

I. ЕЛЕКТРОТЕХНІКА

УДК [621.3.011+621.3.013]:519.6

Тиховод С. М.

Д-р техн. наук, доцент, Запорожский национальный технический университет, Украина

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРАНСФОРМАТОРАХ НА ОСНОВЕ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЁВА

Моделирование переходных процессов в трансформаторах в настоящее время выполняют путем составления и решения уравнений состояния для магнитоэлектрических схем замещения. Эти процессы могут быть весьма продолжительными, что приводит к значительному времени расчета при использовании современных программных средств. Цель данной работы – разработка более быстродействующего метода расчета переходных электромагнитных процессов в трансформаторах, использующего полиномиальную аппроксимацию решения, а также разработка удобной для практики схемной модели метода. На основе аппроксимации решения уравнений состояния полиномами Чебышёва разработан метод расчета переходных процессов в магнитоэлектрических цепях. Предложена схемная интерпретация разработанного метода. Показано, что в специальной схеме замещения справедливы законы Кирхгофа для изображений токов и магнитных потоков в виде векторов, содержащих значения коэффициентов разложения этих величин по полиномам Чебышёва. Данный метод позволяет заменить операции с мгновенными значениями токов операциями с постоянными токами в предложенной схеме замещения, в результате чего интегро-дифференциальные уравнения состояния заменяются алгебраическим уравнением. При расчете предложенным методом переходного процесса в трехфазном трансформаторе процессорное время сокращается более чем в два раза по сравнению с расчетами известными методами. Предложенный метод особенно удобен для расчета переходных процессов в магнитоэлектрических цепях, так как позволяет использовать источники напряжения, управляемые производной тока, а также позволяет легко вычислять интегралы решений.

Ключевые слова: полиномы Чебышёва, переходные процессы, схемная интерпретация, магнитоэлектрические цепи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При коммутациях в электротехнических системах происходят переходные электромагнитные процессы, приводящие к броскам тока. Эти броски представляют опасность для оборудования, а также влияют на надежность релейной защиты. Переходные процессы в трансформаторах могут быть весьма продолжительными, что приводит к значительному времени расчета. Реальные исследуемые цепи могут содержать несколько сотен элементов, что при расчетах приводит к большим системам дифференциальных уравнений состояния. В настоящее время для решения таких систем широко применяются многошаговые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Однако большой размер системы уравнений приводит к увеличению времени и снижению точности моделирования при использовании известных численных методов. Поэтому модификация методов численного решения интегро-дифференциальных уравнений, приводящая к сокращению времени расчета, а также наглядная схемная интерпретация этих методов является актуальной задачей.

Цель данной работы – разработка более быстродействующего метода расчета переходных электромагнитных процессов в трансформаторах, использующего полиномиальную аппроксимацию решения, а также разработка удобной для практики схемной модели метода.

ИЗЛОЖЕНИЕ МАТЕРИАЛА

Рассмотрим одноконтурную цепь переменного тока, содержащую резистивный (R), индуктивный (L) и емкостный (C) элементы, включенные последовательно. Пусть до коммутации конденсатор был заряжен до напряжения $u_C(t_0)$. При подключении в момент $t = t_0$ источника переменной ЭДС $e(t)$ в цепи происходит переходный процесс, который описывается линейным интегро-дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + u_C(t_0) = e(t) \quad (1)$$

Поставим условие, чтобы уравнение, составленное по закону напряжений Кирхгофа, соблюдалось точно в заданном ряде N узловых временных точек t_0, t_1, \dots, t_{N-1} для некоторой функции, которая аппроксимирует зависимость тока от времени. В других точках закон Кирхгофа соблюдается с некоторой погрешностью. Это условие соответствует основам известных методов коллокаций.

Рядом исследователей [1–3] для решения дифференциальных уравнений предлагается использование полиномов Чебышёва, которые обладают важным свойством равномерности погрешности аппроксимации искомых функций этими полиномами. Представляется рациональным для аппроксимации решения интегро-дифферен-

Для вычисления интеграла используем квадратурную схему Кленшоу-Куртиса, описанную в работе [1]. Проинтегрируем выражение (5) от x_0 до x_m :

$$J(x_m) = \int_{x_0}^{x_m} p(x) dx = \int_{x_0}^{x_m} (c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(x)) dx \quad (16)$$

Интегралы полиномов Чебышёва определяются формулами [1]:

$$\left. \begin{aligned} \int T_0(x) dx &= T_1(x) + d; \int T_1(x) dx = \frac{1}{4} T_2(x) + d; \\ \int T_k(x) dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{T_{k+1}(x)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(x)}{k-1} \right] dx + d, \quad k > 1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Преобразуем выражение (16), используя формулы (17), (9), а также то, что $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, получим:

$$J(x_m) = \int_{x_0}^{x_m} p(x) dx = \delta_m i_0 + \left\{ \frac{1}{4} [T_2(x_m) - T_2(x_0)] - T_1(x_0) \delta_m \right\} c_1 + \dots + \left\{ \left[\frac{T_{k+1}(x_m) - T_{k+1}(x_0)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x_m) - T_{k-1}(x_0)}{2(k-1)} \right] - T_k(x_0) \delta_m \right\} c_k + \dots + \left\{ \left[\frac{T_N(x_m) - T_N(x_0)}{2N} - \frac{T_{N-2}(x_m) - T_{N-2}(x_0)}{2(N-2)} \right] - T_{N-1}(x_0) \delta_m \right\} c_{N-1} = S_{m,1} c_1 + S_{m,2} c_2 + \dots + S_{m,k} c_k + \dots + S_{m,N-1} c_{N-1} + \delta_m i_0, \quad (18)$$

где $\delta_m = x_m - x_0$.

