УДК 539.3

Мастиновский Ю. В.

Канд. техн. наук, доцент, Запорожский национальный технический университет, Украина

МАГНИТОТЕРМОУПРУГОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Исследуется распространение термоупругих волн в многослойной кусочно-однородной полосе, вызванных комплексным действием нестационарных термомеханических нагрузок на внешних поверхностях конструкции и объемным термоударом, возбуждаемым электромагнитным полем. Водятся допущения, упрощающие связанную систему термоупругих уравнений. Задача решается в одномерной постановке числено с применением метода характеристик. Предлагаемая методика позволяет проводить численные эксперименты с целью создания слоистых конструкций с заданными свойствами.

***Ключевые слова**: многослойные конструкции, магнитотермоупругое деформирование, метод характеристик.*

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что ток, возбуждаемый магнитным полем, приводит к возникновению объемных сил, а температурные градиенты, вызванные джоулевым нагревом, создают термические напряжения. Многослойные элементы конструкций (ЭК) широко используются в качестве магнитотермоизоляционных и демпфирующих покрытий и экранов в различных объектах электротехники и электроэнергетики, например, в трансформаторном оборудовании [1], электродвигателях [2, 3] и др. В процессе эксплуатации многослойные ЭК могут испытывать комплексные действия нагрузок ударного типа как внешних, термомеханических, так и внутренних, объемных сил, возбуждаемых электромагнитным полем. Если в результате действия такого нагружения произойдет хотя бы частичное расслоение ЭК, то это может значительно изменить динамические характеристики всей конструкции и даже привести к ее полному разрушению. Разработка новых и модернизация старых многослойных ЭК, удовлетворяющих требованиям прочности и надежности в современных условиях эксплуатации, является важной практической задачей.

Цель работы состоит в разработке математической модели и методике расчета нестационарного магнитотермоупругого деформирования многослойных ЭК для использования в инженерной практике.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В работе [1] приводится обзор аналитико-эмпирических методик расчета нагрева различных ЭК силового трансформаторного оборудования и электрических реакторов. Представлены методика расчетов с применением системы конечно-элементного анализа ANSYS. Оценка теплового состояния и ресурса изоляции асинхронного двигателя выполнена в работе [2], где используется термодинамическая модель электродвигателя для исследования процесса нагрева малой длительности. Определение параметров двухмассовой тепловой схемы асинхронного двигателя по результатам экспериментов выполнено в работе [3]. Обзор работ по нестационарной термоупругости приводится в статье [4], а нестационарной магнитотермоупругости – в работах [5–7].

Задачи чаще всего рассматривают в одномерной постановке для полубесконечных тел с использованием интегральных преобразований. Интегральные преобразования плохо применимы для исследований нестационарных процессов многослойных ЭК, а полученные аналитические решения часто настолько громоздки, что без числовых расчетов не представляется возможным провести оценку термоупругого состояния конструкции.

Обзор публикаций свидетельствует о необходимости разработки новых моделей и методик расчетов многослойных ЭК с заданными характеристиками.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются кусочно-однородные конструкции, содержащие электропроводящие слои. Представляет интерес оценка относительного влияния объемных сил, вызванных вихревыми токами, на процесс упругого деформирования ЭК. Предполагается, что скорость распространения тепла конечна, проводящие элементы конструкции неферромагнитные, с изменением температуры в рассматриваемых материалах упругие свойства сохраняются, внешние поверхности теплоизолированы. Задача магнитотермоупругости сформулирована для двухслойной конструкции, представляющей собой два изотропных скреплённых между собой слоя различной толщины и имеющие различные термомеханические характеристики. К внешним поверхностям слоистой конструкции подводится тепловой поток и/или производится механическое воздействие. Одновременно в проводящем слое производится объемный термоудар.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исходной системой уравнений магнитотермоупругости являются уравнения Максвелла и обобщенный закон Ома для электромагнитного поля, уравнения Дюамеля-Неймана для упругого поля и обобщенное уравнение теплопроводности для температурного поля [5, 8–

10]. Для одномерного случая ось x выбираем перпендикулярно границам слоев. Составляющие магнитного и электрического полей при $\overrightarrow{U} = (u(x,t), 0, 0)$ заданы векторами

$$\overrightarrow{B} = (0, 0, B(x,t)), \ \overrightarrow{E} = (0, E(x,t), 0).$$

Вектор смещения

$$\overrightarrow{U} = (u(x,t), 0, 0).$$

Здесь t – время.

