

## РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ТАХОГРАММ РАЗГОНА И ТОРМОЖЕНИЯ ЧАСТОТНОРЕГУЛИРУЕМОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

*Предложены аналитические расчеты частных решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего оптимальные траектории изменения скорости (тахограммы) частотно-регулируемого асинхронного двигателя (ЧРАД). При указанных тахограммах обеспечивается минимизация основных электромагнитных потерь электроэнергии этого двигателя в пускотормозных режимах. Данная минимизация осуществляется для заданных начальных и конечных значений скорости и различных времен разгона и торможения. Выполнены расчеты и сравнение между собой оптимальных, квазиоптимальных и известных (нашедших в настоящее время применение на практике) энергосберегающих тахограмм (линейного и параболического вида, с формой гиперболического синуса), а также соответствующих им основных электромагнитных потерь электроэнергии, электромагнитного момента и модуля статорного тока ЧРАД. Вычисленные оптимальные и квазиоптимальные тахограммы предназначены для использования в электроприводах переменного тока прокатных станков с ЧРАД, работающих в интенсивных пускотормозных режимах.*

**Ключевые слова:** асинхронный двигатель, частотное регулирование, оптимальные тахограммы.

С учетом продолжающегося в мире и Украине удорожания электрической энергии (ЭЭ) является актуальным и остро востребованным практикой уменьшение непроизводительных потерь ЭЭ в электродвигателях. Особенно это важно для пускотормозных режимов частотно-регулируемых асинхронных двигателей (ЧРАД), которые, как известно, стали широко применяться во всех отраслях хозяйства. Одним из наиболее эффективных подходов к уменьшению потерь ЭЭ в указанных двигателях является формирование во времени определенной траектории изменения скорости (тахограммы) при разгоне или торможении.

При данном подходе в монографии [1] предложена и исследована линейная во времени тахограмма изменения скорости двигателя при разгоне, которая, как установлено автором этой монографии, обеспечивает минимизацию электрических потерь ЭЭ в роторе ЧРАД при его разгоне. В другой монографии [2] этого же автора также установлено, что линейная от времени траектория изменения скорости при разгоне и торможении ЧРАД одновременно обеспечивает и минимизацию электрических потерь в роторе при его перемещении. К сожалению, перечисленные выше исследования относятся только к режиму разгона (так как совсем не рассматривается режим торможения) и не учитывается при разгоне наличие других потерь энергии (в частности, электрических потерь в статоре, магнитных потерь, добавочных потерь) в ЧРАД, а поэтому не могут быть оценены общие электромагнитные потери электроэнергии (ОЭПЭ) в рассматриваемом двигателе в пускотормозных режимах.

Исследованию общих (включающих в себя электрические потери статора и ротора, магнитные и добавоч-

ные потери) электромагнитных потерь в пускотормозных режимах для ЧРАД посвящена статья [3], в которой приведена сравнительная оценка этих потерь применительно к различным траекториям изменения во времени скорости при разгоне данного двигателя: для линейного и параболического вида, для формы гиперболического синуса (с неизменным коэффициентом в аргументе). При этом в данной статье выявлено, что из всех указанных (названных «энергосберегающими») видов тахограмм наиболее экономичной является форма гиперболического синуса.

В этой же статье установлено, что ни один из выше упомянутых видов энергосберегающих траекторий изменения скорости ЧРАД при разгоне не является оптимальным (то есть – обеспечивающим минимально возможные ОЭПЭ при разгоне и торможении). А именно, они лишь служат в какой то степени приближением к оптимальной траектории. Также в данной статье доказано, что оптимальная (по минимуму ОЭПЭ в ЧРАД) траектория изменения скорости  $\omega$  от времени  $t$  совпадает с решением следующего нелинейного дифференциального уравнения:

$$\omega'' = K \cdot \omega^{0,3}, \quad (1)$$

не поддающегося точному аналитическому решению, где  $\omega'' = d^2\omega/dt^2$  – вторая производная скорости по времени;  $K$  – постоянный (при управлении с неизменным потокоцеплением ротора) коэффициент. Этот коэффициент зависит от параметров ЧРАД и определяется их выражения [3]:

$$K = \frac{0,65\Delta P_{\text{стн}} k_r^2 \Psi_r^2}{(R_s + k_r^2 R_r + 0,005 P_n / \eta_n) \cdot J^2} \quad (2)$$

В формуле (2) используются следующие обозначения параметров ЧРАД:

$R_s$  и  $R_r$  – активные сопротивления соответственно статорной и роторной обмоток;

$P_n$  и  $\eta_n$  – номинальные значения соответственно полезной мощности и коэффициента полезного действия;

$\Delta P_{\text{стн}}$  – номинальное значение потерь мощности в стали;

$\Psi_r$  и  $k_r$  – модули потокоцепления ротора и коэффициента связи ротора соответственно;

$J$  – приведенный к валу двигателя момент инерции привода. При этом в формулах (1) и (2) используются общепринятая для машин переменного тока система относительных единиц [4].

С учетом отмеченного выше отсутствия в настоящее время в известной научно-технической литературе математических зависимостей для определения оптимальных тахограмм разгона и торможения ЧРАД является чрезвычайно актуальной целью предложенной статьи – нахождение в явном аналитическом виде решения нелинейного дифференциального уравнения (1), которое бы собой описывало оптимальную (обеспечивающую минимизацию общих электромагнитных потерь электроэнергии) траекторию изменения скорости частотно-регулируемого асинхронного двигателя в пускотормозных режимах при заданных начальном и конечном значениях скорости, а также заданных временах разгона и торможения.