Рассмотрев выражение (18) при изменении номера m от 1 до $N-1$, получим систему уравнений, которая в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} \mathbf{C} + \Delta \cdot i_0, \quad (19)$$

где \mathbf{J} – вектор интегралов (18) для значений $m=1, 2, \dots, N-1$;

$$\Delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_{N-1}]^T; \quad (20)$$

Запишем интегро-дифференциальное уравнение (1) для ряда точек при изменении номера $m=1, 2, \dots, N-1$. Получим систему уравнений, которая в матричной форме имеет вид:

$$L\mathbf{I}' + R\mathbf{I} + B\mathbf{J} + u_{C0} = \mathbf{e}, \quad (21)$$

где $B=1/C$, \mathbf{e} – вектор значений ЭДС источника в точках $1, 2, \dots, N-1$ временного сегмента; u_{C0} – значение напряжения на конденсаторе в точке t_n .

Если подставить в выражение (21) векторы \mathbf{I} (10), \mathbf{I}' (15), \mathbf{J} (19), то получим выражение второго закона Кирхгофа для изображения \mathbf{C} :

$$(LD + RV + BS)\mathbf{C} = \mathbf{e} - u_{C0} - Ri_0 - B\Delta i_0. \quad (22)$$

Решением уравнения (22) определяется вектор \mathbf{C} коэффициентов полиномиальной аппроксимации. Тогда при известном начальном значении тока i_0 можно определить значения тока во всех произвольных точках временного сегмента τ согласно (5), (9):

$$i(t) \approx i_0 + c_1(T_1(t) - T_1(t_0)) + c_2(T_2(t) - T_2(t_0)) + \dots + c_{N-1}(T_{N-1}(t) - T_{N-1}(t_0)). \quad (23)$$

Если в цепи имеется только одна ветвь, то согласно (22) приходится решать систему из $N-1$ уравнений. Однако в результате решения определяются значения не в одной временной точке, как в традиционных численных методах, а сразу в $N-1$ точке. Для сложных цепей матрица соответствующей системы уравнений весьма разрежена и применение методов решения уравнений с разреженными матрицами позволяет существенно сократить время расчета.

Схемная интерпретация метода численного расчета переходных процессов в электрических цепях. Уравнение (22) можно интерпретировать следующим образом. Пусть в исходной ветви $R-L-C-e$ протекает ток $i(t)$. Исходной ветви соответствует ветвь замещения (рис. 1), в которой протекает изображение \mathbf{C} , тока $i(t)$. Изображение \mathbf{C} – это вектор коэффициентов разложения тока $i(t)$ по полиномам Чебышева. При этом в ветви замещения резистивный элемент имеет сопротивление RV и последовательно с ним навстречу току включается источник постоянной ЭДС величиной Ri_0 (см. рис. 1). Индуктивный элемент имеет сопротивление LD , а емкостный элемент – сопротивление BS и последовательно с ним навстречу току включается источник постоянной ЭДС величиной $B\Delta i_0 + u_{C0}$.

Докажем, что в узлах схемы замещения для изображений \mathbf{C} соблюдается и первый закон Кирхгофа. Для этого воспользуемся уравнением (10). В любом узле электрической цепи для токов ветвей, сходящихся к узлу, в любой момент времени a , следовательно, во всех временных узловых точках выполняется закон токов Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^b (\mathbf{I}_k - i_{0k}) = \sum_{k=1}^b \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_k = 0, \quad (24)$$

где b – количество ветвей, сходящихся к узлу, k – текущий номер ветви.

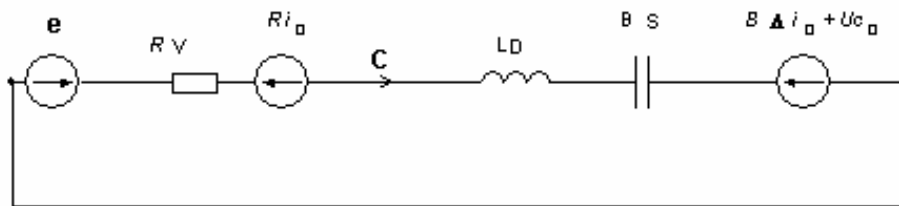


Рисунок 1 – Схема замещения одноконтурной $R-L-C-e$ цепи

Если уравнение (24) умножить на матрицу, обратную матрице \mathbf{V} , то получим:

$$\sum_{k=1}^b \mathbf{C}_k = 0. \quad (25)$$

Из изложенного материала сделаем *выводы*. Реальному току $i(t)$ соответствует векторное изображение \mathbf{C} в схеме замещения, показанной на рис. 1. Все изображения \mathbf{C} токов в схеме замещения удовлетворяют законам Кирхгофа, если она составляется по правилам:

- источник ЭДС заменяется векторным источником \mathbf{e} , содержащим значения ЭДС в $N-1$ опорной точке;
- резистивный элемент имеет изображение сопротивления $R\mathbf{V}$ и последовательно с ним навстречу току включается дополнительный источник ЭДС $R i_0$;
- индуктивный элемент имеет изображение сопротивления $L\mathbf{D}$;
- емкостный элемент имеет изображение сопротивления $B\mathbf{S}$ и последовательно с ним навстречу току включается дополнительный источник ЭДС $B^* \Delta^* i_0 + u_{C0}$.

Следовательно, при известных начальных значениях токов ветвей i_{0k} и напряжений на конденсаторах u_{C0k} в точке t_0 сегмента $[a, b]$, система уравнений, составленная по законам Кирхгофа для изображений \mathbf{C}_k токов для всех узлов без одного и для всех главных контуров, имеет единственное решение. В результате решения системы линейных алгебраических уравнений, составленных по законам Кирхгофа для изображений токов, получаем вектор \mathbf{C} , состоящий из подвекторов \mathbf{C}_k , содержащих значения коэффициентов разложения функций токов $i_k(t)$ по полиномам Чебышёва для всех ветвей. Зная коэффициенты разложения тока $i_k(t)$ по полиномам Чебышёва и значение i_{k0} для ветви k , мы можем получить значения тока I_k во всех узловых точках в интервале времени $[a, b]$:

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{V}^* \mathbf{C}_k + i_{k0}. \quad (26)$$

Также, согласно (23), можно получить значение тока во всех произвольных точках любого из $N-1$ отрезков в сегменте времени $[t_0, t_{N-1}]$. Напряжение на конденсаторе в момент времени t вычисляется по формуле:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + u_C(t_0), \quad (27)$$

где интеграл выражается формулой (18).