Основные уравнения и соответствующие определяющие соотношения приводятся ниже.

1. Уравнение движения

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial\sigma}{\partial x} = F, \qquad (1)$$

где $F = J \cdot B$ – объёмная сила, которая определяется из соотношения Лоренца, J – плотность электрического тока, $J = \sigma_0\left(E - B\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, $B = \mu_0 H$, μ_0 – магнитная постоянная, σ_0 – удельная электрическая проводимость; $\sigma = \sigma_x$ – механическое напряжение.

2. Обобщенное уравнение теплопроводности

$$\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_0\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) + \gamma T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}, \qquad (2)$$

где κ – теплопроводность; ρ – плотность, c_0 – удельная теплоемкость при постоянной деформации, T – температура; T_0 – начальная температура, $\gamma = \alpha(3\lambda + 2\mu)$, λ, μ – упругие постоянные Ляме; α – температурный коэффициент линейного расширения, τ_0 – коэффициент релаксации.

3. Определяющее соотношение

$$\sigma = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma T_0(T - T_0). \qquad (3)$$

Если магнитное поле постоянно ($H = H_0$), то магнитная индукция будет также постоянной величиной $B = \mu_0 H_0 = B_0$. Тогда объемная сила F, входящая в уравнение (1), определяется равенством

$$F = -\sigma_0 B_0^2\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Введем безразмерные величины:

$$(\overline{x}, \overline{u}) = c_1 n(x,u), \qquad c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho,$$

$$(\overline{t}, \overline{\tau_0}) = c_1^2 n(t,\tau_0), \qquad \overline{\sigma} = \sigma/\mu, \qquad \theta = (T - T_0)/T_0,$$

$$m = \sigma_0 B_0^2 / (\rho c_1^2 n), \qquad n = \rho c_0/\kappa.$$

Тогда система уравнений (1), (2) принимает вид (для простоты записи верхний знак « – » здесь и в дальнейшем опущен)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial\theta}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial t}, \\ &\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + g\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $a = b/\beta^2$, $b = \gamma T_0/\mu$, $\beta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$, $g = \gamma/(\kappa n)$.

Безразмерное напряжение определяется по формуле

$$\sigma = \beta^2\frac{\partial u}{\partial x} - b\theta.$$

Неизвестные величины и параметры, соответствующие свойствам материала определенного слоя, в дальнейшем при необходимости будут отмечены нижним индексом. Если слой не является электропроводящим, то в уравнениях (4) полагаем $m = 0$.

К системе уравнений (4) следует присоединить следующие условия:

начальные

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = \theta = \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \qquad \text{при } t = 0, \ x > 0;$$

граничные механические

$$\sigma = -p_0 f(t) \ \text{ при } x = 0; \ \sigma = 0 \ \text{ при } x = 1, \qquad (5)$$

граничные тепловые

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = q_0\varphi(t) \ \text{ при } x = 0; \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \ \text{ при } x = 1 \qquad (6)$$

и условия сопряжения на границе раздела слоев, которые включают равенства напряжений и смещений, температур и потоков тепла

$$u|_1 = u|_2, \ \sigma|_1 = \sigma|_2; \ \theta|_1 = \theta|_2, \ \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_1 = \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_2. \qquad (7)$$

В условиях (5), (6) p_0 – интенсивность нормальной сжимающей силы, $q_0 = -q$, q плотность теплового потока в направлении внешней нормали к поверхности $x = 0$; $f(t)$ и $\varphi(t)$ – законы изменений нагрузки.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Система гиперболических уравнений второго порядка (4) решается численно с использованием метода характеристик [11, 12]. Семейства характеристик системы (4) и соотношения на них определяются следующими равенствами:

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = \pm 1$ выполняются соотношения

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \mp d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \pm R_1\, dx = 0\,,$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = \pm c_2$ выполняются соотношения

$$d\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) \mp c_2 d\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \pm c_2 R_2\, dx = 0\,,$$

где $R_1 = a\frac{\partial \theta}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial t}$, $R_2 = \frac{\partial \theta}{\partial t} + g\frac{\partial u}{\partial x}$.

