

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРАНСФОРМАТОРАХ НА ОСНОВЕ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ

*Разработана и реализована в программном комплексе Solo математическая модель автоматизированного формирования и численного расчета дифференциально-алгебраической системы уравнений, описывающих переходные процессы в электромагнитных устройствах со сложной нагрузкой на основе нелинейных магнитоэлектрических схем замещения произвольной сложности. В моделях магнитопроводов предложено использовать магнитные конденсаторы с дифференциальной емкостью.*

**Ключевые слова:** магнитоэлектрическая схема замещения, граф цепи, магнитные токи, магнитные конденсаторы.

Переходные электромагнитные процессы в электротехнических системах, приводящие к броскам тока при коммутациях, представляют значительную опасность для силовых трансформаторов, а также влияют на надежность релейной защиты, поэтому исследование этих процессов актуально. В последнее время возрастает научный интерес к компьютерным расчетам переходных электромагнитных процессов в многообразных составных частях электротехнических систем, содержащих силовые трансформаторы, реакторы и другие устройства. Применение современного компьютерного исследования электромагнитных процессов позволяет существенно сократить финансовые затраты и время на дорогостоящее физическое моделирование и решать те задачи, которые, ввиду сложности оборудования, недоступны при аналитическом исследовании. При этом появляется возможность исследования электромагнитных процессов в отдельных элементах магнитных и электрических частей объектов электротехнической системы с учетом их реальных конструктивных особенностей и взаимодействия объектов в этой системе.

Расчет динамических электромагнитных полей в трансформаторах, включенных в сложные электрические системы, пока не представляется возможным. Поэтому задачу моделирования переходных электромагнитных полей, взаимодействующих со сложной электрической системой, часто сводят к задаче моделирования электромагнитных процессов в электрических и магнитных цепях, которые взаимодействуют между собой. Моделирование электрических и магнитных цепей с сосредоточенными параметрами требует существенно меньших ресурсов компьютера, чем моделирование полей. Объединенная магнитная и электрическая цепи составляют так называемую магнитоэлектрическую схему замещения (МЭСЗ), которая моделируется как единая цепь.

Сегодня «де факто» в расчетах электромагнитных процессов в электрических цепях лидерами являются программы ЕМТР/АТР, разработанные Г. Доммелем [1].

В работах [2–3] рассмотрено моделирование электромагнитных процессов в трансформаторах на основе МЭСЗ. Для каждого случая формировалась МЭСЗ, для которой «вручную» составлялась система уравнений состояния и соответствующая компьютерная программа. Для трехфазного трансформатора система уравнений состояния содержит до 45 уравнений, что представляет трудность использования такого подхода. Поэтому для моделирования электромагнитных процессов в трансформаторах и реакторах на основе МЭСЗ стали использовать существующие программные пакеты моделирования электрических и электронных цепей. Наиболее известными из них является NAF [4], Spice-подобные системы [5], Simulink [6]. Математические модели, положенные в основу этих программных комплексов, не в полной мере отвечают современным требованиям моделирования на основе МЭСЗ. В одних пакетах отсутствует универсальность моделирования переходных процессов в электромагнитных устройствах со сложной нагрузкой на основе нелинейных МЭСЗ. В других пакетах существует лимит индуктивных и емкостных элементов. Наличие нескольких управляемых источников, взаимовлияющих друг на друга, что характерно для МЭСЗ, приводит к появлению так называемых «алгебраических петель», существенно снижающих сходимость вычислительного процесса или вообще прерывающих вычислительный процесс.

Усложнение конструкций трансформаторов, реакторов и электрических схем, в которые они включаются, большая детализация конструктивных особенностей в моделях данных изделий, учет нелинейности и возросшие требования к точности расчетов привели к появлению научной проблемы моделирования переходных электромагнитных процессов в электромагнитных устройствах со сложной нелинейной нагрузкой.

Цель работы. На основе нелинейных магнитоэлектрических схем замещения создание новой высокоэффективной (по сложности цепи, устойчивости решения, точ-

ности и скорости расчета) математической модели, являющейся базой для разработки новых специализированных программных комплексов компьютерного моделирования.

Эти комплексы должны обеспечивать моделирование магнитоэлектрических цепей, содержащих более 300 элементов (некоторые инженеры желают удвоения этого числа), иметь повышенную скорость расчетов по сравнению с существующими программными комплексами и давать устойчивое решение с меньшей погрешностью.

Математическая модель должна быть такой, чтобы в результате расчета могли быть получены зависимости от времени токов (магнитных потоков) и напряжений всех элементов цепи произвольной конфигурации.