Оценка погрешности и ее минимизация. Если положения опорных точек в сегменте $[-1, 1]$ выбирать не равномерно, а в нулях полиномов Чебышёва

$$T_N(x_k) = 0:$$

$$x_k = -\cos \left[\frac{2k+1}{2N} \pi \right], \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (28)$$

то погрешность интерполяции можно существенно снизить. В этом случае плотность опорных точек сгущается на краях сегмента. Полином, полученный по системе

опорных точек, расположенных в нулях полиномов Чебышёва, близок к минимаксному, который минимизирует максимальное отклонение от аппроксимируемой функции [4].

Оценим погрешность R интерполяции временной функции тока, производной и интеграла тока по времени. Погрешность R аппроксимации полиномом $p(t)$ степени N некоторой функции $f(t)$, имеющей ограниченные непрерывные производные до степени N на участке $[a, b]$, при условии, что в N различной точке полином совпадает с функцией $f(t)$, определяется выражением [6]:

$$R = f(t) - p(t) = \frac{f^{(N)}(\zeta)\omega(t)}{N!}, \quad (29)$$

где $\zeta \in [a, b]$,

$$\omega(t) = (t-t_0)(t-t_1) \dots (t-t_N). \quad (30)$$

Если положения опорных точек выбирать в нулях полиномов Чебышёва, то полином (30) имеет вид:

$$\omega_N(t) = (b-a)^N \cdot 2^{1-2N} T_N \left(\frac{2t-(b+a)}{b-a} \right). \quad (31)$$

Чебышёвская норма данного полинома равна:

$$\|\omega_N(t)\| = (b-a)^N \cdot 2^{1-2N}.$$

Тогда погрешность R аппроксимации полиномами Чебышёва можно оценить как:

$$R \leq \frac{M_N (b-a)^N \cdot 2^{1-2N}}{N!}, \quad (32)$$

где $M_N = \max |f^{(N)}(\zeta)|$.

Формула (32) показывает, что погрешность аппроксимации функции полиномами Чебышёва, при условии выбора положения опорных точек в нулях полиномов Чебышёва, в 2^{1-2N} раз меньше, чем при равномерном расположении опорных точек.

Оценим погрешность интерполяции производной тока по времени. Поскольку $i(t) = p(t) + R(t)$, то

$$i'(t) = p'(t) + R'(t). \quad (33)$$

Согласно (29), (31) имеем:

$$R'(t) = (b-a)^N \cdot 2^{1-2N} \frac{M_N}{N!} T'_N \left(\frac{2t-(b+a)}{b-a} \right). \quad (34)$$

Учитывая, что $|T'_{N+1}(x)| \leq (N+1)^2$, то оценка погрешности производной имеет вид:

$$|R'(t)| \leq (b-a)^N \cdot 2^{1-2N} \frac{M_N (N+1)^2}{N!}. \quad (35)$$

Оценим теперь погрешность интерполяции интеграла тока по времени. Проинтегрируем выражение $i(t) = p(t) + R(t)$:

$$\int_{t_0}^t i(t) dt = \int_{t_0}^t p(t) dt + \int_{t_0}^t R(t) dt$$

Согласно (29), (31):

$$\int_{t_0}^t R(t) dt = (b-a)^N \cdot 2^{1-2N} \frac{M_N}{N!} \int_{t_0}^t T_N \left(\frac{2t-(b+a)}{b-a} \right) dt \quad (36)$$

С учетом того, что интеграл полинома Чебышёва имеет свойство (17), преобразуем выражение (36), и, принимая во внимание, что полиномы Чебышева по модулю меньше единицы, получим следующую оценку погрешности аппроксимации интеграла:

$$\left| \int_{t_0}^t R(t) dt \right| \leq (b-a)^N \cdot 2^{1-2N} \frac{M_N}{N!} \left[\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N-1} \right] \quad (37)$$

Оценка (37) показывает, что погрешность аппроксимации интеграла функции тока значительно меньше, чем погрешность аппроксимации самой функции тока.

В формулы оценки погрешности (32), (35) и (37) входит множитель $\tau^N = (b-a)^N$, поэтому от размера временного сегмента в значительной мере зависит погрешность. На больших интервалах изменения независимой переменной $t \gg \tau$ весь интервал моделирования следует разбить на несколько сегментов, а уравнение (22) следует решать на каждом сегменте методом циклической прогонки, увеличивая каждый раз, текущее время на значение τ .

Во все формулы оценки погрешности (32), (35) и (37) также входит множитель, равный значению N -ой производной решения. Это значение заранее неизвестно, но может быть оценено с помощью правила Рунге. Это правило заключается в том, что выполняется расчет с некоторым размером сегмента τ , а затем выполняется расчет с уменьшенным вдвое значением τ при одном и том же значении N . Численный эксперимент дает расхождение значений расчетов Δ_r . Это расхождение равно разности погрешностей, главная из которых – погрешность аппроксимации производной. Согласно (35) получим разность максимальных погрешностей, откуда:

$$M_N = \frac{\Delta_r \cdot N!}{\left(\tau^N (1 - (1/2)^N) \right) \cdot 2^{1-2N} (N+1)^2} \quad (38)$$

Оценить значение погрешности производной можно и другим способом. Согласно (15), производная решения находится как функция разложения по N полиномам Чебышёва. Поскольку свойством полиномов Чебышёва является то, что при отбрасывании последнего члена разложения другие коэффициенты разложения не изменяются, значение $(N+1)$ -го члена разложения производной может характеризовать погрешность аппроксимации производной решения.

Пример расчета переходных электромагнитных процессов на основе магнитоэлектрических схем замещения. Магнитоэлектрические схемы замещения (МЭСЗ) электромагнитных устройств – это схемы, объединяющие электрические и магнитные цепи этих устройств, с учетом взаимодействия друг с другом. Взаимодействие электрической и магнитной цепей обычно учитывается с помощью источников напряжения, управляемых током (магнитным потоком) или производной тока (магнитного потока). Известны различные виды МЭСЗ [7]. На рис. 2 рассмотрен участок магнитопровода с установленной катушкой и его представление магнитоэлектрической схемой замещения. В данном случае рассмотрена МЭСЗ магнитной ветви, в которой протекает не магнитный поток, а так называемый «магнитный ток» i^m – производная магнитного потока.