Для проведения расчетов в области слоев I и II строится сетка, образованная семейством характеристик $\frac{dx}{dt} = \pm 1$ (принимается $c = \max\{c|_1, c|_2\}$). Фактически это необходимо, поскольку другие характеристические линии имеют более крутой наклон. Для вычислений неизвестных во внутренних узлах сетки и на границе используется стандартная процедура [11, 12]. Решение в точках контакта различных слоев строится следующим образом [13]. Формально, точка, принадлежащая линии раздела слоев, рассматривается как бы состоящей из двух точек: одна из них принадлежит слою I, другая – слою II. Когда точка принадлежит слою I, исключается интегрирование вдоль характеристик, проходящих вне слоя I. С другой стороны, эта точка принадлежит слою II, и с ней поступают аналогично, как в предыдущем случае. Полученные равенства дополняются условиями контакта. С подробностями численного интегрирования вдоль сетки характеристик можно ознакомиться в работах [11, 12].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЯ

Для проверки работы математической модели и вычислительной схемы решена задача о действии теплового удара, приложенного к свободным поверхностям трехслойной конструкции. Внешние слои I ($-2\ell \le x \le -\ell$) и III ($\ell \le x \le 2\ell$) изготовлены из одного материала – стали, а внутренний слой II ($|x| < \ell$) из другого материала – меди. Граничные условия задавались в виде $\theta = \theta_0 H(t)$ при $x = \pm 2\ell$. Здесь $H(t)$ – функция Хевисайда.

Теплофизические и механические параметры принимались такими, как в работе [14]. Значения $m = 0$, $\ell = 0{,}5$. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными, приведенными в работе [14], которые были получены аналитически с использованием преобразования Лапласа.

Рассматривался также случай действия теплового удара по двухслойной конструкции при $m = 1$. Слой I ($0 \le x \le 0{,}8$) изготовлен из стали, слой II ($0{,}8 \le x \le 1$) – из полимерного материала. Механические и теплофизические характеристики материалов слоев приводятся в книге [15]. Граничные условия (5), (6) задавались при $f(t) = t\exp(-t)$, $\varphi(t) = 0$. Полученные распределения температур, перемещений и напряжения для различных моментов времени показали, что в областях, прилегающих к границе раздела составляющих конструкции, в результате прохождения и отражения термоупругих волн напряжения испытывают скачок и становятся растягивающими.

ВЫВОДЫ

Предложенная модель и методика расчета нестационарного магнитотермоупругого деформирования кусочно-однородных конструкций позволяет проводить численные эксперименты. Варьируя геометрические, теплофизические параметры составляющих конструкции и значения объемной силы, определяемой действием электромагнитного поля, можно проводить анализ с целью создания конструкции с заданными характеристиками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванков В. Ф. Электротепловые расчетные модели элементов конструкции трансформаторного оборудования / В. Ф. Иванков, А. В. Басова, Н. В. Шульга // Електротехніка і електроенергетика. – № 2, 2014. – с. 41-53.
2. Коцур М. И. Оценка теплового состояния изоляции асинхронного двигателя с фазным ротором с модифицированной системой импульсного регулирования / М. И. Коцур // Електротехніка і електроенергетика. – № 1, 2013. – с. 31-34.
3. Зюзев А. М. Определение параметров двухмассовой тепловой схемы асинхронного электродвигателя по результатам эксперимента/ А. М. Зюзев, В. П. Метельков // Електротехніка і електроенергетика. – № 2, 2012. – с. 37-41.
4. Bala Kiran. A Review of Two-Temperature Thermoelasticity / Kiran Bala // International Journal of Modern Engineering Research (IJMER), Vol. 2, Issue 6. – 2012 – pp.4224-4227.
5. El-Bary A. A. Magneto-Thermo-Elastic Stresses Induced by a Transient Magnetic Field in a Conducting Solid Circular Cylinder / A. A. El-Bary, M. Higuchi, R. Kawamura // International Journal of Solids and Structures, v. 44, e. 16, 2007. – pp. 5316-5335.
6. El-Bary A. A. Numerical Solution of Electro-magneto-thermo-mechanic Shock Problem / A. A. El-Bary // Commutational Methods in Science and Technology, Vol. 12 (2) – 2006 – pp.101-108.
7. Ezzat M. Generalized magneto-thermo-elasticity in a perfectly conducting medium / M. Ezzat, H. Youssef // International Journal of Solids and Structures, Vol. 42 – 2005. – pp. 6319 -6334.
8. Партон В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин // М.: Наука. Главн. ред. физ.-матем. лит. – 1981. – 588 с.