Достижение поставленной в статье цели выполним в несколько этапов, используя следующие (аналогичные из [3]) исходные допущения:

– системой автоматического управления (САУ) электроприводом идеально поддерживается неизменным значение модуля потокоцепления ротора:

$\Psi_r = \text{const}$  (равное его номинальному значению  $\Psi_{\text{ГН}}$ );

– в частотнорегулируемом электроприводе посредством САУ реализуется режим торможения двигателя с возвратом (рекуперацией) накопленной кинетической энергией привода в виде электрической в питающую сеть;

– пренебрегаем свободными (затухающими) составляющими статорных токов двигателя в пускотормозных режимах, т.к. влияние указанных составляющих при применении современных быстродействующих САУ (например, с подчиненным регулированием) на практике очень мало;

– рассматриваются только основные составляющие

от общих электромагнитных потерь мощности и энергии ЧРАД, вызванные основными (первыми) гармоническими составляющими фазных статорных токов двигателя;

– значения момента сопротивления  $M_c$  и момента инерции  $J$  привода принимаются неизменными:  $M_c = \text{const}$  и  $J = \text{const}$ .

Все последующие аналитические зависимости и расчеты приводятся в общепринятой для машин переменного тока системе относительных единиц [4].

**На первом этапе** найдем одно из возможных частных решений для обобщенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка следующего степенного вида:

$$\omega'' = K \cdot \omega^M, \quad (3)$$

у которого, очевидно: во-первых, вид, переменная  $\omega$ , постоянный положительный коэффициент  $K$ , показатель степени  $M$  (представляющий собой в общем случае действительное число, не равное 0 и 1) полностью соответствует упомянутому исходному дифференциальному уравнению (1); во-вторых, с учетом предыдущего решением этого уравнения является оптимальная временная функция  $\omega_{\text{опт}}(t)$ , обеспечивающая минимизацию ОЭПЭ в ЧРАД для пускотормозных режимов.

Принимая во внимание, что начальные ( $\omega = 0$  при  $t = 0$  – для режима разгона или  $\omega = \omega_{\text{уст}}$  при  $t = t_T$  – для режима торможения) и конечные ( $\omega = \omega_{\text{уст}}$  при  $t = t_{\text{po}}$  – для разгона или при  $t = t_{\text{то}}$  – для торможения) условия для частных решений дифференциального уравнения (ДУ) (3) при исследуемых пускотормозных режимах ЧРАД, предложим находить искомое частное решение данного уравнения в виде степенных временных зависимостей вида:

$$\omega = \omega_{\text{р.опт}} = \omega_{\text{уст}} \cdot \left( \frac{t}{t_{\text{po}}} \right)^N \quad (4)$$

при разгоне, либо

$$\omega = \omega_{\text{т.опт}} = \omega_{\text{уст}} \cdot \left( \frac{t_T - t}{t_{\text{то}}} \right)^N \quad (5)$$

при торможении, где  $\omega_{\text{уст}}$  – установившееся рабочее значение скорости двигателя;  $N$  – действительное постоянное число;  $t$  – текущее время, отсчитываемое от начала рассматриваемых режимов разгона и торможения;

$t_{\text{po}}$  – время разгона от нулевой (при  $t = 0$ ) до установившейся скорости  $\omega_{\text{уст}}$ ;  $t_{\text{то}}$  – время торможения от на-

чальной скорости  $\omega_{уст}$  (при  $t = 0$ ) до нулевой скорости.

Вычислим вторые производные по времени от временных функций (4) и (5) соответственно:

$$\omega'' = N(N-1) \cdot (\omega_{уст}/t_{po}^N) \cdot t^{N-2}, \quad (6)$$

$$\omega'' = N(N-1) \cdot (\omega_{уст}/t_{to}^N) \cdot (t_T - t)^{N-2} \quad (7)$$

и, подставив их в решаемое дифференциальное уравнение (3), получим соответствующие режимам разгона и торможения равенства:

$$N(N-1) \cdot (\omega_{уст}/t_{po}^N) \cdot t^{N-2} = K \cdot (\omega_{уст}/t_{po}^N)^M \cdot t^{MN}, \quad (8)$$

$$N(N-1) \cdot (\omega_{уст}/t_{to}^N) \cdot (t_{to} - t)^{N-2} = K \cdot (\omega_{уст}/t_{to}^N)^M \cdot (t_{to} - t)^{MN}. \quad (9)$$

Приравняв соответствующие постоянные коэффициенты перед степенными функциями и значения степенных показателей в левой и правой частях равенств (8) и (9) между собой:

$$\left. \begin{aligned} N(N-1) \cdot (\omega_{уст}/t_{po}^N) &= K \cdot (\omega_{уст}/t_{po}^N)^M, \\ N(N-1) \cdot (\omega_{уст}/t_{to}^N) &= K \cdot (\omega_{уст}/t_{to}^N)^M, \\ N-2 &= MN \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

определим из системы (10) значения параметров  $N$ ,  $t_{po}$  и  $t_{to}$  в частных решениях (4) и (5) ДУ (3):

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{2}{1-M}, \\ t_{po} = t_{to} &= \left[ \omega_{уст}^{1-M} \cdot \frac{2(1+M)}{K(1-M)^2} \right]^{0,5}, \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

Важно обратить внимание на то, что, во-первых, исходя из второй зависимости из (11) при неизменных значениях скорости  $\omega_{уст}$  и показателя степени  $M$  в ДУ (3), времена разгона  $t_{po}$  и торможения  $t_{to}$  равны между собой; во-вторых, при неизменных значениях скорости  $\omega_{уст}$  и при других произвольных значениях времени разгона  $t_p$  и торможения  $t_T$ , не равных их рассмотренным оптимальным значениям:  $t_p \neq t_{po}$  и  $t_T \neq t_{to}$ , – зависимости вида (4) и (5) уже не являются частными решениями ДУ (3). Таким образом, полученные степенного вида частные решения (4) и (5) характеризуются очень узкой областью применения – только для значений времени разгона и торможения ЧРАД, рассчитанных из (11).

