

УДК 621.331

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ КОЛЕСА З ДОРОГОЮ В СКЛАДІ КОМПЛЕКСНОЇ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРОМОБІЛЯ

НЕСТЕРЕНКО О.Г. аспірант кафедри автоматизованих електромеханічних систем Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0226-1153>, e-mail: Oleksandr.Nesterenko@ieec.khpi.edu.ua;

КУНЧЕНКО Т.Ю. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри автоматизованих електромеханічних систем Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2462-1509>, e-mail: Tetiana.Kunchenko@khpi.edu.ua.

Мета роботи. Метою роботи є розроблення комплексу математичних моделей взаємодії колеса з дорожнім покриттям у складі комплексної моделі електромобіля для дослідження розгону, гальмування, повороту, перерозподілу навантажень між осями і колесами та аналізу ефективності алгоритмів керування тяговим електродвигуном у типових і граничних режимах руху.

Методи дослідження. Використано положення теоретичної механіки, динаміки транспортних засобів, теорії електродвигуна, математичного моделювання, а також емпіричні залежності для опису зчеплення шини з опорною поверхнею. Для визначення сил у плямі контакту застосовано емпіричну модель Буркгардта, а рух електромобіля описано в межах моделі плоского руху з урахуванням поздовжнього і поперечного перенесення навантаження, зміни нормальних реакцій та ковзання коліс.

Отримані результати. Сформовано узгоджений комплекс моделей, який дає змогу визначати реакції в контактній зоні колеса з дорогою та оцінювати вплив коефіцієнта зчеплення, буксування, швидкості руху, вертикального навантаження і режиму керування на поведінку електромобіля. Показано можливість відтворення руху на сухому, вологому та слизькому покритті й аналізу умов втрати зчеплення, зниження керованості та погіршення реалізації тягового або гальмівного моменту. Модель дає змогу порівнювати режими роботи ведучих коліс, оцінювати чутливість системи до параметрів дороги та використовувати результати для синтезу алгоритмів обмеження проковзування, перерозподілу моментів і підвищення курсової стійкості. Результати придатні для формування параметрів подальших досліджень, перевірки логіки керування та попередньої оцінки енергетичної ефективності системи.

Наукова новизна. Наукова новизна полягає в інтеграції моделі колеса, емпіричного опису шинно-дорожньої взаємодії та моделі плоского руху електромобіля в єдину узгоджену математичну схему, придатну для дослідження індивідуального електродвигуна коліс і режимів обмеженого зчеплення.

Практична цінність. Практична цінність полягає у можливості використання розробленого комплексу моделей як основи для створення розрахунково-випробувального стенда дослідження систем керування тягою, антибуксуючого й антиблокувального керування, рекуперативного гальмування та рішень Smart Drive для електромобілів у різних дорожніх умовах експлуатації.

Ключові слова: електромобіль, динаміка електромобіля, взаємодія колеса з дорогою, коефіцієнт зчеплення, коефіцієнт буксування, модель Буркгардта, математичне моделювання.

I. ВСТУП

Розвиток електромобільного транспорту та підвищення вимог до систем керування рухом зумовлюють потребу в удосконаленні математичних моделей динамічних процесів у транспортних засобах з електродвигуном. Математичне моделювання дає змогу досліджувати режими руху електромобіля й верифікувати алгоритми керування без проведення натурних випробувань.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Фундаментальні засади моделювання динаміки автомобіля та властивостей шин викладено у працях Н.

В. Раджамані [1], Т. Д. Гілспі [2], Р. Раджамані [3] та Я. У. Вонг [4]. Для опису поздовжньої взаємодії «шина-дорога» і врахування внутрішніх станів тертя доцільними є динамічні моделі, наведені у праці С. Канудас-де-Віт та співавт. [5]. Емпіричний опис залежності коефіцієнта зчеплення від буксування, який широко використовується в задачах гальмування та тягового керування, представлено у роботі М. Буркгардта [6].

Питання ідентифікації кривої зчеплення та оцінювання параметрів контакту в реальних режимах руху розглянуто в працях Я. І. Міллера і Д. Себона [7], Х. Хіа та співавт. [8], Д. Гарсія-Позуело та співавт. [9], а також У. Зю та співавт. [10]. Ці дослідження підтверджують,

© Нестеренко О.Г., Кунченко Т.Ю., 2026

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (CC-BY-SA 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2026-2-3>

що точність визначення сил у плямі контакту та граничного коефіцієнта зчеплення істотно впливає на якість алгоритмів регулювання тяги і гальмування.

Сучасні підходи до керування буксуванням і реалізації тягових можливостей електромобілів, зокрема для транспортних засобів з індивідуальним приводом коліс, наведено у роботах S. Ding та співавт. [11], J. Shi та співавт. [12], S. Kang та співавт. [13], S. Quan та співавт. [14], J. Park і J. Na [15], Z. Bi та співавт. [16]. Водночас у більшості опублікованих робіт основна увага приділяється або алгоритму керування, або окремій моделі шини чи оцінюванню дорожнього коефіцієнта зчеплення. Недостатньо висвітленим залишається питання побудови цілісної комплексної моделі електромобіля, яка поєднує модель колеса, емпіричний опис зчеплення, плоский рух кузова та динамічний перерозподіл вертикальних реакцій у межах єдиної узгодженої математичної структури.

