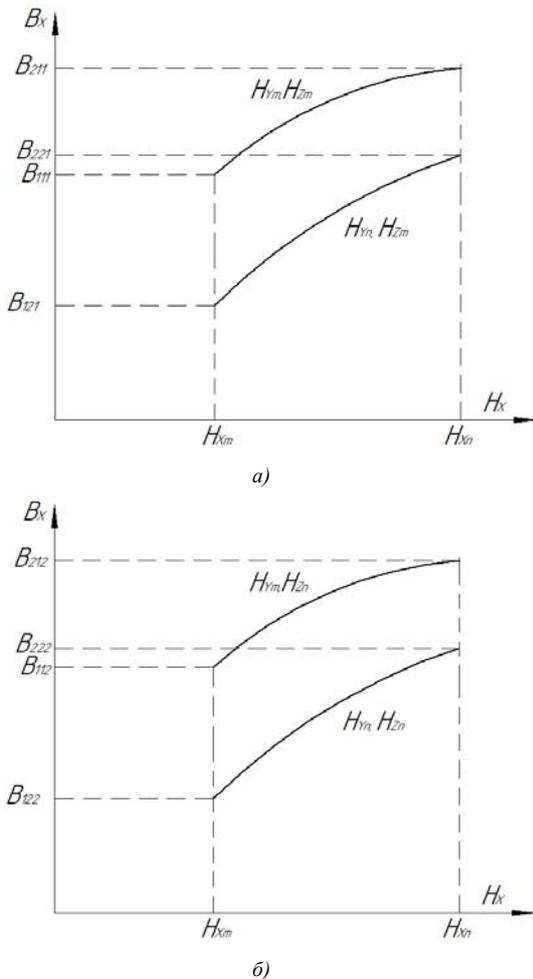


Рисунок 5. Щодо визначення апроксимуючих коефіцієнтів залежності $B_x = f(H_x, H_y, H_z)$

За аналогією (12) коефіцієнти $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, B_{0x}$ можна знайти за наступними співвідношеннями:

$$\mu_{11} = \frac{1}{4(H_{xn} - H_{xm})} \cdot ((B_{211} - B_{111}) + (B_{221} - B_{121}) + \dots; \dots(B_{212} - B_{112}) + (B_{222} - B_{122})); \quad (19)$$

$$\mu_{12} = \frac{1}{4(H_{ym} - H_{yn})} \cdot ((B_{111} - B_{121}) + (B_{211} - B_{221}) + \dots; \dots + (B_{112} - B_{122}) + (B_{212} - B_{222})); \quad (20)$$

$$\mu_{13} = \frac{1}{4(H_{zm} - H_{zn})} \cdot ((B_{111} - B_{112}) + (B_{211} - B_{212}) + \dots; \dots + (B_{121} - B_{122}) + (B_{221} - B_{222})); \quad (21)$$

$$B_{0x} = \frac{1}{8} [(B_{111} - \mu_{11} H_{xm} - \mu_{12} H_{ym} - \mu_{13} H_{zm}) + \dots; \dots + (B_{211} - \mu_{11} H_{xn} - \mu_{12} H_{ym} - \mu_{13} H_{zm}) + \dots; \dots + (B_{222} - \mu_{11} H_{xn} - \mu_{12} H_{yn} - \mu_{13} H_{zn})] \quad (22)$$

Магнітний потік та напругу схеми заміщення магнітного кола, за аналогією (17) можна представити у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi_x = \Lambda_x u_{mx} + \frac{1}{4} \Lambda_{xy} (u_{my1} + u_{my2} + u_{my3} + u_{my4}) + \dots \\ \dots + \frac{1}{4} \Lambda_{xz} (u_{mz1} + u_{mz2} + u_{mz3} + u_{mz4}) + J_x \end{aligned} \quad (23)$$

Зв'язок між магнітними потоками та магнітними напругами між всіма елементами схеми заміщення магнітного кола загальної розрахункової зони осердя статора та ротора ЕМП, які можна представити елементарними одиницями (для 3D польового моделювання елементарними об'ємами; для 2D польового моделювання – елементарними площинами), слід виразити у вигляді нелінійної системи рівняння у матричній формі:

$$[\Phi] = [A][U_m] + [J], \quad (24)$$

де елементи матриць $[A]$ та $[J]$ будуть визначатися значеннями магнітних напруг $[U_m]$.

При використанні системи рівнянь (24) елементи матриць $[A]$ та $[J]$ повинні бути визначенні завчасно для усіх можливих інтервалів складових напруженості магнітного поля $(0, H_{x1}, H_{x2}, \dots)$, $(0, H_{y1}, H_{y2}, \dots)$, $(0, H_{z1}, H_{z2}, \dots)$.