**На втором этапе** применительно к исходному ДУ (1)

Таблица 1 – Технические данные двигателя АДО–2000–6000–12У1

№ п/п	Наименование параметров	Обозначение	Значение	Размерность
1.	Номинальная полезная мощность на валу	$P_n$	2000	кВт
2.	Номинальная частота вращения (скорость)	$n_n$	497,5	об/мин
3.	Номинальное действующее линейное напряжение	$U_{лн}$	6000	В
4.	Номинальный статорный ток	$I_{1н}$	259,5	А
5.	Номинальное значение КПД	$\eta_n$	96,3	%
6.	Номинальный коэффициент мощности	$\cos\varphi_n$	0,77	о.е.
7.	Номинальные потери в стали	$\Delta P_{ст.н}$	26,75	кВт
8.	Момент инерции ротора	$J$	786	кг·м <sup>2</sup>
9.	Активное сопротивление статора	$R_s$	$8,989 \cdot 10^{-3}$	о.е.
10.	Активное сопротивление ротора	$R_r$	$5,543 \cdot 10^{-3}$	о.е.
11.	Индуктивность рассеяния статора	$L_{\sigma s}$	0,0633	о.е.
12.	Индуктивность рассеяния ротора	$L_{\sigma r}$	0,0603	о.е.
13.	Индуктивность намагничивания	$L_m$	3,582	о.е.
14.	Коэффициент приведения ротора	$k_r$	0,9771	о.е.
15.	Номинальное потокоцепление ротора	$\Psi_{гн}$	0,96	о.е.
16.	Номинальный электромагнитный момент	$M_n$	0,745	о.е.
17.	Момент инерции привода	$J$	250	о.е.
18.	Постоянный коэффициент	$K$	$5,005 \cdot 10^{-6}$	о.е.

из зависимостей (11) с учетом значения  $M = 0,3$  определим параметр  $N$ , а также оптимальные времена разгона  $t_{po}$  и торможения  $t_{то}$ :

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{20}{7}, \\ t_{po} = t_{то} &= \left[ \frac{\omega_{уст}^{0,7}}{K} \cdot \frac{260}{49} \right]^{0,5}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

которые для значения скорости  $\omega_{уст} = 1 \text{ о.е.} = 52,36 \text{ рад./с}$  и параметров двигателя АД0–2000–6000–12У1 (приведенных в табл. 1) составляют:  $t_{po} = t_{то} = 1030 \text{ о.е.} = 3,28 \text{ с}$ .

Подставив зависимости из (12) в соотношения (4) и (5), получим степенного вида оптимальные частные решения ДУ (1) соответственно для режимов разгона и торможения:

$$\omega_{p,опт}(t) = \omega_{уст} \left( \frac{t}{t_{po}} \right)^{\frac{20}{7}}, \quad (13)$$

$$\omega_{т,опт}(t) = \omega_{уст} \left( \frac{t_{то} - t}{t_{то}} \right)^{\frac{20}{7}}. \quad (14)$$

**На третьем этапе** рассмотрим решения ДУ (3) для диапазона значений времен разгона  $t_p$  и торможения  $t_T$ , отличающихся от  $t_{po}$  и  $t_{то}$ .

Для этого аппроксимируем исходное нелинейное ДУ (1) следующим линейным ДУ:

$$\omega'' = K \cdot \omega, \quad (15)$$

заменяя в правой части этого уравнения показатель при переменной  $\omega$  на 1 вместо 0,3.

Составив для последнего уравнения соответствующее ему операторное изображение

$$p^2 \omega = K \cdot \omega, \quad (16)$$

и найдем из него два равных корня этого уравнения:

$p_{1,2} = \pm \sqrt{K}$ , определим из [5] общее временное решение линейного ДУ (15) в виде функции гиперболического синуса:

$$\omega = c_1 \text{sh}[\sqrt{K}(t + c_2)] + c_3, \quad (17)$$

где  $p$  – оператор Лапласа,  $c_1, c_2, c_3$  – постоянные коэффициенты;  $\text{sh}$  – гиперболический синус.

Исходя рассматриваемых начальных ( $\omega = 0$  для  $t = 0$

– при разгоне или  $\omega = \omega_{уст}$  для  $t = t_p$  – при торможении) или конечных ( $\omega = \omega_{уст}$  для  $t = t_p$  при разгоне или  $\omega = 0$  для  $t = t_T$  – при торможении) условий, определим значения указанных постоянных коэффициентов:

$$c_1 = 1/\sqrt{K}t_p, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0 \quad (18)$$

или

$$c_1 = -1/\sqrt{K}t_T, \quad c_2 = -t_T, \quad c_3 = 0 \quad (19)$$

при торможении.

С учетом (18) и (19) преобразуем общее решение (17) к следующему частному виду:

$$\omega = \omega_{уст} \frac{\text{sh}(\sqrt{K}t)}{\text{sh}(\sqrt{K}t_p)} \quad (20)$$

при разгоне или

$$\omega = \omega_{уст} \frac{\text{sh}[\sqrt{K}(t_T - t)]}{\text{sh}(\sqrt{K}t_T)} \quad (21)$$

при торможении.

Рассчитаем методом Рунге-Кутты с использованием вычислительного пакета программ точное частное решение (при упомянутых выше значениях начальных и конечных условий) для исходного нелинейного ДУ (1) при параметрах двигателя АД0–2000–6000–12У1 (из табл. 1) и сравним его с решениями (20) или (21), полученными для линейного ДУ (15). По результатам этих расчетов построены графики на рис. 1а для режима разгона (с временами разгона  $t_p$ , равными: а) 0,5с; б) 1 с; в) 2с; г) 3 с) и на рис. 1б для режима торможения (с временами торможения  $t_T$ , равными: а) 0,5с; б) 1 с; в) 2с; г) 3 с). На указанных рисунках сплошной кривой показаны графики для точных оптимальных частных решений  $\omega_{p,опт}$  и  $\omega_{т,опт}$  ДУ (1), полученных методом Рунге-Кутты соответственно для режимов разгона и торможения, а пунктирными кривыми – для тахограмм  $\omega$ , рассчитанных (при  $\xi = 1$ ) из (20) и (21) для линейного ДУ (15).