III. МЕТА РОБОТИ

Метою роботи є розроблення комплексу математичних моделей взаємодії колеса з дорожнім покриттям у складі комплексної моделі електромобіля для дослідження розгону, гальмування, повороту, перерозподілу навантажень між осями і колесами та аналізу ефективності алгоритмів керування тяговим електроприводом у типових і граничних режимах руху.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Для верифікації запропонованого комплексу моделей сформовано математичну модель руху електромобіля для дослідження взаємодії коліс із дорожнім покриттям за змінних умов. Узагальнену компоновальну схему комплексної моделі наведено на рис. 1.

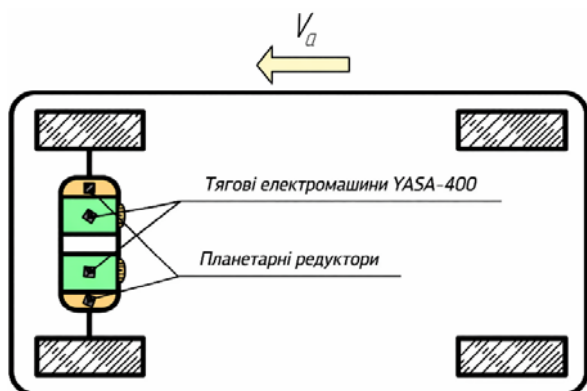


Рисунок 1. Компоновальна схема електропривода у складі комплексної моделі електромобіля

Технічну специфікацію комплексної моделі електромобіля представлено у табл. 1.

Таблиця 1. Технічна специфікація комплексної моделі електромобіля

Найменування параметра	Позначення	Значення
Колісна формула	$m \times n$	4×2
Повна маса, кг	M_d	2170
Розподіл маси по осях (передня/задня), %	п/з (П)	51/49
Момент інерції автомобіля навколо осі Z відносно точки центру мас для повної маси, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$J_{z\text{Оцм}}$ (П)	5017,5
Довжина автомобіля, м	a	4,393
Ширина автомобіля, м	b	2,010
Висота автомобіля, м	h	1,599
Колісна база, м	L	2,699

Для опису процесів буксування у моделі використано узагальнену математичну модель колісного руху, що відтворює основні закономірності взаємодії колеса з дорожнім покриттям на основі відомих джерел [1, 2].

У досліджуваній комплексній моделі електромобіля рушієм виступають колеса передньої осі. Залежно від характеру поданого моменту колесо може працювати у веденому, ведучому або гальмівному режимах кочення.

У веденому режимі на колесо діють низка силових і кінематичних чинників (рис. 2), зокрема: M_k – крутний момент на колесі, Н·м; F_z – вертикальна реакція, що діє на i -те колесо, Н; R_x – дотична реакція у плямі контакту, Н; r_d – динамічний радіус колеса, м; f – коефіцієнт опору коченню.

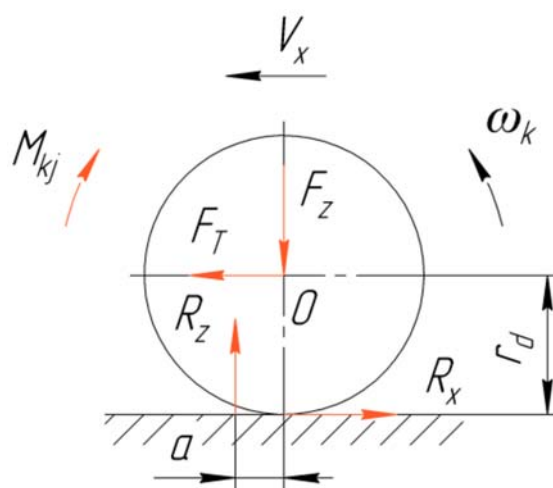


Рисунок 2. Ведений режим кочення колеса

Для умов рівноваги сили, що діють у горизонтальному напрямку, задовольняють:

$$\sum F_x = 0: F_T - R_x = 0. \quad (1)$$

Сума моментів відносно точки O дорівнює нулю:

$$\sum M_O = 0: -M_{kj} - R_z \cdot a + R_x \cdot r_d = 0. \quad (2)$$

Відповідно, рівняння динаміки колеса у веденому режимі можна записати як:

$$\begin{cases} F_T = R_x, \\ M_{kj} = R_x \cdot r_d - R_z \cdot a, \end{cases} \quad (3)$$

де \dot{V}_k – лінійне прискорення колеса, м/с²; J_k – момент інерції колеса, кг·м²; $\dot{\omega}_k$ – кутове прискорення колеса, 1/с².

Вертикальна реакція R_z зміщується відносно центра обертання колеса O на відстань a , що зумовлено пружними властивостями еластичної шини. Добуток $R_z \cdot a$ визначає момент опору коченню колеса M_f . Величину a можна представити у вигляді:

$$a = f \cdot r_d, \quad (4)$$

де f – коефіцієнт опору коченню; r_d – динамічний радіус колеса, м.

Горизонтальна сила F_T , що діє на i -те колесо автомобіля, визначається залежністю:

$$F_T = m_k \cdot \dot{V}_k, \quad (5)$$

де m_k – маса, приведена до колеса, а \dot{V}_k – лінійне прискорення центра колеса.