Таким чином, кінцево-різницева апроксимація рівнянь електромагнітного поля (1) та (2) дозволяє представити розрахункову область активної частини ЕМП схемою заміщення у вигляді взаємопов'язаних

магнітних та електричних кіл та створити математичну модель, що поєднує зв'язок між магнітними потоками і напругами, а також електричними струмами та напругами для усіх елементів, що входять до схеми заміщення. Застосування цієї математичної моделі дозволяє не тільки оптимізувати геометричні розміри пазових та зубцевих зон осердя статора та ротора ЕМП, а також розбити на елементарні площини (для 2D коло-польової моделі) розрахункову геометричну область осердя статора та ротора ЕМП, що дозволить для кожної елементарної області (ділянки) замінити нелінійну залежність $\mu = B(H)$ на лінійну, виду $B = \mu_0 \mu_r H$ ($\mu_r = const$), застосовуючи кусочно-лінійну апроксимацію кривої намагнічування в заданих межах $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$, $H_{ym} \leq H_y \leq H_{yn}$, $H_{zm} \leq H_z \leq H_{zn}$.

На основі даних результатів польового моделювання дослідного зразка асинхронно-синхронного електромеханічного перетворювача, відповідно до [16] та [17], при дробленні розрахункової області осердя ротора на 42 ділянки, та ротора – на 34 ділянки з визначенням для кожної з них межі зміни $H_{xm,y} \leq H_{x,y} \leq H_{xn,yn}$ та зміни нелінійної магнітної властивості сталі та лінійну, нев'язка за змінним струмом статора в режимі НХ, у порівнянні з результатами моделювання при врахуванні загальної кривої намагнічування за всією розрахунковою областю, для фази А не перевищує $\delta I_A|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,52\%$, для фази В – $\delta I_B|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,654\%$ та для фази С – $\delta I_C|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,495\%$.

Таким чином запропонована методика лінеаризації магнітних властивостей на окремих елементарних ділянках активної частини осердя статора та ротора ЕМП з застосуванням метода кусочно-лінійної апроксимації кривої намагнічування дозволяє значно скоротити кількість нелінійних рівнянь та значно зменшити час чисельної реалізації 2D коло-польової моделі ЕМП при збереженні точності чисельних розрахунків.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

V. ВИСНОВКИ

1. Вдосконалено математичні моделі щодо лінеаризації кривої намагнічування для електротехнічної сталі осердя статора та ротора просторових 3D та плоско-паралельних 2D геометричних моделей активної частини електромеханічних перетворювачів змінного струму, які засновані на метода кусочно-лінійної апроксимації кривої намагнічування.

2. На основі запропонованих математичних мо-

делей щодо лінеаризації магнітних властивостей сталі осердя статора та ротора електромеханічних перетворювачів змінного струму реалізовано підхід, щодо дроблення 2D загальної геометричної моделі осердя статора та ротора ЕМП на n-ну кількість елементарних площин осердя статора та ротора та застосуванням лінійної функції $B = \mu_0 \mu_r (H)$ $\mu_r = const$. в заданих межах: $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$, $H_{ym} \leq H_y \leq H_{yn}$, $H_{zm} \leq H_z \leq H_{zn}$.

3. На основі даних результатів 2D польового моделювання дослідного зразка електромеханічного перетворювача за [16] та [17] при дробленні розрахункової області осердя якоря на 42 ділянки, та ротора – на 34 ділянки з визначенням для кожної з них межі зміни $H_{xm,y} \leq H_{x,y} \leq H_{xn,yn}$, та зміни нелінійної залежності кривої намагнічування сталі на лінійну, нев'язка за змінним струмом в режимі НХ, у порівнянні з результатами моделювання при врахуванні загальної кривої намагнічування за всією розрахунковою областю, нев'язка за струмом якоря для фази А не перевищує: $\delta I_A|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,52\%$; для фази В – $\delta I_B|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,654\%$; та для фази С – $\delta I_C|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,495\%$. Це дозволило також знизити в 4,89 разів час чисельних розрахунків для 2D нестационарної постановки задачі при застосуванні спеціального програмного забезпечення Comsol Multiphysics.