Из анализа данных графиков следует, что между точным оптимальным решением (показанным сплошной линией) и решением, полученным из линейного ДУ (15) и показанным пунктиром (при  $\xi = 1$ ) на рис. 1а, б, наблюдается определенная погрешность, характеризуемая среднеквадратичным отклонением, рассчитываемым из зависимостей:

$$\sigma_p = \left[ \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} (\omega_{p,опт} - \omega)^2 dt \right]^{0,5} \quad (22)$$

для разгона или

$$\left[ \sigma_T = \frac{1}{t_T} \int_0^{t_T} (\omega_{T, \text{опт}} - \omega)^2 dt \right]^{0,5} \quad (23)$$

для торможения, значение которых составляет (согласно табл.2) от 0,0835 % до 3,09 % в диапазоне изменения времени разгона и торможения от 0,5 до 3с.

Для уменьшения отмеченной погрешности автором предложено в зависимости (20) и (21) ввести поправочный коэффициент  $\xi$ , с учетом чего они преобразуются к следующему виду:

$$\omega = \omega_{\text{уст}} \frac{\text{sh}(\xi\sqrt{K}t)}{\text{sh}(\xi\sqrt{K}t_p)} - \quad (24)$$

при режиме разгона или

$$\omega = \omega_{\text{уст}} \frac{\text{sh}[\xi\sqrt{K}(t_T - t)]}{\text{sh}(\xi\sqrt{K}t_T)} - \quad (25)$$

при режиме торможения. Очевидно, что при  $\xi = 1$  последние две зависимости становятся идентичны зависимостям (20) и (21).

Из зависимостей (24) и (25) выполнены расчеты частных решений для скорости  $\omega$  при различных значениях поправочного коэффициента  $\xi$ , равных: 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,5 и 1,6. По результатам этих расчетов построены для режимов разгона и торможения графики, показанные для указанных значений коэффициента  $\xi$  на рис. 1а, б. Одновременно из ранее приведенных зависимостей (22) и (23) для тахограмм, рассчитанных из формул (24) и (25) при различных значениях коэффициента  $\xi$ , вычислены значения среднеквадратичных отклонений (которые показаны в табл. 2) этих графиков от оптимальной кривых скоростей  $\omega_{p, \text{опт}}$  и  $\omega_{T, \text{опт}}$ , рассчитанных методом Рунге-Кутты для ДУ (1).

Путем варьирования значения поправочного коэффициента  $\xi$  определены также его оптимальные значения  $\xi^*$ , при которых среднеквадратичные отклонения между рассчитанными из (24) и (25) тахограммами и оптимальными кривыми скорости (рассчитанными методом Рунге-Кутты) минимальны. Установлено, что для разных значений времени разгона и торможения минимальные значения среднеквадратичных отклонений составляют: 0,03668 % для  $\xi^* = 1,197$  при  $t_p = 0,5$  с; 0,0967 % для  $\xi^* = 1,28$  при  $t_p = 1$  с; 0,400 % для  $\xi^* = 1,32$  при  $t_p = 2$  с; 0,0858 % для  $\xi^* = 1,51$  при  $t_p = 3$  с. По результатам приведенных расчетов построена на рис.2

графическая зависимость оптимальных значений поправочных коэффициентов  $\xi^*$  (обеспечивающих минимальные отклонения тахограмм из (24) и (25) от оптимальных тахограмм, соответствующих минимальным ОЭПЭ) от значений времен разгона  $t_p$  и торможения  $t_T$  двигателя АДО–2000–6000–12У1.

Анализ данных из табл. 2 и графиков на рис. 1а, б свидетельствует о том, что при оптимальных значениях поправочных коэффициентов  $\xi^*$  достигнуто хорошее совпадение рассчитанных из зависимостей (24) и (25) тахограмм с точным решением ДУ (1) – со среднеквадратичными отклонениями не более 1 %. С учетом этого указанные тахограммы из (24) и (25), рассчитанные при  $\xi = \xi^*$ , будем называть «квазиоптимальными».

**На четвертом этапе** применительно к ЧРАД типа АДО–2000–6000–12У1 осуществим для предложенного и известных из [1–3] видов энергосберегающего управления расчет тахограмм разгона и торможения этого двигателя, которые показаны (на примере графиков для времен разгона и торможения:  $t_p = t_T = 3$ с) на рис. 3. На этом рисунке и далее на рис. 4 и рис. 5 кривые 1 соответствуют квазиоптимальным (рассчитанным из (24) и (25) при  $\xi = \xi^*$ ), а кривые 2, 3 и 4 – известным энергосберегающим тахограммам. Вид соответствующих этим графикам расчетных аналитических зависимостей приведен в табл. 3 (с идентичной нумерацией указанных графиков на рис. 3 – рис. 5 кривыми: 1 – для квазиоптимального управления; 2 – с формой гиперболического синуса; 3 и 4 – для параболического и линейного вида соответственно).

Также на данном этапе применительно к рассматриваемому типу ЧРАД выполнены для квазиоптимальных из (24) и (25) при  $\xi = \xi^*$  и упомянутых известных энергосберегающих тахограмм (при тех же значениях времен разгона и торможения:  $t_p = t_T = 3$ с = 9420.е.) расчеты ОЭПЭ при разгоне  $\Delta W_p$  и торможении  $\Delta W_T$  (результаты показаны в табл. 2), а также электромагнитного момента  $M$  и модуля статорного тока двигателя (графики которых показаны соответственно на рис. 4 и рис. 5). Указанные расчеты проведены с применением следующих аналитических зависимостей [3]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta W_p &= \int_0^{t_p} \Delta P_{\text{ЭМ}} \cdot dt, \quad \Delta W_T = \int_0^{t_T} \Delta P_{\text{ЭМ}} \cdot dt, \\ \Delta P_{\text{ЭМ}} &= a + b(M_c + J\omega')^2 + c\omega^{1,3}, \quad K = 0,65c/bJ^2, \\ a &= (\Psi_r/L_m)^2 \cdot (R_s + 0,005P_H/\eta_H)/(K_r^2\Psi_r^2), \quad c = \Delta P_{\text{ст.н}}, \\ b &= (R_s + K_r^2R_r + 0,005P_H/\eta_H)/(K_r^2\Psi_r^2), \quad M = M_c + J\omega', \\ I_1 &= [(\Psi_r/L_m)^2 + (M_c + J\omega')^2/(K_r\Psi_r)^2]^{0,5} \end{aligned} \right\}, \quad (26)$$

где используются обозначения:  $\Delta P_{ЭМ}$  – основные электромагнитные потери мощности;  $M_c$  и  $\omega' = d\omega/dt$  – соответственно момент сопротивления привода, приведенный к валу двигателя, и первая производная скорости двигателя по времени;  $a, b, c, K$  – постоянные коэффициенты.