Інерційний момент колеса описується рівнянням:

$$M_{kj} = J_k \cdot \dot{\omega}_k, \quad (6)$$

де J_k – момент інерції колеса, кг·м², а $\dot{\omega}_k$ – його кутове прискорення, 1/с².

Після підстановки вищевказаних рівнянь до системи отримаємо уточнений вигляд рівнянь динаміки для веденого режиму:

$$\begin{cases} m_k \cdot \dot{V}_k = R_x, \\ J_k \cdot \dot{\omega}_k = R_x \cdot r_d - R_z \cdot f \cdot r_d, \end{cases} \quad (7)$$

де R_x – дотична сила реакції у зоні контакту колеса з дорогою.

Як зазначено у [2, 4], коефіцієнт опору коченню f може бути поданий у вигляді емпіричного виразу:

$$f = f_0 + k_f \cdot V_a^2 + f_\Delta, \quad (8)$$

де f_0 – коефіцієнт опору коченню для сухої рівної поверхні за швидкостей, близьких до нульових; k_f – коефіцієнт зростання опору з підвищенням швидкості (для легкових автомобілів $k_f = (4 \dots 5) \times 10^{-5}$); f_Δ – поправковий коефіцієнт, що враховує тип дорожнього покриття.

Залежність $f(V)$ має квадратичний характер і узгоджується з експериментальними даними; числові значення коефіцієнтів для різних типів дорожнього покриття прийнято за [2, 4]. Коефіцієнти опору кочення

для різних типів дорожнього покриття прийняті відповідно до відомих експериментальних даних, наведених у вищевказаній роботі.

У ведучому режимі на колесо діють ті самі групи силових і кінематичних факторів, що й у попередньому випадку (рис. 3), однак напрям дії обертального моменту змінюється.

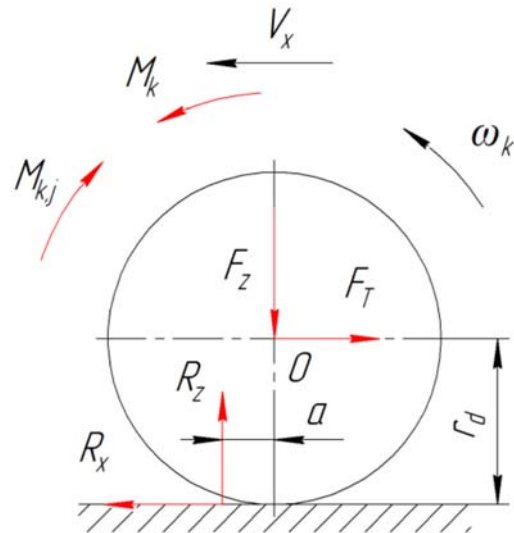


Рисунок 3. Ведучий режим кочення колеса

Для ведучого режиму справедливі умови рівноваги сил і моментів, що діють на колесо:

$$\sum F_x = 0: -F_T + R_x = 0, \quad (9)$$

$$\sum M_O = 0: -M_{kj} + M_k - R_z \cdot a - R_x \cdot r_d = 0. \quad (10)$$

Після відповідних перетворень система рівнянь динаміки колеса у ведучому режимі набуває вигляду:

$$\begin{cases} F_T = R_x, \\ M_{kj} = M_k - R_z \cdot a - R_x \cdot r_d. \end{cases} \quad (11)$$

Під час роботи ведучого колеса спостерігається проковзування еластичної шини відносно дорожньої поверхні. Цей процес характеризується коефіцієнтом буксування S_δ , який визначається за формулою:

$$S_\delta = 1 - \frac{V_k}{r_k \cdot \omega_k}, \quad (12)$$

де r_k – кінематичний радіус колеса, м; ω_k – кутова швидкість обертання, 1/с; V_k – лінійна швидкість центра мас колеса, м/с.

Експериментальні дослідження показують, що при наявності проковзування максимальна дотична сила реакції прямо пропорційна нормальній реакції опору [1, 2]:

$$R_x = R_z \cdot \varphi_x, \quad (13)$$

де φ_x – коефіцієнт зчеплення у поздовжньому напрямку.

З урахуванням цього рівняння динаміки набувають вигляду:

$$\begin{cases} m_k \cdot \dot{V}_k = R_x, \\ J_k \cdot \dot{\omega}_k = M_k - R_z \cdot r_d (f - \varphi_x), \end{cases} \quad (14)$$

де f – коефіцієнт опору коченню, а r_d – динамічний радіус колеса.

Для опису процесу взаємодії колеса з дорожнім покриттям використовується емпірична модель Буркгардта [6], яка описує залежність коефіцієнта зчеплення від ступеня буксування:

$$\varphi_x = C_1 \cdot (1 - e^{-C_2 S \delta}) - C_3 \cdot S \delta, \quad (15)$$

де C_1 – параметр, що визначає максимум кривої ($C_1 = \varphi_{xmax}$); C_2 – параметр, який задає форму кривої, при цьому $C_2 \cdot e^{-C_2 S \delta} = \frac{C_3}{C_1}$; C_3 – параметр, який характеризує спад коефіцієнта зчеплення після досягнення максимуму ($C_3 = \varphi_{xmax} - \varphi_{БЛ}$).