В схеме замещения на рис. 2 использовано дифференциальное магнитное сопротивление $R^d = \frac{\ell}{\mu^d S}$, где

$\mu^d = dB/dH$ – дифференциальная магнитная проницаемость, ℓ , S – длина и площадь поперечного сечения магнитной ветви.

Предложенный метод формального построения схем замещения может быть использован для расчета переходных процессов в магнитоэлектрических цепях электромагнитных устройств. В качестве модельной задачи рассмотрим переходный процесс подключения трехфазного трансформатора (рис. 3) к источнику синусоидального напряжения.

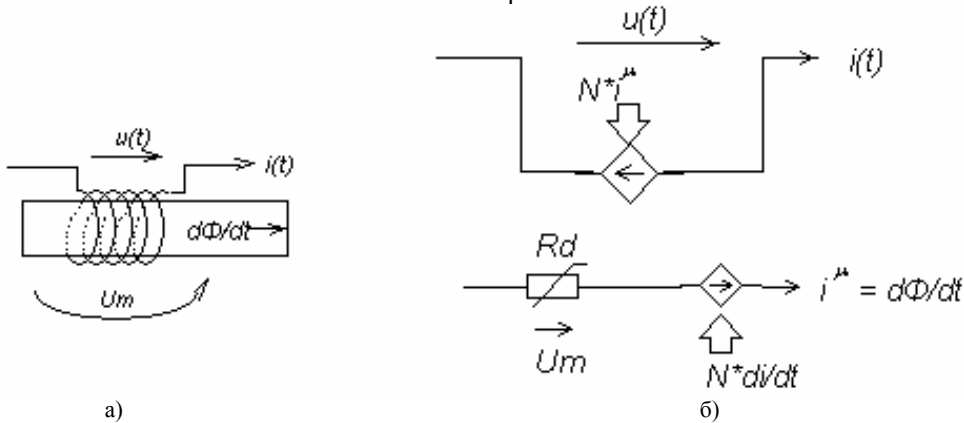


Рисунок 2 – Представление участка магнитопровода с катушкой МЭСЗ: а) – магнитная ветвь с катушкой; б) – магнитоэлектрическая схема замещения, использующая «магнитный ток».

В соответствии с правилами представления электрических и магнитных цепей и учета их взаимодействия составим схему замещения трехфазного трансформатора для векторных изображений переменных (рис. 4). Магнитная цепь на схеме замещения имеет такую же топологию, как и магнитная система. В ветвях схемы замещения протекают изображения токов, присутствующих в исходной цепи, а все элементы заменяются соответствующими изображениями, причем каждому резистивному элементу соответствует дополнительный источник ЭДС, задающий начальные условия на временном сегменте.

В ветвях 6, 7, 9 протекают магнитные токи стержней, а в ветвях 5, 8, 10 – магнитные токи вне магнитной системы.

Система уравнений, составленная по законам Кирхгофа для МЭСЗ (рис. 4) трехфазного трансформатора для изображений электрических и магнитных токов имеет следующий вид:

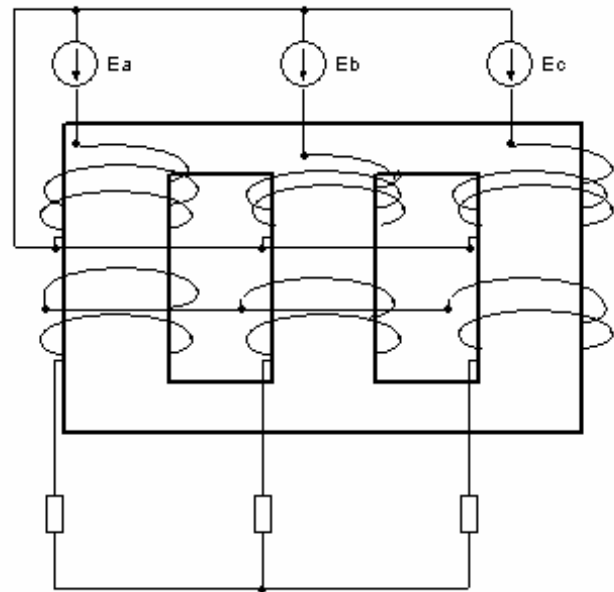


Рисунок 3 – Общий вид конструкции трехфазного трехстержневого трансформатора, включенного в электрическую схему.