### ВЫВОДЫ

1. Выявлено, что лишь при определенных значениях времен разгона и торможения, для которых получена аналитическая зависимость из (11), в качестве оптимальных тахограмм ЧРАД, обеспечивающих минимизацию ОЭПЭ в пускотормозных режимах, являются степенного вида функции (4) и (5). При этом выполненный в об-

щем виде аналитический расчет решения нелинейного ДУ (3) позволяет находить указанное степенного вида частное решение при произвольных значениях параметра  $M$  упомянутого ДУ, что распространяет полученное решение на другие (кроме ЧРАД) электромеханические объекты, описываемые таким же видом нелинейного ДУ.

2. Предложенная гиперболического вида аппроксимация частного решения нелинейного ДУ (1), осуществленная путем введения в аргумент гиперболической функции дополнительно поправочного коэффициента  $\xi$  с варьируемым значением, позволяет повысить при определенном (оптимальном  $\xi^*$ ) значении этого коэффициента точность расчета квазиоптимальной тахограм-

**Таблица 2** – Среднеквадратичные отклонения тахограмм с формой гиперболического синуса от квазиоптимальной тахограммы

Время, $t_p, t_T$ о.е.	Значения среднеквадратичного отклонения, %								Значение $\xi^*$ , о.е.
	при значениях поправочного коэффициента $\xi$							при значении $\xi^*$	
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6		
0,5	0,0835	0,0531	0,0367	0,0579	0,0982	0,1453	0,1965	0,03668	1,197
1	0,416	0,286	0,157	0,102	0,217	0,378	0,552	0,0967	1,28
2	1,636	1,0243	0,858	0,523	0,410	0,650	1,01	0,400	1,38
3	3,09	2,496	1,94	1,436	1,044	0,861	0,962	0,858	1,51

**Таблица 3** – Расчетные зависимости для исследуемых тахограмм и данные расчета ОЭПЭ для этих тахограмм при разгоне и торможении ЧРАД

Вид тахограммы		Режим	Аналитическая зависимость для тахограммы	Вид ОЭПЭ	Значения ОЭПЭ,			
№ п/п	тип				х.х.		н.н.	
					о.е.	кДж	о.е.	кДж
1.	квази-оптимальная	P	$\omega_{уст} \cdot \frac{sh(\xi^* t \sqrt{K})}{sh(\xi^* t_p \sqrt{K})}$	$\Delta W_p$	4,638	39,84	23,09	198,3
		T	$\omega_{уст} \cdot \frac{sh[\xi^* (t_T - t) \sqrt{K}]}{sh(\xi^* t_T \sqrt{K})}$	$\Delta W_T$	4,638	39,84	7,736	66,45
2.	гиперболический синус	P	$\omega_{уст} \cdot \frac{sh(t \sqrt{K})}{sh(t_p \sqrt{K})}$	$\Delta W_p$	5,141	44,16	23,59	202,6
		T	$\omega_{уст} \cdot \frac{sh[(t_T - t) \sqrt{K}]}{sh(t_T \sqrt{K})}$	$\Delta W_T$	5,141	44,16	8,239	70,76
3.	парабола	P	$\omega_{уст} \cdot \left(\frac{t}{t_p}\right)^2$	$\Delta W_p$	4,938	42,41	23,39	200,9
		T	$\omega_{уст} \cdot \left(\frac{t_T - t}{t_T}\right)^2$	$\Delta W_T$	4,938	42,41	8,036	69,02
4.	линейная	P	$\omega_{уст} \cdot \left(\frac{t}{t_p}\right)$	$\Delta W_p$	6,040	51,88	24,49	210,3
		T	$\omega_{уст} \cdot \left(\frac{t_T - t}{t_T}\right)$	$\Delta W_T$	6,040	51,88	9,138	78,49

Примечания: P – разгон; T – торможение; х.х. – холостой ход ( $M_c=0$ ); н.н. – номинальная нагрузка ( $M_c=M_n$ ).

мы ЧРАД в пускотормозных режимах для произвольных времен разгона и торможения. Установлено, что за счет этого согласно данным из табл. 2 может быть уменьшена погрешность определения оптимальной тахограммы (по сравнению с ее точным вычислением методом Рунге-

Кутта) до (0,037 – 0,858) %, что является достаточным для инженерной практики.

3. Использование предложенных в статье методов расчета позволяет определить оптимальные и квазиоптимальные тахограммы ЧРАД в пускотормозных режи-