4. Запропоновану методику можна використовувати для всіх різновидів ЕМП.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Silvester P. P., Finite Elements for Electrical Engineers / P. P. Silvester, R. L. Ferrari // 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press. – 1996, – 400 p.
- [2] Kurbatov, P. A., Chislennyy raschet elektromagnitnykh poley [Numerical calculation of electromagnetic fields] / P. A. Kurbatov, S. A. Arinchin // Energoatomizdat, - 1984, - 168 p.
- [3] Brauer J. R. Simple equations for the magnetization curve of main types of magnetic steel / J. R. Brauer // IEEE Transactions on Magnetics. – 1975., - Vol. 11, - No. 1, - pp. 81.
- [4] Zhu J. G., Ramsden V. S. Improved formulations for the curve fitting of magnetic properties. IEEE Transactions on Magnetics. 1993. Vol. 29, No. 6. P. 2458–2460.
- [5] Bichicchi S., Chiorboli G., Reggiani U., Snell S. A modified Frohlich-Kennelly model for the magnetization curve. IEEE Transactions on Magnetics. 1998. Vol. 34, No. 4. pp. 1111–1114.
- [6] Nakhodkin M. Analytical approximation of the mag-

- netization curves of electrical steels / M. Nakhodkin, V. Gurevich // *Electrical Engineering*, - 2012., - Vol. 94. - pp. 125–131.
- [7] Trutt, F. C. Representation of the magnetization characteristic of DC machines for computer use / F. C. Trutt, E. A. Erdelyi, R. E. Hopkins // *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, - 1968, - no. 3. – pp. 665–669.
- [8] Widger, A. J. Representation of magnetization curves over a wide range of flux density / A. J. Widger // *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. – 1969. – Vol.116. – no.1. – pp.156–160.
- [9] O'Kelly D. Convex and concave approximations for magnetization curves / D. O'Kelly // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 1973, - Vol. 9, - no. 4., - pp. 636–638.
- [10]Humbert C. Approximation of magnetization curves using rational functions / C. Humbert, D. Maquin, J. Ragot // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. - 1995. - Vol. 150. - pp. 235–244.
- [11]El-Sherbiny M. K. Representation of the magnetization curve by exponential series / M. K. El-Sherbiny // *IEEE Transactions on Magnetics*, - 1973. - Vol. 9, - no. 1. - pp. 60–61.
- [12]Reichert, K. The calculation of magnetic circuits with the help of the finite element method / K. Reichert // *IEEE Transactions on Magnetics*, - 1970. -Vol. 6. – no.2, - pp.283–288.
- [13]Zhu J. G. Improved formulations for the curve fitting of magnetic properties / J. G. Zhu, V. S. Ramsden // *IEEE Transactions on Magnetics*, - 1993. - Vol. 29, - no. 6. - pp. 2458–2460.
- [14]Keyhani A. Induction machine parameters identification from operating data / A. Keyhani, T. Tsai // *IEEE Transactions on Energy Conversion*. – 1994, - Vol. 9, - no. 3. - pp. 590–598.
- [15]Yee, K. S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [Text] / K. S. Yee // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* – 1966. – Vol. 14. – P. 302–307.
- [16]Kotsur M.I. Study of electromagnetic and mechanical processes of an induction-synchronous electromechanical converter in idle mode / M.I. Kotsur // *Tekhnichna Elektrodynamika*. – 2024. – № 2. - pp. 62-71. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2024.02.062>.
- [17]Kotsur M. Regulation Characteristics and Stability Criteria of Induction-Synchronous Electromechanical Converters in the Motor Operating Mode [Electronic Resource] / M. Kotsur, I. Kotsur, Yu. Bezverkhnia // 2025 IEEE 6rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), October 06-10, Kharkiv, Ukraine, 2025, pp. 1-6. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61436.2025.11288625>

Надійшла (Received) 26.12.2025;

Прийнята (Accepted) 18.02.2026;

Опублікована (Published) 30.03.2026;

IMPROVING APPROACHES TO THE LINEARIZATION OF MAGNETIC PROPERTIES OF ELECTROMECHANICAL CONVERTER CORES FOR NUMERICAL CALCULATIONS

KOTSUR M.I.

Ph.D, Associate professor, Associate professor of the Electrical and Electronic Apparatuses department of the National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0072-5437>, e-mail: kotsur_m@ukr.net;

DANYLCHENKO D.O.

Ph.D, Associate professor, Professor of the Electrical Power Transmission department of the National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kharkiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7912-1849>, e-mail: dmytro.danylchenko@khp.edu.ua;

SYNETSKYI A.V.

postgraduate student of the National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1859-4171>; e-mail: xibi-tur@ukr.net;

Purpose. Improving the mathematical model for the linearization of magnetic properties of stator and rotor electrical steel based on the piecewise linear approximation of the magnetization curve, which will significantly reduce the number of nonlinear equations and substantially decrease the computational time for 2D and 3D circuit-field models of an asynchronous electromechanical converter while maintaining the accuracy of numerical calculations.