$$\begin{aligned}
 &C_1 + C_2 + C_3 - C_4 = 0; \\
 &(L_1 \mathbf{D} + R_1 \mathbf{V})C_1 + N_1 C_6 \mathbf{V} + R_4 C_4 \mathbf{V} = \mathbf{e}_A - R_1 i_{01} - N_1 i_{06} - R_4 i_{04}; \\
 &(L_1 \mathbf{D} + R_1 \mathbf{V})C_2 + N_1 C_7 \mathbf{V} + R_4 C_4 \mathbf{V} = \mathbf{e}_B - R_1 i_{02} - N_1 i_{07} - R_4 i_{04}; \\
 &(L_1 \mathbf{D} + R_1 \mathbf{V})C_3 + N_1 C_9 \mathbf{V} + R_4 C_4 \mathbf{V} = \mathbf{e}_C - R_1 i_{03} - N_1 i_{09} - R_4 i_{04}; \\
 &R_5 C_5 \mathbf{V} - R_{d6} C_6 \mathbf{V} + N_1 C_1 \mathbf{D} + N_2 C_{11} \mathbf{D} = R_{d6} i_{06} - R_5 i_{05}; \\
 &R_{d6} C_6 \mathbf{V} - N_1 C_1 \mathbf{D} - N_2 C_{11} \mathbf{D} + R_{d15} C_{15} \mathbf{V} + N_1 C_2 \mathbf{D} + N_2 C_{12} \mathbf{D} - R_{d7} C_7 \mathbf{V} = -R_{d15} i_{015} + R_{d6} i_{06} + R_{d7} i_{07}; \\
 &- N_1 C_2 \mathbf{D} - N_2 C_{12} \mathbf{D} + R_{d7} C_4 \mathbf{V} - R_8 C_8 \mathbf{V} = -R_{m4} i_{04} + R_{d3} i_{03}; \\
 &R_8 C_1 \mathbf{V} + R_{d7} C_4 \mathbf{V} + R_{d7} C_7 \mathbf{V} + N_2 C_2 \mathbf{D} + N_2 C_2 \mathbf{D} = -R_{d7} i_{07} + R_{d6} i_{06} - R_8 i_{08}; \\
 &- N_1 C_3 \mathbf{D} - N_2 C_{13} \mathbf{D} + R_{d9} C_4 \mathbf{V} - R_{10} C_{10} \mathbf{V} = -R_{d9} i_{09} + R_{10} i_{010}; \\
 &C_5 + C_6 - C_{15} = 0; \\
 &C_{11} + C_{12} + C_{13} - C_{14} = 0; \\
 &(L_2 \mathbf{D} + R_3 \mathbf{V})C_{11} + N_2 C_6 \mathbf{V} + R_{14} C_{14} \mathbf{V} = -R_3 i_{011} - N_2 i_{06} - R_{14} i_{014}; \\
 &(L_2 \mathbf{D} + R_3 \mathbf{V})C_{12} + N_2 C_7 \mathbf{V} + R_{14} C_{14} \mathbf{V} = -R_3 i_{012} - N_2 i_{07} - R_{14} i_{014}; \\
 &(L_2 \mathbf{D} + R_3 \mathbf{V})C_{13} + N_2 C_9 \mathbf{V} + R_{14} C_{14} \mathbf{V} = -R_3 i_{013} - N_2 i_{09} - R_{14} i_{014}; \\
 &C_{15} + C_7 + C_8 - C_{16} = 0; \\
 &C_{16} + C_9 + C_{10} = 0
 \end{aligned} \tag{39}$$

Система линейных алгебраических уравнений (39) имеет единственное решение - векторы C_k ($k=0...N-1$), содержащие значения коэффициентов разложения функций токов $i_k(t)$ по полиномам Чебышёва для всех ветвей. Зная для любой ветви коэффициенты C_k , значение i_0 в начальной точке t_0 , мы можем согласно (26) получить значение тока во всех узловых точках в интервале времени $[a, b]$. Значения магнитного потока магнитной ветви во всех узловых точках можно вычислить по формуле:

$$\Phi = \Phi_0 + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_\Phi + i_0 \mathbf{\Delta}) \cdot \tau / 2, \tag{40}$$

где Φ_0, i_0 – значения магнитного потока и магнитного тока в точке t_0 ; C_Φ – вектор коэффициентов разложения магнитного тока по полиномам.

Для проверки адекватности предложенного метода составлена компьютерная программа Tr3_VDS_C в системе Matlab.

Вычисления производятся в следующей последовательности:

1. Выполняется ввод исходных данных, задается количество узлов N на сегменте ($4 < N < 10$), количество сегментов N_u на всем исследуемом временном интервале, а также длину одного сегмента τ .