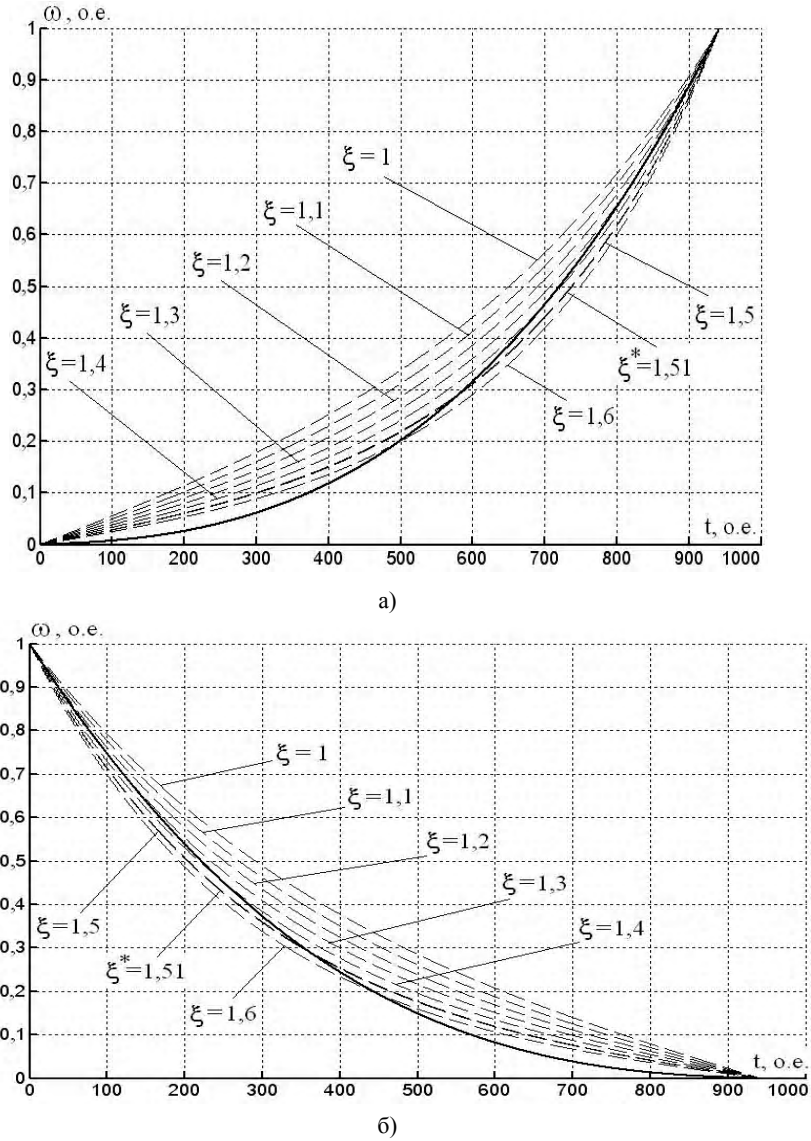


Рисунок 1 – Оптимальная тахограмма и тахограммы с формой гиперболического синуса (при варьировании значения поправочного коэффициента  $\xi$ ) для разгона (а) и торможения (б)

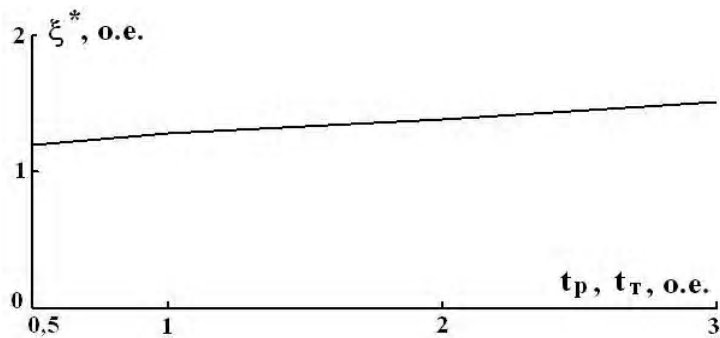


Рисунок 2 – Зависимость оптимального поправочного коэффициента  $\xi^*$  от значения времен разгона  $t_p$  и торможения  $t_T$  двигателя

мах без применения дорогостоящих пакетов вычислительных программ в сравнении с упомянутыми пакетами вычислительных программ. Другими важными достоинствами предложенных методов нахождения оптимальных тахограмм являются: во-первых, исходное задание желаемых начальных и конечных значений для рассматриваемых тахограмм (что очень удобно на практике, но не реализуется всеми известными вычислительными программами, в которых вместо конечных условий задается значение производной скорости в начальный момент времени, которое обычно на практике является неизвестным); во-вторых, заметная относительная простота аналитических расчетных зависимостей (4), (5) и (24), (25), используемых в предложенных методах (например, по сравнению с широко используемым методом Рунге-Кутты).

4. Согласно результатам расчета, показанных на рис. 1 и в табл. 2, использование оптимальных и квазиоптимальных тахограмм разгона и торможения ЧРАД позволяет уменьшить потери электроэнергии в пускотормозных режимах (например, на холостом ходу – на (6–23) % по сравнению с известными тахограммами в виде гиперболического синуса, параболической или линейной зависимости).

5. Предпочтительной областью применения оптимальных тахограмм являются частотно-регулируемые электроприводы, работающие в интенсивных пускотормозных режимах (например, главные приводы прокатных станов металлургического производства).

