УДК [621.3.011+621.3.013]::519.6

Тиховод С. М.

Д-р техн. наук, Запорожский национальный технический університет, Україна

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ

Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитные процессы, сводятся к решению системы нелинейных уравнений итерационным методом. Условия сходимости метода простых итераций в классической постановке обычно не выполняется при решении практических задач. Предложена модернизация метода простых итераций с одним весом и двумя весами. Подбор весовых коэффициентов позволяет значительно расширить область сходимости метода простых итераций. Показано, что использование метода простых итераций с двумя весами позволяет более существенно расширить область сходимости метода.

Ключевые слова: *итерационный процесс, метод простых итераций, нелинейные уравнения.*

При моделировании электромагнитных процессов с помощью нелинейных магнитоэлектрических схем замещения в программном комплексе Colo [1] на каждом шаге интегрирования в подпрограмме Newton вычисляются нелинейные магнитные сопротивления. Вычисления производятся с помощью метода простой итерации. При использовании магнитоэлектрической цепи каждое нелинейное сопротивление на каждом шаге интегрирования заменяется либо парой элементов R_n и E_n, дифференциальным сопротивлением R_d, либо дифференциальной емкостью C_m [2]. Для их вычисления на каждом шаге итерации используется характеристика намагничивания магнитопровода. При этом сходимость итерационного процесса в значительной степени зависит от того, как близко находится начальное приближение к истинному решению. В ряде случаев сходимость итерационного процесса вообще отсутствует, особенно при использовании стали с крутоизменяемой характеристикой намагничивания.

Целью данного исследования является модернизация метода простых итераций для улучшения сходимости итерационных процессов при решении системы нелинейных уравнений, описывающей электромагнитные процессы на произвольном шаге интегрирования.

Рассмотрим вначале одно нелинейное уравнение, приведенное к виду:

$$x = \varphi(x), \tag{1}$$

где x – некоторая переменная (ток, магнитный поток); φ – некоторая нелинейная функция.

Для решения этого уравнения методом простых итераций задают начальное приближение x_0 и вычисляют дальнейшие приближения по формулам [3]:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \text{ , } k=0,\ 1,\ 2 \tag{2}$$

Если

$$|\varphi'(x)| > 1 \tag{3}$$

в некоторой окрестности истинного решения $\bar{x}$, то итерации могут не сходиться к истинному решению [3]. При моделировании переходных процессов в сложных нелинейных магнитоэлектрических цепях условие (3) как правило, выполняется и итерационный процесс расходится.

Уточненный метод простых итераций с одним весом.

Предложен модифицированный алгоритм метода простых итераций, который имеет вид:

$$x_{k+1} = (1-W)\varphi(x_k) + Wx_k\,, \tag{4}$$

где W – некоторый весовой коэффициент.

Исследуем область сходимости модифицированного метода простых итераций в зависимости от значений W и производной $j'(x)$. Введем коэффициент конвергенции:

$$C = \frac{x_{k+1} - \bar{x}}{x_k - \bar{x}}\,, \tag{5}$$

где $\bar{x}$ - истинное решение.

Чтобы итерационный процесс сходился необходимо, чтобы коэффициент конвергенции по абсолютной величине был меньше единицы: $|C| < 1$, что означает, что отклонение $k+1$ приближения от истинного решения $\bar{x}$ меньше, чем отклонение k–го приближения.

Запишем отклонение $k+1$ приближения:

$$x_{k+1} - \bar{x} = (1-W)[\varphi(x_k) - \varphi(\bar{x})] + Wx_k - W\bar{x}\,. \tag{6}$$

Согласно теореме о среднем

$$[\varphi(x_k) - \varphi(\bar{x})] = (x_k - \bar{x})\varphi'(\xi)\,, \tag{7}$$

где ξ – точка между x_k и $\bar{x}$.

Если x_k и $\bar{x}$ находятся близко, то $\varphi'(x)$ изменяется незначительно на интервале $[x_k, \bar{x}]$ и можно принять $\varphi'(x) = d$.

С учетом выражений (6) и (7) коэффициент конвергенции принимает вид:

$$C = (1-W)d + W\,, \tag{8}$$

а условие сходимости принимает вид:

$$|(1-W)d + W| < 1\,. \tag{9}$$

Условие (9) можно разбить на два условия:

$$0 < (1-W)d + W < 1\,; \tag{10'}$$

$$0 < -(1-W)d - W < 1\,. \tag{10''}$$

Условие (10') рассмотрим при различных значениях d.