Для опису залежності коефіцієнта зчеплення від ступеня буксування використано відому емпіричну модель, параметри якої прийнято згідно з [6]. Підходи до оцінювання (ідентифікації) параметрів кривої зчеплення за вимірними даними в режимі керованого гальмування (slip-controlled braking) розглянуто у [7].

У гальмівному режимі на колесо діють ті самі групи сил і моментів (рис. 4), однак домінуючим фактором є гальмівний момент M_t , що прикладається у напрямку, протилежному обертанню.

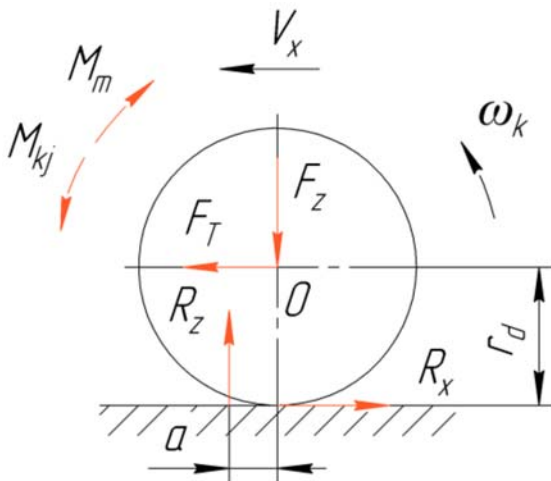


Рисунок 4. Гальмівний режим кочення колеса

Для гальмівного режиму рівняння рівноваги сил і моментів мають вигляд:

$$\sum F_x = 0: F_T - R_x = 0, \quad (16)$$

$$\sum M_O = 0: M_{kj} - M_t - R_z \cdot a + R_x \cdot r_d = 0. \quad (17)$$

На основі цих співвідношень рівняння динаміки колеса у гальмівному режимі запишемо як:

$$\begin{cases} m_k \cdot \dot{V}_k = R_x, \\ M_{kj} = M_t + R_z \cdot a - R_x \cdot r_d. \end{cases} \quad (18)$$

Після перетворень та з урахуванням рівнянь зв'язку отримуємо остаточну форму:

$$\begin{cases} m_k \cdot \dot{V}_k = R_x, \\ J_k \cdot \dot{\omega}_k = M_t + R_z \cdot r_d \cdot (f - \varphi_x), \end{cases} \quad (19)$$

де M_t – гальмівний момент, Н·м; φ_x – коефіцієнт зчеплення у поздовжньому напрямку; f – коефіцієнт опору коченню; r_d – динамічний радіус колеса, м.

Відповідно до загальних принципів побудови математичних моделей [1], для аналізу процесів керування інтелектуальним регулятором електропривода (ІРЕ) доцільно використовувати модель автомобіля з трьома ступенями вільності. Такий підхід забезпечує достатню точність опису динамічної поведінки автомобіля та дозволяє моделювати роботу ІРЕ за різних режимів і типів керування.

Розроблена математична модель з трьома ступенями вільності охоплює систему рівнянь, що описують: плоский рух корпусу автомобіля відносно земної поверхні; взаємодію обертання всіх коліс із кузовом транспортного засобу; зв'язок кінематичних параметрів кочення еластичних коліс із силовими чинниками, що діють у зоні контакту; залежність крутних моментів коліс від їх кутових швидкостей та сигналів керування від системи автоматичного регулювання (САР), яка реалізує алгоритми керування ІРЕ.

Для побудови моделі прийнято такі спрощення: площа обертання колеса вважається вертикальною; не враховується залежність фрикційних властивостей шини та дорожнього покриття від температури при нестационарному коченні.

Положення та параметри руху автомобіля визначаються у нерухомій системі координат ХОУ, зв'язаній із землею. Розрахункова схема математичної моделі для автомобіля з трьома ступенями вільності (передній привід) представлена на рис. 5.

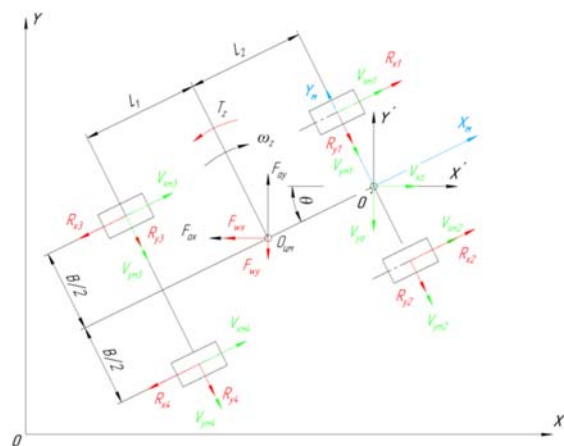


Рисунок 5. Розрахункова схема математичної моделі руху автотранспортного засобу з трьома ступенями вільності (передній привід)