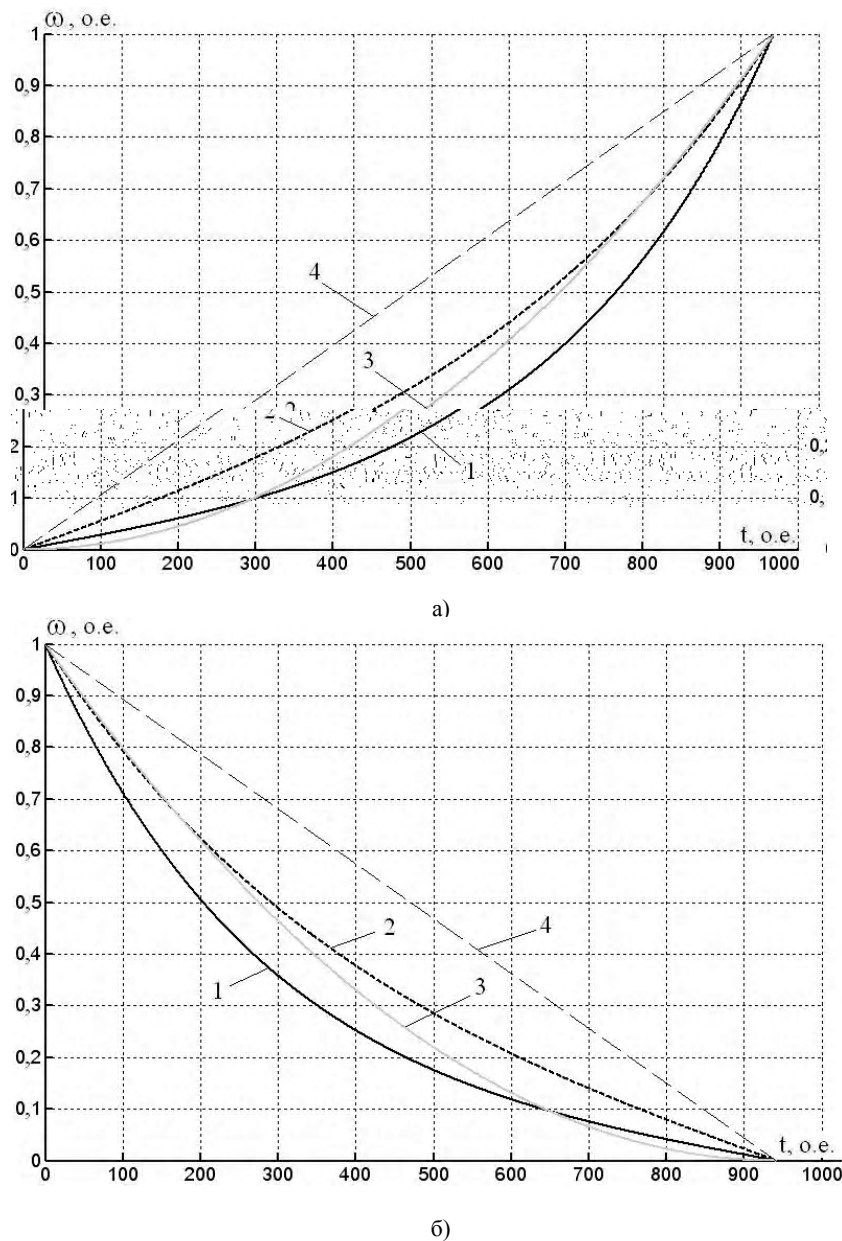
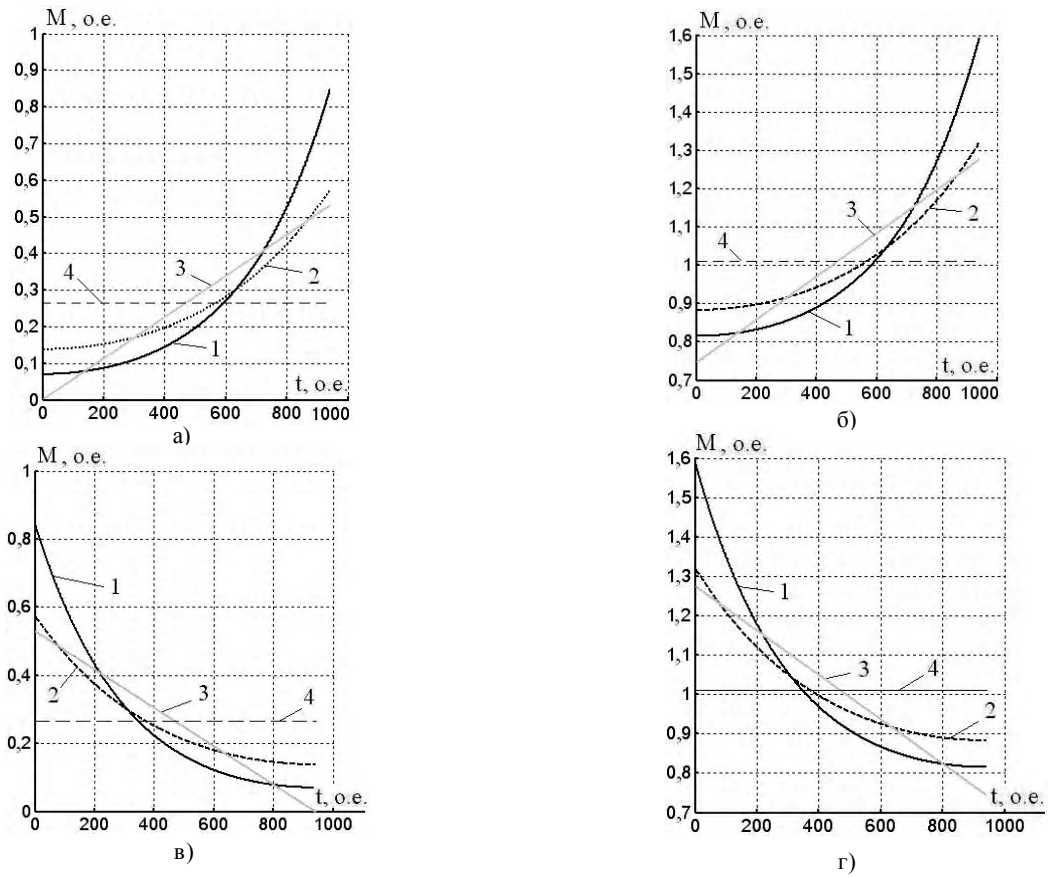
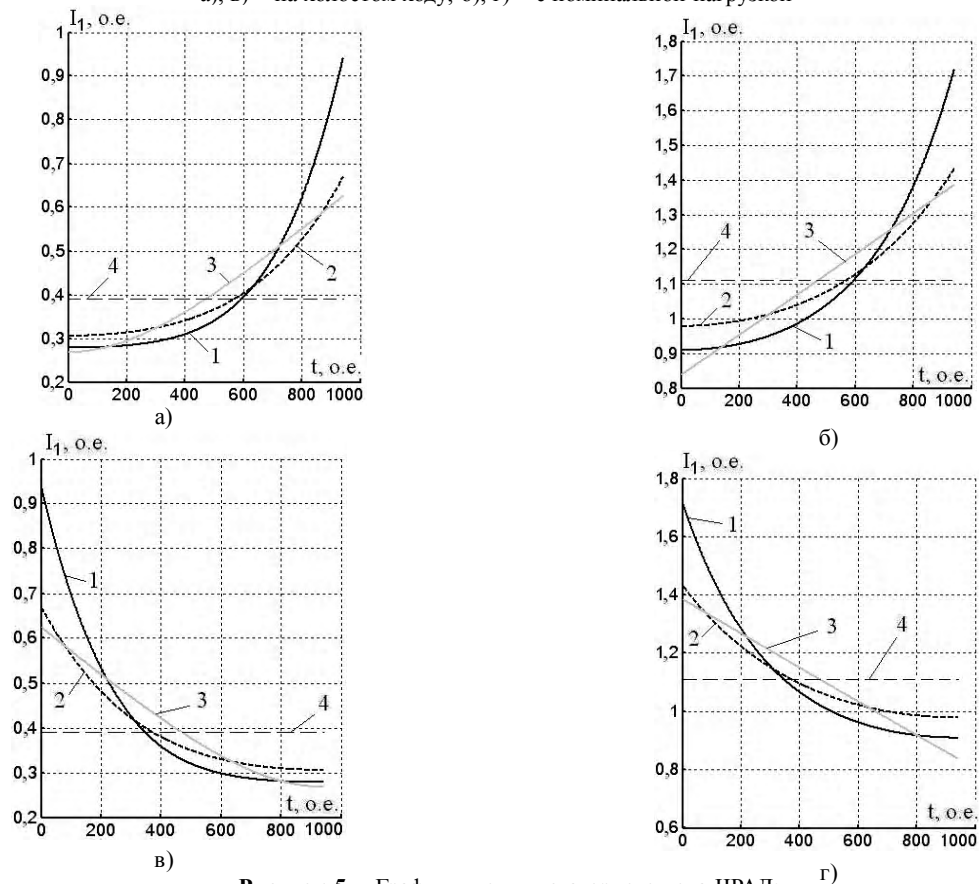