При $d < 1$ условие (10') приводит к следующему виду:

$$\frac{-d}{1-d} < W < 1\,. \tag{11}$$

При $d > 1$ условие (10') приводит к виду:

$$1 < W < \frac{-d}{1-d}\,. \tag{12}$$

Условие (10'') преобразуем к виду:

$$-(1+d) < W(1-d) < -d$$

и рассмотрим при различных знаках d.

При $d < 1$ условие (10'') приводит к следующему виду:

$$\frac{-(1+d)}{1-d} < W < \frac{-d}{1-d}\,. \tag{13}$$

При $d > 1$ условие (10'') приводит к другому виду:

$$\frac{-d}{1-d} < W < \frac{-(1+d)}{1-d}\,. \tag{14}$$

Определим область сходимости:

$$\frac{1+d}{d-1} < W < 1 \text{ при } d<1; \tag{15}$$

$$1 < W < \frac{1+d}{d-1} \text{ при } d>1. \tag{16}$$

Если в условии (8) положить $C = 0$, то получим оптимальное значение веса, соответствующее наискорейшей сходимости:

$$W_{opt} = \frac{d}{d-1}\,. \tag{17}$$

Однако применение условия (17) требует вычисления нового значения производной на каждом шаге итерации, что приводит к тому, что такой модифицированный метод простых итераций становится модификацией метода Ньютона.

Условия сходимости (15, 16) можно преобразовать, чтобы получить область изменений d при заданном значении W:

$$1 < d < \frac{1+W}{W-1} \text{ при } W>1; \tag{18}$$

$$\frac{1+W}{W-1} < d < 1 \text{ при } W<1. \tag{19}$$

Условия (18, 19) позволяют расширить область сходимости метода простых итераций. Однако работа со сложными магнитоэлектрическими цепями приводит к большим системам нелинейных уравнений. При одном и том же весовом коэффициенте условие сходимости должно выполняться одновременно для всех уравнений, поэтому данный метод имеет ограниченное применение.

Уточненный метод простых итераций с двумя весами.

Чтобы расширить диапазон сходимости итерационного процесса, предложена еще одна модификация метода простых итераций:

$$x_{k+1} = (1-W)\varphi(x_k) + W_1 x_k + W_2 x_{k-1}, \tag{20}$$

где $W=W_1+W_2$; W_1, W_2 – весовые коэффициенты.

Значения весовых коэффициентов определяют область сходимости итерационного процесса.

Запишем отклонение k+1 приближения от истинного решения:

$$x_{k+1} - \bar{x} = (1-W)\left[\varphi(x_k) - \varphi(\bar{x})\right] - W\bar{x} + \\ + W_1 x_k + W_2 x_{k-1} \tag{21}$$

Применив теореме о среднем, из выражения (21) получим:

$$x_{k+1} - \bar{x} = (1-W)\left[(x_k - \bar{x})\varphi'(\xi)\right] - W\bar{x} + W_1 x_k + W_2 x_{k-1}$$

и при фиксированном значении $\varphi'(x) = d$ коэффициент конвергенции на k+1 шаге итерации примет вид:

$$C_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} = (1-W)d + W_1 + \frac{W_2}{C_k}\,. \tag{22}$$

Условие сходимости запишем как:

$$\left|(1-W)d + W_1 + \frac{W_2}{C_k}\right| < 1 \tag{23}$$

Условие (23) можно разбить на два условия:

$$0 < (1-W)d + W_1 + \frac{W_2}{C_k} < 1\,; \tag{24'}$$

$$0 < -(1-W)d - W_1 - \frac{W_2}{C_k} < 1\,. \tag{24''}$$

Условие (24') приводит к двум неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} &-(1-W)d < W_1 + \frac{W_2}{C_k} \\ &W_1 + \frac{W_2}{C_k} < 1-(1-W)d \end{aligned}\right\}. \tag{25}$$

Рассмотрим (25) при различных знаках W. При $W < 1$ условие (25) приводит к следующему неравенству:

$$-\frac{W_1 + \frac{W_2}{C_k}}{1-W} < d < -\frac{W_1 + \frac{W_2}{C_k} - 1}{1-W}\,. \tag{26}$$

При $W > 1$ условие (25) приводит к следующему неравенству:

$$-\frac{W_1 + \frac{W_2}{C_k} - 1}{1-W} < d < -\frac{W_1 + \frac{W_2}{C_k}}{1-W}\,. \tag{27}$$

Условие (24'') приводит к двум неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} &(1-W)d < -W_1 - \frac{W_2}{C_k} \\ &-W_1 - \frac{W_2}{C_k} - 1 < (1-W)d \end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