9. Селезов И. Т. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах / И. Т. Селезов, С. В. Корсунский // Киев: Наукова думка – 1991. – 200 с.
10. Moon F. C. Magnetically induced stress waves in a conducting solid – theory and experiment / F. C. Moon, S. Chattopadhyay // Transactions of the ASME, 41, Ser. E, №3 – 1974. – pp. 641-646.
11. Сагамонян А. Я. Волны напряжений в сплошных средах / А. Я. Сагамонян // М.: Изд-во МГУ – 1985 – 416 с.
12. Chou P.C., Mortimer R. W. A Unified Approach One-Dimensional Elastic Waves by the Method of Characteristics / P. C. Chou, R. W. Mortimer // Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, No. 3 -1967. – pp. 745-750.
13. Данильченко Д. В. Нестационарные волны в составной цилиндрической оболочке / Д. В. Данильченко, Ю. В. Мастиновский // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – Запоріжжя: ЗНТУ. – 2004. – № 1. – с. 105-107.
14. El-Bary A. A. Thermal Shock Problem for One Dimensional Generalized Thermoelastic Layered Composite Material / A. A. El-Bary, H. V. Youssef // Mathematical and Computational Applications, Vol. 11, No.2, 2006/ – pp. 103-110.
15. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко / / Киев: Вища школа – 1975. – 216 с.

Статья поступила в редакцию 30.10.2015

Мастиновський Ю. В.
Канд.техн. наук, доцент, Запорізький національний технічний університет, Україна

МАГНЕТОТЕРМОПРУЖНЕ НЕСТАЦІОНАРНЕ ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ КОНСТРУКЦИЙ

Досліджується розповсюдження термопружних хвиль у багатошаровій кусково-однорідній смузі, спричинених комплексною дією нестаціонарних термомеханічних навантажень на зовнішніх поверхнях конструкції і об'ємним термоударом, що збуджується електромагнітним полем. Вводяться припущення, що спрощують зв'язану систему термопружних рівнянь. Задача розв'язується у одновимірному поставленні чисельно з використанням методу характеристик. Запропонована методика дозволяє проводити чисельні експерименти з метою створення шаруватих конструкцій з заданими властивостями.

Ключові слова: *багатошарові конструкції, магнето термопружне деформування, метод характеристик.*

Mastinovky Y. V.
Cand.Sc.(Tech.), Associate Professor, Zaporozhye National Technical University, Ukraine