Рисунок 3 – Квазиоптимальная и энергосберегающие тахограммы ЧРАД для разгона (а) и торможения (б)





**Рисунок 4** – Графики электромагнитного момента ЧРАД:  
 а), б) – при разгоне; в), г) – при торможении;  
 а), в) – на холостом ходу; б), г) – с номинальной нагрузкой



**Рисунок 5** – Графики модуля статорного тока ЧРАД:  
 а), б) – при разгоне; в), г) – при торможении;  
 а), в) – на холостом ходу; б), г) – с номинальной нагрузкой

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Петров Ю. П. Оптимальное управление электроприводом. М–Л. : Госэнергоиздат, 1961. – 187с.
2. Петров Ю. П. Оптимальное управление электрическим приводом с учетом ограничений по нагреву. Л. : Энергия, 1971. – 144с.
3. Волков А. В., Колесников А.А. Энергосберегающее управление скоростью частотно-регулируемого асинхронного двигателя в пускотормозных режимах / Электротехника. – 2013. – № 5. – С. 2–9.
4. Шрейнер Р. Т., Дмитренко Ю.А. Оптимальное частотное управление асинхронными электроприводами. – Кишинев: Штиинца, 1982. – 224с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1984. – 832 с.

Статья поступила в редакцию 20.10.2015

Волков В. О.

Канд. техн. наук, Запорізька державна інженерна академія, Україна

**РОЗРАХУНОК ОПТИМАЛЬНИХ ТАХОГРАМ РОЗГОНУ Й ГАЛЬМУВАННЯ ЧАСТОТНОРЕГУЛЬОВАНОГО АСИНХРОНОГО ДВИГУНА**

*Запропоновано аналітичні розрахунки приватних рішень лінійного диференціального рівняння другого порядку, що описує оптимальні траєкторії зміни швидкості (тахограми) частотно-регульованого асинхронного двигуна (ЧРАД). При зазначених тахограмм забезпечується мінімізація основних електромагнітних втрат електроенергії цього двигуна в пускогальмівних режимах. Дана мінімізація здійснюється для заданих початкових і кінцевих значень швидкості і різних часів розгону і гальмування. Виконано розрахунки та порівняння між собою оптимальних, квазіоптимальних і відомих (знайшли в даний час застосування на практиці) енергозберігаючих тахограм (лінійного і параболічного вигляду, з формою гіперболічного синуса), а також відповідних їм основних електромагнітних втрат електроенергії, електромагнітного моменту і модуля статорної струму ЧРАД. Обчислені оптимальні і квазіоптимальні тахограми призначені для використання в електроприводах змінного струму прокатних станів з ЧРАД, що працюють в інтенсивних пускогальмівних режимах.*

**Ключові слова:** асинхронний двигун, частотне керування, оптимальні діаграми.

Volkov V. A.

Ph.D., Zaporozhye State Engineering Academy, Ukraine

**CALCULATION OF THE OPTIMUM TACHOGRAM ACCELERATION AND DECELERATION OF FREQUENCY CONTROLLED ASYNCHRONOUS MOTORS**

*Analytical calculations of private solutions of a linear second-order differential equation that describes the optimal trajectory of the change (tachograms) rate of variable-frequency induction motor (VFIM) are proposed. Under these tachograms the electromagnetic core loss minimization of engine power to start and stop the mode is ensured. This minimization is carried out for the specified start and end values of speed and different acceleration and deceleration times. Calculations and comparison between optimal, suboptimal and famous (that are found in the current application in practice) energy saving tachograms sheets (linear and parabolic type, with the shape of a hyperbolic sine) are performed, as well as their respective basic electromagnetic losses of electricity, electromagnetic torque and modulus of the stator current VFIM. The calculated optimal and quasi optimal tachograms are designed for use in AC drives of rolling mills with VFIM working in the intensive start and stop mode.*

**Keywords:** asynchronous motor, frequency regulation, optimal tachograms.

## REFERENCES

1. Petrov U. P. Optimalnoe upravlenie electroprivodom. M–L, Gosenergoizdat, 1961, 187 S.
2. Petrov U. P. Optimalne upravlenie elektricheskim privodom s uchetom ogranicheniy po nagrevu, L, Energiya, 1971, 144 s.
3. Volkov A. V., Kolesnikov A. A. Energoberegauchee upravlenie skorostu chastotno-reguliruemogo asinhronnogo dvigatelya v puskotoroznih regimah / Elektrotehnika, 2013, No 5, S. 2, 9.
4. Shreyner R. T., Dmitrenko U. A. Optimalne chastotne upravlenie asinhronnimi electroprivodami, Kishinev: Shtiinca, 1982, 224 s.
5. Korn G., Korn T., Spravochnik po matematike dlya nauchnih rabotnikov i ingenerov, M, Nauka, 1984, 832 s.