При $W < 1$

$$\frac{-W_1 - \dfrac{W_2}{C_k} - 1}{1 - W} < d < -\frac{W_1 + \dfrac{W_2}{C_k}}{1 - W}; \qquad (29)$$

при $W > 1$

$$\frac{-W_1 - \dfrac{W_2}{C_k}}{1 - W} < d < -\frac{W_1 + \dfrac{W_2}{C_k} + 1}{1 - W}. \qquad (30)$$

Если считать, что на шаге k сходимости не было $C_k = 0$, то для шага $k+1$ условия сходимости имеют вид:

$$-\frac{W+1}{1-W} < d < 1 \text{ при } W<1;$$

$$1 < d < -\frac{W+1}{1-W} \text{ при } W>1. \qquad (31)$$

Рассмотрим пример. Положим:

$$\varphi(I) = E + d \cdot I. \qquad (32)$$

Решение уравнения (32) методом простых итераций возможно только при $|d| < 1$.

Использование модифицированного метода простых итераций с одним весом позволяет решать уравнение (32) и при $|d| > 1$.

Пусть $d = 10$. Тогда согласно (16) сходимость должна выполняться при выборе веса в диапазоне $1 < W < 11/9 = 1{,}222$. Положим $W = 1{,}12$, то есть в диапазоне сходимости. На рис. 1 представлен график изменения значений I_k от номера k итераций. Из рис. 1 видно, что итерационный процесс сходится, хотя весьма медленно. Если задать оптимальное значение веса согласно (17) $W = 10/9$, то итерационный процесс сходится в течение двух циклов итераций, что показано на рис. 2.

Рассмотрим использование модифицированного метода простых итераций с двумя весами.

Пусть в уравнении (32) $d = 15$. Положим $W_1 = 1{,}3$; $W_2 = -0{,}2$. Тогда согласно (30) сходимость выполняется, если $1 < d < 21$, то есть при $d = 15$ сходимость выполняется, что видно из рис. 3.

Если задать $d = 22$, то сходимости не будет, что показывает график рис. 4.

ВЫВОДЫ

Выбор весовых коэффициентов согласно (19, 30) позволяет существенно расширить область сходимости метода простых итераций. Это позволяет существенно выполнять численное интегрирование больших нелинейных систем уравнений состояния магнитоэлектрических схем замещения, в процессе которого на каждом шаге интегрирования итерационно вычисляются значения нелинейных магнитных сопротивлений.

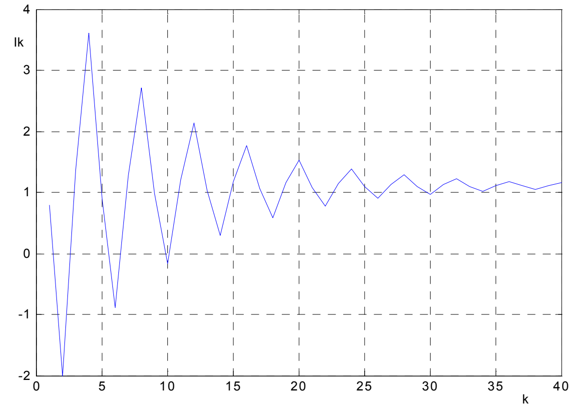

Рисунок 1 – График изменения вычисленных значений I_k от номера k итераций. Медленная сходимость итерационного процесса

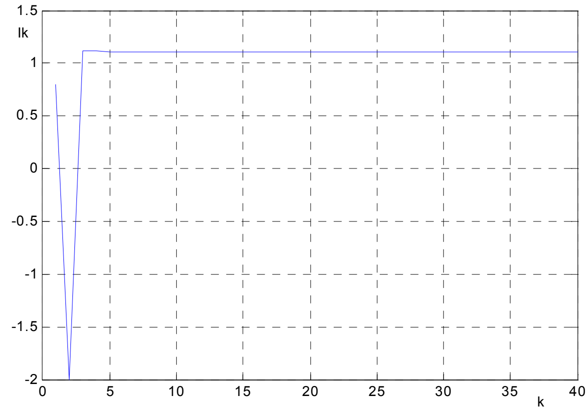

Рисунок 2 – График изменения вычисленных значений I_k от номера k итераций. Быстрая сходимость итерационного процесса при оптимальном весе