Динаміку руху автомобіля в системі координат ХОУ, пов'язаній із землею, описує формула:

$$\begin{aligned} \frac{G_a}{g} \cdot \ddot{x}_{O'} &= (R_{x1} + R_{x2} - R_{x3} - R_{x4}) \cdot \cos \theta + (R_{y1} + \\ &R_{y2} + R_{y3} + R_{y4}) \cdot \sin \theta - F_{ax} - F_{wx}, \\ \frac{G_a}{g} \cdot \ddot{y}_{O'} &= -(R_{x1} + R_{x2} - R_{x3} - R_{x4}) \cdot \sin \theta - \\ &(-R_{y1} - R_{y2} - R_{y3} - R_{y4}) \cdot \cos \theta - F_{ay} + F_{wy}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$J_{O'm} \cdot \ddot{\theta} = (R_{x1} - R_{x2} - R_{x3} + R_{x4}) \cdot \frac{B}{2} + (-R_{y3} - R_{y4}) \cdot (L_1 + L_2) + ((F_{ax} + F_{wx}) \cdot \sin \theta + (F_{ay} - F_{wy}) \cdot \cos \theta) \cdot L_2,$$

$$J_{O'm} = J_{z_{O'cm}} + \frac{G_a}{g} \cdot L_2^2,$$

де $x_{O'}, y_{O'}$ – координати точки O' , пов'язаної з автомобілем, у нерухомій системі координат, м; θ – кут повороту рухомої системи координат $X_m O' Y_m$, жорстко закріпленої до автомобіля, °; $J_{O'm}$ – момент інерції автомобіля відносно вертикальної осі через точку O' , кг·м²; $J_{z_{O'cm}}$ – момент інерції автомобіля відносно вертикальної осі через центр мас O_{cm} , кг·м²; R_{xi}, R_{yi} – проєкції дотичних і бокових реакцій у зоні контакту і-го колеса на осі рухомої системи координат X_m, Y_m , Н; F_{ax}, F_{ay} – складові сили ваги при русі автомобіля на похилій поверхні, Н; F_{wx}, F_{wy} – складові сили аеродинамічного опору руху, Н; B – колія автомобіля, м; L_1, L_2 – координати розташування центра мас відносно бази автомобіля, м.

Складові сили ваги при русі по похилій поверхні визначаються виразами:

$$F_{ax} = G_a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta, F_{ay} = G_a \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta, \quad (21)$$

де α – кут нахилу дороги.

Складові сили аеродинамічного опору визначаються рівняннями:

$$F_{wx} = C_{wx} \cdot \rho \cdot F_{\text{лоб}} \cdot \frac{\dot{x}_{O'}^2}{2}, F_{wy} = C_{wy} \cdot \rho \cdot F_{\text{бок}} \cdot \frac{\dot{y}_{O'}^2}{2}, \quad (22)$$

де C_{wx} – коефіцієнт лобового опору; C_{wy} – коефіцієнт бокового опору; $F_{\text{лоб}}$ – площа лобового перерізу автомобіля, м²; $F_{\text{бок}}$ – площа бокового перерізу, м²; ρ – густина повітря, кг/м³.

Координати центрів коліс у нерухомій системі координат визначаються через положення центра мас автомобіля, колісну базу та кут орієнтації корпусу відповідно до розрахункової схеми представленої на рис. 6.

Лінійні швидкості центрів коліс у рухомій системі координат визначаються з урахуванням поступального руху корпусу автомобіля та його кутового обертання.

Математична модель колісного рушія визначається системою рівнянь:

$$\begin{aligned} J_k \cdot \dot{\omega}_{k1} &= M_{k1} - R_{z1} \cdot r_{d1} \cdot (f_1 - \varphi_{x1}), \\ J_k \cdot \dot{\omega}_{k2} &= M_{k2} - R_{z2} \cdot r_{d2} \cdot (f_2 - \varphi_{x2}), \\ J_k \cdot \dot{\omega}_{k3} &= R_{x3} \cdot r_{d3} - R_{z3} \cdot f_3 \cdot r_{d3}, \\ J_k \cdot \dot{\omega}_{k4} &= R_{x4} \cdot r_{d4} - R_{z4} \cdot f_4 \cdot r_{d4}, \end{aligned} \quad (23)$$

де J_k – момент інерції колеса і-ої осі, кг·м²; M_{ki} – крутний момент, прикладений до колеса і-ої осі, Н·м; R_{zi} – нормальна реакція для і-го колеса, Н; ω_{ki} – кутова швидкість обертання і-го колеса, 1/с; r_{di} – динамічний радіус і-го колеса, м; f_i – коефіцієнт опору коченню; φ_{xi} – коефіцієнт поздовжнього зчеплення.

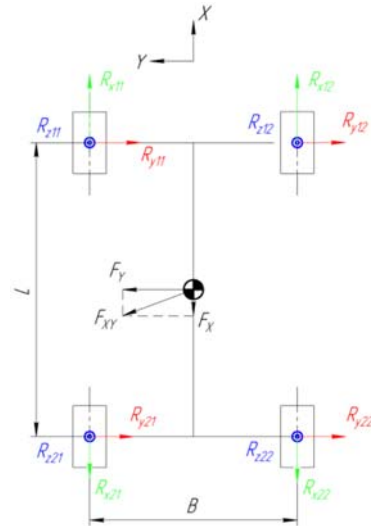


Рисунок 6. Розрахункова схема поступального руху автомобіля з переднім приводом

Розроблена математична модель дозволяє описати динамічну поведінку автомобіля з урахуванням моделювання інтелектуального регулятора електропривода (ІРЕ), який може працювати за різними алгоритмами керування. Запропонована структура є універсальною: вона може використовуватись як для дослідження ефективності алгоритмів ІРЕ та систем керування рухом (СКР), так і для розв'язання інших задач у поєднанні з додатковими математичними блоками моделі.