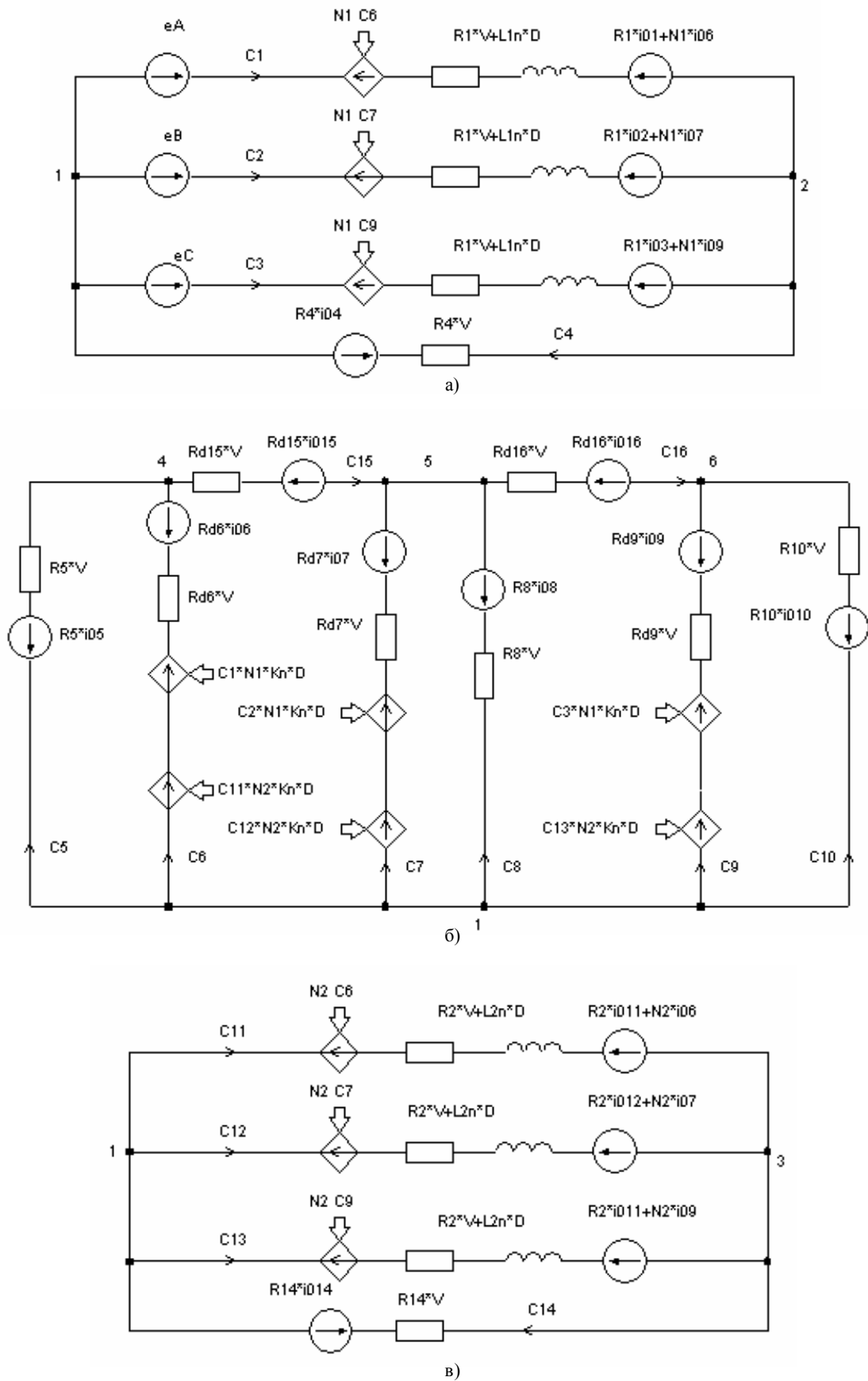


Рисунок 4 – Магнитоелектрическа схема заміщення трьохфазного трансформатора для зображень електричних і магнітних токів: а) – первинна обмотка з джерелом, б) – магнітна ланка, в) – вторинна обмотка з навантаженням.

2. Согласно (28) задаются положения опорных точек x_k на отрезке $[-I, I]$. Затем вычисляются временные границы сегмента: $a = -\tau(x_0 + I)/2$; $b = a + \tau$.

3. Согласно формулам (10), (14), (18), (20) вычисляются матрицы $\mathbf{V}, \mathbf{D}, \mathbf{S}, \Delta$.

4. Вычисляются значения вектора ЭДС во всех точках сегмента.

5. Составляется матрица \mathbf{Z} системы уравнений (39). Матрица \mathbf{Z} содержит значения магнитных сопротивлений $R_{d6}, R_{d7}, R_{d9}, R_{d15}, R_{d16}$, которые зависят от магнитных потоков этих ветвей. Поэтому на каждом временном сегменте в опорных точках выполняется расчет значений магнитных потоков (40) ветвей, содержащих ферромагнитные сердечники, и, согласно динамической кривой намагничивания, выполняется расчет дифференциальных магнитных сопротивлений $R_{d6}, R_{d7}, R_{d9}, R_{d15}, R_{d16}$. Поскольку кривая намагничивания нелинейная, то расчет магнитных сопротивлений выполняется в итерационном цикле.

6. Выполняется итерационный цикл, в котором при каждом изменении параметра цикла выполняется следующее:

- вычисляется вектор правых частей \mathbf{F} системы (39);
- решается система алгебраических уравнений и определяется для всех токов вектор полиномиальных коэффициентов \mathbf{C} ;
- выделяются подвекторы \mathbf{C}_i полиномиальных коэффициентов для каждого тока;
- вычисляются магнитные потоки ветвей 3 и 6, используя формулу (40), в которой Φ_0 – значение магнитного потока в конце предыдущего временного сегмента;
- согласно кривой намагничивания стали по значениям магнитных потоков вычисляются магнитные сопротивления ветвей 6, 7, 9, 15 и 16;
- с учетом измененных значений магнитных сопротивлений ветвей корректируется матрица \mathbf{Z} и вектор правых частей \mathbf{F} системы (39);

– итерационный цикл заканчивается, если значения магнитных сопротивлений смежных итерационных циклов не превышают заданной погрешности.

7. После выхода из итерационного цикла выполняется следующее:

– вычисляются конечные значения токов данного сегмента, которые являются начальными значениями для следующего сегмента;

– выполняется переход на п. 5 и следующий временной сегмент.

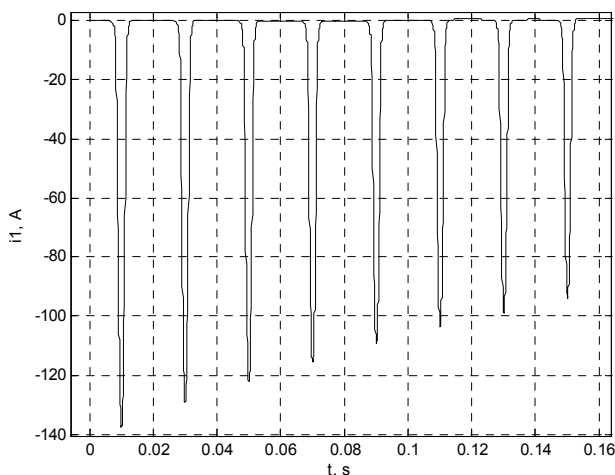
На рис. 5 и рис. 6 представлены расчетные осциллограммы тока $i_1(t)$ и магнитной индукции в стержне, полученные в результате расчета по программе Tr3_VDS_C, с которой можно познакомиться на сайте [8]. Там же дана инструкция по пользованию этой программой. Как видно, переходные процессы в трансформаторе весьма продолжительны.

В программе Tr3_VDS_C расчет выполнялся с использованием постоянного размера временного сегмента τ . В профессиональных программных комплексах, использующих предложенный метод, можно рекомендовать автоматический выбор τ по какому-нибудь критерию, например по количеству циклов итерации на каждом временном сегменте.

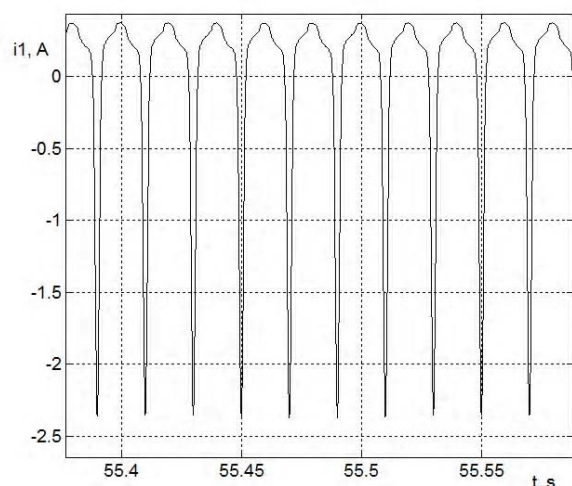
Для сравнительной оценки разработанного метода в системе Matlab разработан ряд программ решения рассмотренной модельной задачи различными методами.