MAGNETO-THERMO-ELASTIC UNSTEADY DEFORMATION OF MULTILAYER STRUCTURES

Modern electrical machines and devices, power generation facilities operate under complex unsteady magneto-thermo-elastic loads. Development of new insulating and damping coatings structures, shielding used in various electrical equipment requires new mathematical models and calculation methods for engineering practice. In this paper we consider a two-layer structure consisting of two piecewise-homogeneous non-ferromagnetic materials, one or both of which are electro-conductive. Volume forces action caused by the electromagnetic field and thermo-mechanical impact on the structure boundary is simulated. The original system of equations to solve the problem under study includes Maxwell equations and the generalized Ohm's law for the determination of the electromagnetic field, the Duhamel-Neumann law – for the elastic field and the generalized Fourier heat equation – for the temperature field. These equations form a closed system and are the fundamental equations of magneto-thermo-elasticity. It is assumed that the speed of heat propagation is finite, and the magnetic field is constant. Assumptions are introduced to simplify the coupled system of thermo-elastic equations. The problem is solved numerically in a one-dimensional formulation applying the method of characteristics. Coupling conditions and method of calculation of unknown quantities in the nodal points of the grid area at the interface between layers are indicated. The proposed method of numerical and analytical solutions of problems under consideration allows, without making significant changes in the design scheme, to conduct numerical experiments. Setting up various geometric and thermo-physical parameters, it is possible to identify areas prone to damages under specified loads.

Key words: *multilayer structures, magneto-thermo-elastic deformation, method of characteristics.*

REFERENCES

1. Ivankov V. F, Basova A. V., Shulga N. V. Electroteplovyye raschennye modely eleventov konstruktsii transformatornogo oborudovaniya. *Elektrotekhnika i elektroenerhetyka*. № 2, 2014, pp. 41–53.
2. Kotsur M. I. Otsenka teplovogo sostoyaniya izolyatsii asinkhronnogo dvigatelya s faznym rotorom s modifitsirovannoy sistemoy impulsnogo regulirovaniya. *Elektrotekhnika i elektroenerhetyka*. № 1, 2013, pp. 31–34.
3. Zyuzev A. M., V. P. Metelrov Opredeleniye parametrov dvukhmassovoy teplovoy skhemy asinkhronnogo elektrodvigatelya po rezultatam eksperimenta. *Elektrotekhnika i elektroenerhetyka*. № 2, 2012, p. 37–41.
4. Bala Kiran. A Review of Two-Temperature Thermoelasticity / Kiran Bala // International Journal of Modern Engineering Research (IJMER), Vol.2, Issue 6. 2012, pp.4224–4227.
5. El-Bary A. A., Higuchi M, Kawamura R. Magneto-Thermo-Elastic Stresses Induced by a Transient Magnetic Field in a Conducting Solid Circular Cylinder.

International Journal of Solids and Structures, v. 44, e. 16, 2007, pp. 5316–5335.
6. El-Bary A. A. Numerical Solution of Electro-magneto-thermo-mechanic Shock Problem / A. A. El-Bary. Commutational Methods in Science and Technology, Vol.12 (2). 2006, pp.101–108.
7. Ezzat M. Generalized magneto-thermo-elasticity in a perfectly conducting medium. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, 2005, pp. 6319–6334.
8. Parton V .Z. Metody magnitnoy teoriyi uprugosty. Moscow. Nauka. Glavn. red. phys. mat. lit. 1981, 588 s
9. Selezov I T. Nestatsionarnsye i nelineyniye volny v elektroprovodyaschikh sredakh. Kiev. Naukova dumka, 1991, 200 s.
10. Moon F. C. Chattopadhyay S. Transactions of the ASME, 41, Ser. E, № 3, 1974, pp. 641
11. Sagamonyan A. Y. Volhy napryazheniy v sploshnykh sredakh. Moscow, Izd-vo MGU, 1985, 416 s.
12. Chou P. C.,. Mortimer R. W. A Unified Approach One-Dimensional Elastic Waves by the Method of Characteristics. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, No. 3, 1967, pp. 745–750.
13. Danilchenko D. V., Mastinovsky Y. V. Nestatsionarnyye volny v sostavnoy tsilindricheskoy obolochke. Novi materialy i technolohiyi v metallurhiyi ta mashinobuduvanni. Zaporizhzhya: ZNTU. 2004, No 1, s. 105–107.
14. El-Bary A. A., Youssef H. V. Thermal Shock Problem for One Dimensional Generalized Thermoelastic Layered Composite Material. Mathematical and Computational Applications, Vol. 11, No. 2, 2006. pp. 103–110.
15. Kovalenko A. D. Termouprugost. Kiev: Vyscha shkola, 1975, 216 s