Згідно з роботами [1–4], для правильного визначення дотичних реакцій на ведучих і гальмівних осях автомобіля необхідно враховувати динамічний перерозподіл реакцій між ними. Для побудови математичного опису випадку поступального руху автомобіля по горизонтальній дорозі зі швидкістю V_x , поздовжнім прискоренням j_x та поперечним j_y , використовується розрахункова схема зовнішніх сил і моментів (рис. 6).

Система координат при цьому пов'язана з дорогою: вісь x спрямована вздовж напрямку поступального руху; вісь y – у площині дороги, перпендикулярно напрямку руху; вісь z – перпендикулярна до дорожньої поверхні.

Компоненти центробіжної сили F_{xy} у поздовж-

ньому та боковому напрямках визначаються рівняннями:

$$F_X = M_a \cdot j_X, F_Y = M_a \cdot j_Y, \quad (24)$$

де M_a – маса автомобіля, кг; j_X – поздовжнє прискорення, м/с²; j_Y – поперечне прискорення, м/с².

Додаткова силова реакція, що виникає під дією поздовжнього прискорення j_X , визначається як:

$$R_X = \frac{j_X \cdot M_a \cdot h_g}{L}, \quad (25)$$

де h_g – висота центра мас автомобіля, м; L – колісна база, м; $j_X > 0$ – режим прискорення; $j_X < 0$ – режим гальмування.

При дії бокового прискорення j_Y додаткова силова реакція визначається виразом:

$$R_Y = \frac{j_Y \cdot M_a \cdot h_g}{B}, \quad (26)$$

де B – колія автомобіля, м; $j_Y > 0$ – правий поворот; $j_Y < 0$ – лівий поворот.

З урахуванням цих реакцій вертикальні навантаження на колеса автомобіля можна записати як:

$$\begin{aligned} R_{z11} &= M_a \cdot K_{\text{поп}} \cdot \left(K_{\text{пр}} g - \frac{j_X h_{\text{цм}}}{L} + \frac{j_Y h_{\text{цм}}}{B} \right), \\ R_{z12} &= M_a \cdot K_{\text{поп}} \cdot \left(K_{\text{пр}} g - \frac{j_X h_{\text{цм}}}{L} - \frac{j_Y h_{\text{цм}}}{B} \right), \\ R_{z21} &= M_a \cdot (1 - K_{\text{поп}}) \cdot \left((1 - K_{\text{пр}}) g + \frac{j_X h_{\text{цм}}}{L} + \frac{j_Y h_{\text{цм}}}{B} \right), \\ R_{z22} &= M_a \cdot (1 - K_{\text{поп}}) \cdot \left((1 - K_{\text{пр}}) g + \frac{j_X h_{\text{цм}}}{L} - \frac{j_Y h_{\text{цм}}}{B} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

де $K_{\text{поп}}$ – коефіцієнт поперечного статичного перерозподілу навантажень; $K_{\text{пр}}$ – коефіцієнт поздовжнього статичного перерозподілу; g – прискорення вільного падіння, м/с².

Бокові реакції R_y визначаються залежно від кутів уводу коліс:

$$\begin{aligned} R_{y11} &= b_{11} \cdot K_{611}, \\ R_{y12} &= b_{12} \cdot K_{612}, \\ R_{y21} &= b_{21} \cdot K_{621}, \\ R_{y22} &= b_{22} \cdot K_{622}, \end{aligned} \quad (28)$$

де b_{ji} – кути уводу коліс, °; K_{6ji} – коефіцієнти опору уведенню, Н/°.

Для випадку прямолінійного руху автомобіля кути уводу коліс визначаються за відомими співвідношеннями, що враховують геометричні параметри транспортного засобу та кінематичні характеристики руху [1–4].

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

V. ВИСНОВКИ

Сформовано комплекс математичних моделей взаємодії колеса з дорожнім покриттям у складі комплексної моделі електромобіля, що забезпечує розрахунок поздовжніх і поперечних реакцій у плямі контакту в типових режимах руху.

Для ведучого та гальмівного режимів кочення записано рівняння рівноваги сил і моментів та отримано залежності, які пов'язують прикладені моменти на колесі з догичною реакцією у контакті з урахуванням опору коченню.

Для опису залежності коефіцієнта зчеплення від ступеня буксування застосовано емпіричну модель Буркгардта, що дозволяє враховувати тип дорожнього покриття через вибір параметрів моделі та використовувати її в розрахункових дослідженнях при змінних умовах зчеплення.

Реалізовано модель плоского руху автомобіля з урахуванням динамічного перерозподілу вертикальних реакцій між осями та окремими колесами під дією поздовжнього і бокового прискорень, що є необхідним для коректного визначення нормальних навантажень і граничних зчіпних можливостей.