Одним из эффективных методов численного интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений, которые, как правило, описывают реальные магнитоэлектрические цепи, является метод Гира. При использовании модифицированного метода переменных состояния и численного метода Гира разработана программа Tr1_3.m. С этой программой можно познакомиться на сайте [8].

Сегодня «де факто» в расчетах электромагнитных процессов в электрических цепях лидерами являются



а)



б)

Рисунок 5 – Расчетная осциллограмма: ток $i_1(t)$: а) – начало, б) – продолжение процесса

программы ЕМТР/АТР, разработанные Г. Доммелем [9]. В этих программах используется метод узловых потенциалов для автоматического составления уравнений состояния и метод трапеций второго порядка точности для численного решения дифференциальных уравнений. Сравнение времени расчета задачи в разных системах моделирования некорректно, так как Matlab является весьма медленным интерпретатором. Так как в этой статье сравниваются не компьютерные программы, а методы расчета, то для модельной задачи на основе метода Доммеля разработана программа Tr3_Dom.m и выполнен расчет. Метод узловых потенциалов данной задачи рассматривает всего пять узлов, но система узловых уравнений должна быть дополнена уравнениями вычисления токов и магнитных потоков, которые управляют управляемыми источниками ЭДС. В результате система уравнений имеет такой же порядок, как и система уравнений задачи, решенной методом Гира. Нелинейные магнитные сопротивления вычислялись на каждом шаге интегрирования в итерационном цикле.

Результаты расчета при одинаковой заданной погрешности по программе Tr3_VDS_C не имеют видимых различий от результатов, полученных расчетом с использованием численного метода Гира, а также методом Доммеля, то есть различие составляет десятые доли процента. С помощью операторов tic/toc оценивалось процессорное время расчета. Сравнение процессорного времени расчета модельной задачи предложенным методом и методами Гира и Доммеля показало следующее. Метод Доммеля при решении модельной задачи показал сокращение процессорного времени около 10% по сравнению с методом Гира. Предложенный метод показал сокращение процессорного времени более чем на 200% по сравнению с методом Доммеля. Это можно объяснить следующими соображениями:

- в предложенном методе для решения интегро-дифференциальных уравнений использованы полиномы Чебышёва, которые имеют малую погрешность аппроксимации функций решения этими полиномами;
- за каждый цикл выполнялся расчет не одного, а группы $N-1$ шагов интегрирования;
- во многих программных комплексах, специализированных для расчета переходных процессов в электрических цепях, каждый элемент электрической цепи

рассматривается как отдельная ветвь. Предложенный метод интерпретирует как одну ветвь три элемента, включенных последовательно: резистивный, индуктивный и емкостный;

- сокращение системы уравнений достигается также за счет того, что уравнения численного метода заложены в схему замещения для изображений.

ВЫВОДЫ

Предложенный метод расчета переходных процессов в электрических цепях позволяет заменить операции с мгновенными значениями токов операциями с постоянными токами в предложенной схеме замещения, в результате чего интегро-дифференциальные уравнения состояния заменяются алгебраическим уравнениям. При решении модельной задачи предложенным методом процессорное время расчета существенно сокращается по сравнению с известными методами. Предложенный метод особенно удобен для расчета переходных процессов в магнитоэлектрических цепях, так как позволяет использовать источники напряжения, управляемые производной тока, а также позволяет легко вычислять интегралы решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Н. И. Применение полиномов Чебышева в численном анализе. / Н. И. Васильев, Ю. А. Клоков, А. Я. Шкерстена. – Рига.: Зинатне. – 1984. – 240 с.
2. Татевян С. К. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышёва. / С. К. Татевян, Н. А. Сорокин, С. Ф. Залеткин Вычислительные методы и программирование. – 2002. – Т.3, с. 52–81.
3. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1983. – 384 с.
4. Ильина В. А. Численные методы для физиков-теоретиков.1. / В. А. Ильина, П. К. Силаев. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2003. – 132 с.
5. Данилов Ю. А. Многочлены Чебышева / Ю. А. Данилов. – Минск.: Вышэйшая школа, 1984. – 157 с.
6. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 630 с.
7. Тиховод С. М. Модификация магнитоэлектрических

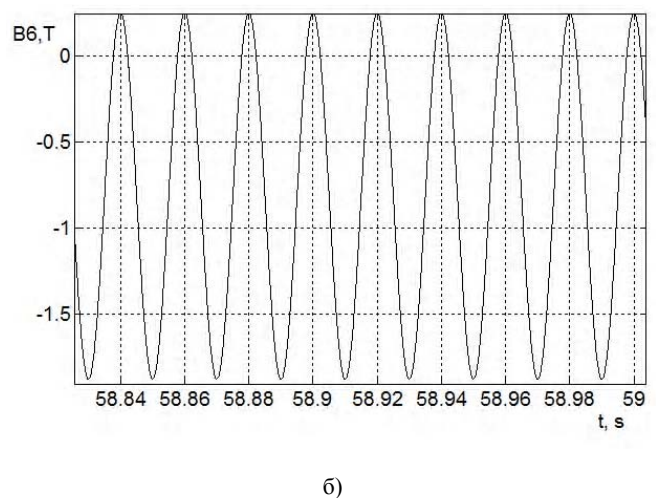
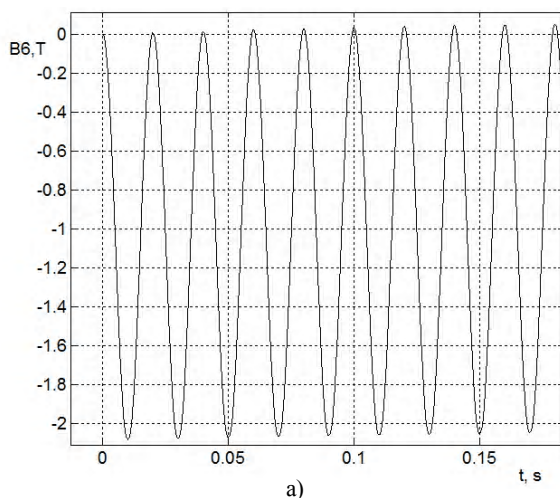


Рисунок 6 – Расчетная оциллограмма: магнитная индукция в стержне фазы «А»: а) – начало, б) – продолжение процесса

ких схем замещения электромагнитных устройств для анализа переходных процессов / С. М. Тиховод / Электричество. – 2014. – №2. – С. 53–60.