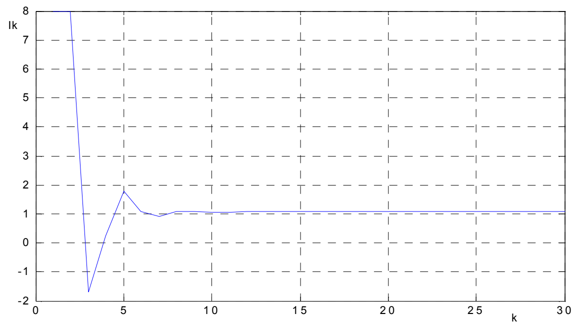

Рисунок 3 – График изменения вычисленных значений I_k от номера k итераций

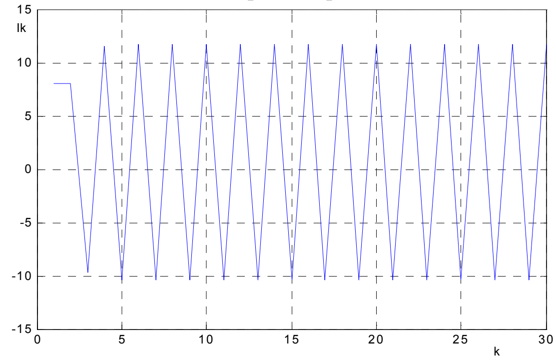

Рисунок 4 – График изменения вычисленных значений I_k от номера k итераций. Расходимость итерационного процесса

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тиховод С. М. Модификация магнитоэлектрических схем замещения электромагнитных устройств для анализа переходных процессов / С. М. Тиховод // Електротехніка та електроенергетика . – 2015. – №2 . – С. 59–68.
2. Тиховод С. М. Модификация магнитоэлектрических схем замещения электромагнитных устройств для анализа переходных процессов / С. М. Тиховод // Электричество . – 2014. – №2 . – С. 53–60.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978.– 512с.

Статья поступила в редакцию 30.06.2015
После доработки 8.09.2015

Тиховод С. М.
Д-р техн. наук, Запорожский национальный технический университет, Украина

УДОСКОНАЛЕННЯ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ СТАНУ МАГНІТОЕЛЕКТРИЧНИХ ЗАСТУПНИХ СХЕМ.

Числові методи інтегрування диференціальних рівнянь, що описують електромагнітні процеси, зводяться до розв'язання системи нелінійних рівнянь ітераційним методом. Умови збіжності методу простих ітерацій в класичній постановці зазвичай не виконується при вирішенні практичних завдань. Запропонована модернізація методу простих ітерацій з одною вагою і двома вагами. Підбір вагових коефіцієнтів дозволяє значно розширити область збіжності методу простих ітерацій. Показано, що використання методу простих ітерацій з двома вагами дозволяє істотно розширити область збіжності методу.

Ключові слова: *ітераційний процес, метод простих ітерацій, нелінійні рівняння.*

Tykhovod S. M.
Doctor of science, Zaporozhye national technical university, Ukraine

IMPROVEMENT OF ITERATIVE METHODS OF THE NONLINEAR SYSTEMS SOLUTION OF STATE EQUATIONS OF MAGNETOELECTRIC EQUIVALENT SCHEMES

The numeral methods of integration of differential equations describing electromagnetic processes are reduced to solution of the system of nonlinear equations by an iterative method. The method of simple iterations for the classic presentation, i.e., k=0, 1, 2… is converged if , that usually is not executed at the solution of practical tasks. In capacity of convergence parameter of iterative process the factor of convergence C as ratio of deviation of approached solution from the true solution, obtained on the current step of iteration, to the corresponding deviation, got on the previous step of iteration, is put into operation. For convergence of iterative process it is necessary, that absolute value of convergence factor would be less than unit. It is offered modernization of simple iterations method with one and two weights for convergence at the condition. The selection of weight coefficients allows considerably extending an area of simple iterations method. It is shown that the use of offered method with two weights is more effective than one.

Keywords: *iterative process, method of simple iterations, nonlinear equations.*

REFERENCES

1. Tihovod S. M. Modifikatsiya magnitoelektricheskih shem zamescheniya elektromagnitnyih ustroystv dlya analiza perehodnyih protsessov. *ElektrotehnIka ta elektroenergetika,* 2015, No 2. S. 59–68.
2. Tihovod S. M. Modifikatsiya magnitoelektricheskih shem zamescheniya elektromagnitnyih ustroystv dlya analiza perehodnyih protsessov. *Elektrichestvo,* 2014, No 2, S. 53–60.
3. Kalitkin N. N. Chislennyie metodyi. Moscow, Nauka, 1978, 512 s.