Запропонована математична схема може використовуватися як базова платформа для подальших досліджень алгоритмів керування тягою/гальмуванням електропривода та систем стабілізації руху шляхом варіювання параметрів автомобіля, умов зчеплення та режимів руху без проведення натурних експериментів.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на формалізоване порівняння алгоритмів керування у типових розрахункових сценаріях (прискорення/гальмування на різних покриттях, комбіновані режими, збурення), а також на верифікацію моделі за експериментальними або стендовими даними за наявності відповідної вимірювальної інформації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Pacejka H. B. *Tire and Vehicle Dynamics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2010-0-68548-8>
- [2] Gillespie T. D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Revised ed. Warrendale: SAE International, 2021. DOI: <https://doi.org/10.4271/R-506>
- [3] Rajamani R. *Vehicle Dynamics and Control*. 2nd ed. New York: Springer, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1433-9>
- [4] Wong J. Y. *Theory of Ground Vehicles*. 5th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781119719984>
- [5] Canudas-de-Wit C., Tsiotras P., Velenis E., Basset M., Gissing G. Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction. *Vehicle System Dynamics*.

2003. Vol. 39, no. 3. P. 189–226. DOI: <https://doi.org/10.1076/vesd.39.3.189.14152>
- [6] Burckhardt M. *Fahrwerktechnik: Radschlupf-Regel-systeme*. Würzburg: Vogel Verlag, 1993.
- [7] Miller J. I., Cebon D. Tyre curve estimation in slip-controlled braking. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*. 2016. Vol. 230, no. 3. P. 332–351. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954407015585934>
- [8] Xia X., Xiong L., Sun K., Yu Z. P. Estimation of Maximum Road Friction Coefficient Based on Lyapunov Method. *International Journal of Automotive Technology*. 2016. Vol. 17, no. 6. P. 991–1002. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12239-016-0097-7>
- [9] Garcia-Pozuelo D., Olatunbosun O., Palli G., Strano S., Terzo M., Tordela C. Estimation of tire-road contact forces through a model-based approach employing strain measurements. *Meccanica*. 2022. Vol. 57, no. 8. P. 1801–1829. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01548-y>
- [10] Zou Z., Zhang X., Zou Y., Lenzo B. Tire-Road Friction Coefficient Estimation Method Design for Intelligent Tires Equipped with Three-Axis Accelerometer. *SAE International Journal of Vehicle Dynamics, Stability, and NVH*. 2021. Vol. 5, no. 3. P. 249–258. DOI: <https://doi.org/10.4271/10-05-03-0017>
- [11] Ding X., Wang Z., Zhang L. Hybrid Control-Based Acceleration Slip Regulation for Four-Wheel-Independent-Actuated Electric Vehicles. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*. 2021. Vol. 7, no. 3. P. 1976–1989. DOI: <https://doi.org/10.1109/TTE.2020.3048405>
- [12] Shi Q., Wang M., He Z., Yao C., Wei Y., He L. A Fuzzy-based Sliding Mode Control Approach for Acceleration Slip Regulation of Battery Electric Vehicle. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 2022. Vol. 35. Art. 72. DOI: <https://doi.org/10.1186/s10033-022-00729-w>
- [13] Kang S., Chen J., Qiu G., Tong H. Slip Ratio Adaptive Control Based on Wheel Angular Velocity for Distributed Drive Electric Vehicles. *World Electric Vehicle Journal*. 2023. Vol. 14, no. 5. Art. 119. DOI: <https://doi.org/10.3390/wevj14050119>
- [14] Quan L., Chang R., Guo C. Vehicle State and Road Adhesion Coefficient Joint Estimation Based on High-Order Cubature Kalman Algorithm. *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13, no. 19. Art. 10734. DOI: <https://doi.org/10.3390/app131910734>
- [15] Park J. Y., Na S. Development of Real-Time Estimator on Maximum and Present Tire Grip for Direct Yaw Moment Control. *International Journal of Automotive Technology*. 2023. Vol. 24, no. 4. P. 1223–1234. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12239-023-0100-z>
- [16] Bi J., Han Y., Hou M., Wang C. Adaptive Second-Order Sliding Mode Wheel Slip Control for Electric Vehicles with In-Wheel Motors. *World Electric Vehicle Journal*. 2024. Vol. 15, no. 11. Art. 538. DOI: <https://doi.org/10.3390/wevj15110538>

Надійшла (Received) 22.03.2026;

Прийнята (Accepted) 21.04.2026;

Опублікована (Published) 29.05.2026;

MATHEMATICAL MODEL OF WHEEL–ROAD INTERACTION AS A PART OF A COMPREHENSIVE ELECTRIC VEHICLE MODEL

NESTERENKO O.H. Postgraduate Student of the Department of Automated Electromechanical Systems, National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kharkiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0226-1153>, e-mail: Oleksandr.Nesterenko@ieec.khpi.edu.ua;

KUNCHENKO T.Yu. Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Automated Electromechanical Systems, National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kharkiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2462-1509>, e-mail: Tetiana.Kunchenko@khpi.edu.ua.

Purpose. The purpose of the work is to develop a set of mathematical models of wheel-road interaction as a part of a comprehensive electric vehicle model suitable for studying acceleration, braking, cornering, load redistribution between axles and wheels, and for analyzing traction electric drive control algorithms under typical and near-limit driving conditions.

Methodology. The research is based on theoretical mechanics, vehicle dynamics, electric drive theory, mathematical modelling, as well as empirical relationships describing tyre adhesion to the supporting surface. The Burckhardt empirical model is used to determine forces in the contact patch, while electric vehicle motion is described within a planar motion model that takes into account longitudinal and lateral load transfer, changes in normal reactions, and wheel slip.