8. Помощь студентам-электрикам. Научные разработки, программы. Программы для расчета переход-

ного процесса в трехфазном трансформаторе. – [Электронный ресурс]. – режим доступа: <http://www.electricity.zp.ua/>

9. Dommel Hermann W. EMTP theory book / Hermann W. Dommel. – British Columbia: Microtran Power System Analysis Corporation Vancouver, 1996. – 631 p.

Статья поступила в редакцию 23.10.2015

Тиховод С. М.

Д-р техн. наук, доцент, Запорожский национальный технический университет, Украина

РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ТРАНСФОРМАТОРАХ НА ОСНОВІ МАГНІТОЕЛЕКТРИЧНИХ ЗАСТУПНИХ СХЕМ З ИСПОЛЬЗОВАННЯМ ПОЛІНОМІВ ЧЕБЫШЕВА

Моделювання перехідних процесів в трансформаторах нині виконують шляхом складання і розв'язку рівнянь стану для магнітоелектричних заступних схем. Ці процеси можуть бути дуже тривалими, що призводить до значного часу розрахунку при використанні сучасних програмних засобів. Мета цієї роботи – розробка більш швидкодійного методу розрахунку перехідних електромагнітних процесів в трансформаторах, що використовує поліноміальну апроксимацію розв'язку, а також розробка зручної для практики схемної моделі методу. На основі апроксимації розв'язку рівнянь стану поліномами Чебишева розроблений метод розрахунку перехідних процесів в магнітоелектричних колах. Запропонована схемна інтерпретація розробленого методу. Показано, що в спеціальній заступній схемі справедливі закони Кирхгофа для зображень струмів і магнітних потоків у вигляді векторів, що містять значення коефіцієнтів розкладання цих величин по поліномах Чебишева. Цей метод дозволяє замінити операції з миттєвими значеннями струмів операціями з постійними струмами в запропонованій заступній схемі, внаслідок чого інтегро-дифференціальні рівняння стану замінюються алгебраїчними рівняннями. При розрахунку запропонованим методом перехідного процесу в трифазному трансформаторі процесорний час скорочується більш ніж в два рази в порівнянні з розрахунками відомими методами. Запропонований метод особливо зручний для розрахунку перехідних процесів в магнітоелектричних колах, оскільки дозволяє використати джерела напруги, що керовані похідною струму, а також дозволяє легко обчислювати інтегралі розв'язку.

Ключові слова: поліноми Чебишева, перехідні процеси, схемна модель, магнітоелектричні кола.

Tykhovod S. M.

Doctor of science, Assoc. Prof., Zaporozhye national technical university, Ukraine

CALCULATION OF TRANSIENTS IN TRANSFORMER ON THE BASIS OF MAGNETO ELECTRICAL EQUIVALENT SCHEMES WITH THE USE OF TCHEBYSHEV'S POLYNOMIALS

Transient modeling in transformers is presently executed by formation and solution of the state equations for the magneto-electrical equivalent schemes. These processes can be very long, that results in a considerable time of calculation at the modern software use. The aim of the given work is the development of more fast-acting method of calculation of electromagnetic transients in transformers, using solution approximation by polynomials, and also development of comfortable scheme model of method for putting into practice. On the basis of solution approximation of the state equations by the Tchebyshev's polynomials the method of transients calculation in magneto-electrical equivalent schemes is worked out. Scheme interpretation of the developed method is offered. It is shown that in the special equivalent scheme the Kirchhoff's laws are fair for the images of currents and magnetic fluxes as vectors, containing the values of coefficients of decomposition of these values by the Tchebyshev's polynomials. This method allows to replace operations with the instantaneous values of currents by operations with direct currents in offered equivalent scheme. As a result the integro-differential state equations are submitted by algebraic equations. The calculation with the offered method of transient in a three-phase transformer processor allows to reduce time more than twice as compared to calculations with the help of the well-known methods. The given method is especially comfortable for the transient's calculation in magneto-electrical circuits, since it allows to use voltage sources controlled by the current derivative as well as easily evaluate the integrals of solution.

Key words: Tchebyshev's polynomials, transients, scheme interpretation, magneto-electrical circuits.

REFERENCES

- Vasilev N. I., Klokov Yu. A., Shkerstena A. Ya. Primenenie polinomov Chebyisheva v chislennoy analize. Riga, Zinatne, 1984, 240 s.
- Tatevyan S. K., Sorokin N. A., Zaletkin S. F. Chislennoe integririvanie obyiknovennykh differentsialnykh uravneniy s ispolzovaniem ryadov Chebyish Yova. Vyichislitelnyye metody i programmirovaniye, 2002.
- Pashkovskiy S. Vyichislitelnyye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebyisheva. Nauka, GRFML, 1983, 384 s.
- Ilna V. A., Silaev P. K. Chislennyye metody dlya fizikov-teoretikov. 1. Moskva-Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2003, 132 s.
- Danilov Yu. A. Mnogochlenyi Chebyisheva. Minsk.: Vyisheyshaya shko-la, 1984, 157 s.
- Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Chislennyye metody. Moscow, Nauka, 1987, 630 s.
- Tihovod S. M. Modifikatsiya magnitoelektricheskikh shem zamescheniya elektromagnitnykh ustroystv dlya analiza perehodnykh protsessov. Elektrichestvo, 2014, No 2, S. 53–60.
- Pomosch studentam-elektrikam. Nauchnyye razrabotki, programmy. Programmy dlya rascheta perehodnogo protsessa v trehfaznom transformatore. <http://www.electricity.zp.ua/>
- Dommel Hermann W. EMTP theory book / Hermann W. Dommel. – British Columbia: Microtran Power System Analysis Corporation Vancouver, 1996, 631 p.