Methodology. Analytical methods for electromagnetic field calculation, the finite element method, analytical methods for electrical and magnetic circuit calculation, and piecewise linear approximation methods are utilized.

Findings. Mathematical models for linearizing the magnetization curve of stator and rotor electrical steel has been improved for both spatial 3D and plane-parallel 2D geometric models of the active part of AC electromechanical

converters. An approach has been implemented to partition the general 2D geometric model of the stator and rotor core into n -elementary planes, applying a linear magnetization curve function at $\mu_r = \text{const}$. Based on the 2D field modeling results of an electromechanical converters prototype in idle mode, compared to modeling results considering the full magnetization curve across the entire computational domain, the armature current residual does not exceed 2.654%. This allowed for a 4.89-fold reduction in the numerical calculation time for the 2D transient problem formulation using Comsol Multiphysics software.

Originality. The method for linearizing the magnetic properties of stator and rotor electrical steel in electromechanical converters has been improved, allowing for the application of a constant relative permeability value ($\mu_r = \text{const}$.) to specific areas of the stator and rotor core computational domain while maintaining a sufficient level of numerical calculation accuracy.

Practical value. The proposed methodology for the linearization of the magnetization curve of stator and rotor electrical steel for spatial 3D and plane-parallel 2D geometric models of the active part of AC electromechanical converters can be applied to various types of electrical machines.

Keywords: *piecewise linear approximation, magnetization curve, numerical calculations, core, electrical machine.*

REFERENCES

- [1] Silvester P. P., Ferrari R. L., (1996). Finite Elements for Electrical Engineers. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 400.
- [2] Kurbatov, P. A., Arinchin, S. A. (1984). Chislennyy raschet elektromagnitnykh poley [Numerical calculation of electromagnetic fields]. Energoatomizdat, 168.
- [3] Brauer J. R. (1975). Simple equations for the magnetization curve of main types of magnetic steel. IEEE Transactions on Magnetics, 11(1), 81.
- [4] Zhu J. G., Ramsden V. S. (1993). Improved formulations for the curve fitting of magnetic properties. IEEE Transactions on Magnetics, 29(6), 2458–2460.
- [5] Bichicchi S., Chiorboli G., Reggiani U., Snell S. (1998). A modified Frohlich-Kennelly model for the magnetization curve. IEEE Transactions on Magnetics, 34(4), 1111–1114.
- [6] Nakhodkin M., Gurevich V. (2012). Analytical approximation of the magnetization curves of electrical steels. Electrical Engineering, 94, 125–131.
- [7] Trutt, F. C., Erdelyi, E. A., & Hopkins, R. E. (1968). Representation of the magnetization characteristic of DC machines for computer use. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, (3), 665–669.
- [8] Widger, A. J. (1969). Representation of magnetization curves over a wide range of flux density. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 116(1), 156–160.
- [9] O'Kelly D. (1973). Convex and concave approximations for magnetization curves. IEEE Transactions on Magnetics, 9(4), 636–638.
- [10] Humbert C., Maquin D., Ragot J. (1995). Approximation of magnetization curves using rational functions. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 150, 235–244.
- [11] El-Sherbiny M. K. (1973). Representation of the magnetization curve by exponential series. IEEE Transactions on Magnetics, 9(1), 60–61.
- [12] Reichert, K. (1970). The calculation of magnetic circuits with the help of the finite element method. IEEE Transactions on Magnetics, 6(2), 283–288.
- [13] Zhu J. G., Ramsden V. S. (1993). Improved formulations for the curve fitting of magnetic properties. IEEE Transactions on Magnetics, 29(6), 2458–2460.
- [14] Keyhani A., Tsai T. (1994). Induction machine parameters identification from operating data. IEEE Transactions on Energy Conversion, 9(3), 590–598.
- [15] Yee, K. S. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans. Antennas Propagat, 14, 302–307.
- [16] Kotsur M.I. (2024). Study of electromagnetic and mechanical processes of an induction-synchronous electromechanical converter in idle mode. Tekhnichna Elektrodynamika, (2), 62-71. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2024.02.062>.
- [17] Kotsur M. (2025). Regulation Characteristics and Stability Criteria of Induction-Synchronous Electromechanical Converters in the Motor Operating Mode. 2025 IEEE 6rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), October 06-10, Kharkiv, Ukraine, 1-6. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61436.2025.11288625>.