Findings. A consistent set of models has been formed that makes it possible to determine reactions in the wheel-road contact and to assess the influence of the adhesion coefficient, slip, vehicle speed, vertical load and control mode on electric vehicle behaviour. The model reproduces motion on dry, wet and slippery surfaces and allows analysis of

traction loss, reduced controllability and deterioration in the implementation of traction or braking torque. It also makes it possible to compare the operating modes of the driving wheels, evaluate the system sensitivity to road parameters, and use the results for the synthesis of slip limitation, torque redistribution, and yaw stability algorithms. The results are suitable for defining test parameters, verifying control logic and making a preliminary assessment of system energy efficiency.

Originality. The scientific novelty lies in integrating a wheel model, an empirical description of tire-road interaction, and a planar electric vehicle motion model into a unified mathematical framework suitable for studying individual wheel electric drive and limited-adhesion conditions.

Practical value. The developed set of models can be used as a basis for a computational testing bench for studying traction control, anti-slip and anti-lock control, regenerative braking, and Smart Drive solutions for electric vehicles under different road operating conditions.

Keywords: electric vehicle, electric vehicle dynamics, wheel-road interaction, adhesion coefficient, slip ratio, Burckhardt model, mathematical modeling.

REFERENCES

- [1] Pacejka, H. B. (2012). *Tire and Vehicle Dynamics*. Oxford: Butterworth-Heinemann. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2010-0-68548-8>
- [2] Gillespie, T. D. (2021). *Fundamentals of Vehicle Dynamics* (Revised ed.). Warrendale: SAE International. DOI: <https://doi.org/10.4271/R-506>
- [3] Rajamani, R. (2012). *Vehicle Dynamics and Control* (2nd ed.). New York: Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1433-9>
- [4] Wong, J. Y. (2022). *Theory of Ground Vehicles* (5th ed.). Hoboken: John Wiley & Sons. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781119719984>
- [5] Canudas-de-Wit, C., Tsiotras, P., Velenis, E., Basset, M., & Gissinger, G. (2003). Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction. *Vehicle System Dynamics*, 39(3), 189–226. DOI: <https://doi.org/10.1076/vesd.39.3.189.14152>
- [6] Burckhardt, M. (1993). *Fahrwerktechnik: Radschlupf-Regelsysteme*. Würzburg: Vogel Verlag.
- [7] Miller, J. I., & Cebon, D. (2016). Tyre curve estimation in slip-controlled braking. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 230(3), 332–351. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954407015585934>
- [8] Xia, X., Xiong, L., Sun, K., & Yu, Z. P. (2016). Estimation of Maximum Road Friction Coefficient Based on Lyapunov Method. *International Journal of Automotive Technology*, 17(6), 991–1002. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12239-016-0097-7>
- [9] Garcia-Pozuelo, D., Olatunbosun, O., Palli, G., Strano, S., Terzo, M., & Tordela, C. (2022). Estimation of tire-road contact forces through a model-based approach employing strain measurements. *Meccanica*, 57(8), 1801–1829. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01548-y>
- [10] Zou, Z., Zhang, X., Zou, Y., & Lenzo, B. (2021). Tire-Road Friction Coefficient Estimation Method Design for Intelligent Tires Equipped with Three-Axis Accelerometer. *SAE International Journal of Vehicle Dynamics, Stability, and NVH*, 5(3), 249–258. DOI: <https://doi.org/10.4271/10-05-03-0017>
- [11] Ding, X., Wang, Z., & Zhang, L. (2021). Hybrid Control-Based Acceleration Slip Regulation for Four-Wheel-Independent-Actuated Electric Vehicles. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 7(3), 1976–1989. DOI: <https://doi.org/10.1109/TTE.2020.3048405>
- [12] Shi, Q., Wang, M., He, Z., Yao, C., Wei, Y., & He, L. (2022). A Fuzzy-based Sliding Mode Control Approach for Acceleration Slip Regulation of Battery Electric Vehicle. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 35, 72. DOI: <https://doi.org/10.1186/s10033-022-00729-w>
- [13] Kang, S., Chen, J., Qiu, G., & Tong, H. (2023). Slip Ratio Adaptive Control Based on Wheel Angular Velocity for Distributed Drive Electric Vehicles. *World Electric Vehicle Journal*, 14(5), 119. DOI: <https://doi.org/10.3390/wevj14050119>
- [14] Quan, L., Chang, R., & Guo, C. (2023). Vehicle State and Road Adhesion Coefficient Joint Estimation Based on High-Order Cubature Kalman Algorithm. *Applied Sciences*, 13(19), 10734. DOI: <https://doi.org/10.3390/app131910734>
- [15] Park, J. Y., & Na, S. (2023). Development of Real-Time Estimator on Maximum and Present Tire Grip for Direct Yaw Moment Control. *International Journal of Automotive Technology*, 24(4), 1223–1234. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12239-023-0100-z>
- [16] Bi, J., Han, Y., Hou, M., & Wang, C. (2024). Adaptive Second-Order Sliding Mode Wheel Slip Control for Electric Vehicles with In-Wheel Motors. *World Electric Vehicle Journal*, 15(11), 538. DOI: <https://doi.org/10.3390/wevj15110538>