Большинство универсальных программ моделирования электромагнитных процессов в цепях основаны на методе узловых потенциалов, методе контурных токов либо на методе переменных состояния с использованием уравнений, основанных на законах Кирхгофа [7–8]. Метод узловых потенциалов предполагает составление системы уравнений, число которых равно числу узлов, но система узловых уравнений должна быть дополнена уравнениями вычисления токов и магнитных потоков, которые управляют управляемыми источниками ЭДС. В результате система уравнений имеет такой же порядок, как и система уравнений, составленных по законам Кирхгофа. Таким образом, методы узловых потенциалов не имеет существенных преимуществ перед методом, основанным на законах Кирхгофа для расчетов процессов в МЭСЗ. Учитывая это, принято решение в основу разрабатываемой математической модели, которая предназначена для реализации в виде программного комплекса Solo, положить метод переменных состояния с применением уравнений токов и напряжений Кирхгофа, полученных топологическими методами. При этом достигается единообразие для автоматизированного составления уравнений состояния магнитоэлектрических схем замещения. Также достигается удобство применения управляемых источников напряжения и тока, которые широко используются в магнитоэлектрических схемах замещения при описании взаимодействия электрических токов и магнитных потоков.

Для ввода исходной информации предусмотрена процедура, которая начинается с составления и вычерчивания магнитоэлектрической схемы замещения электромагнитного устройства, а также с нумерации ветвей и проставление стрелок положительного направления токов (магнитных потоков). Далее выполняется нумерация узлов аналогично нумерации ветвей. Каждая ветвь состоит из одного элемента. Исключение составляют независимые и управляемые источники ЭДС, включенные последовательно. Такие источники воспринимаются как одна ветвь. Аналогично, как одна ветвь, могут восприниматься независимые и управляемые источники тока, включенные параллельно.

Входные данные задаются в отдельном файле. Массив, в который заносится топология цепи и основные

параметры элементов, именуется Param. Этот массив формируется по следующим правилам:

– каждая ветвь описывается отдельной строкой массива Param. Количество строк массива равно количеству ветвей  $b$  схемы.

– каждая строка содержит шесть числовых параметров: номер ветви на схеме, номер узла начала данной ветви, номер узла окончания данной ветви, тип ветви, значение параметра ветви, начальное значение (для переменной состояния). В математической модели, положенной в основу программы Solo, предусмотрены следующие возможные типы ветвей, имеющие свое обозначение:  $R, L, C$  – ветви с резистивным, индуктивным или емкостным элементом;  $E, J$  – независимый или управляемый источник ЭДС или источник тока;  $Cm$  – магнитный конденсатор, для особой «дифференциальной» магнитной ветви;  $RT$  – ветвь с линейным резистивным элементом, изменяющим свое сопротивление скачком в заданный момент времени (используется для моделирования коротких замыканий или обрывов ветвей).

Независимые и управляемые источники ЭДС и тока описываются отдельными массивами.

Для упрощения предварительного рассуждения предположим, что исследуемая цепь линейна, а в качестве пассивных элементов рассмотрим только элементы типа  $L, R$  и  $C$ . В дальнейшем это ограничение будет снято. Согласно методу переменных состояния все переменные цепи могут быть однозначно выражены через переменные состояния: токи индуктивных элементов и напряжения емкостных элементов. Чтобы уравнения состояния, составленные по законам Кирхгофа, были дифференциальными уравнениями первого порядка необходимо, чтобы каждое главное сечение содержало одно ребро дерева цепи с конденсатором, а каждый главный контур – одну хорду с индуктивным элементом.

Для автоматического составления независимой системы уравнений по законам Кирхгофа предварительно составляется граф  $G$  цепи как совокупность всех узлов цепи, ее ветвей и порядка соединения ветвей [7]. Для графа  $G$  составляется остов графа, который представляет собой дерево, содержащее все узлы цепи и не содержащее ни одного замкнутого контура [8]. Дерево цепи необходимо для выявления главных контуров цепи.

При выборе нормального (правильного) дерева целесообразно [7–8], чтобы в него были включены все источники напряжения, минимальное количество индуктивных и большинство емкостных элементов. Это значит, что элементы нормального дерева цепи должны использовать следующий приоритет типа ветвей:  $E, C, R, L$ . Все источники тока и большинство индуктивных элементов должны войти в кодереву [7–8]. Кодерево графа  $G$  является подграфом графа  $G$ , содержащим вершины и только те ребра, которые не попали в дерево – хорды (связи). Элементы связей цепи должны использовать следующий приоритет элементов:  $J, L, R, C$ . В соответствии с выбранным приоритетом переставляются строки мас-

сива  $\text{Prig}$  по приоритету  $E, C, R, L, J$ . В результате получаем массив  $\text{Prig}$ . В массиве  $\text{Prig}$  все ветви цепи получают новую нумерацию по выбранному приоритету. После этого составляется матрица инцидентий  $\mathbf{A}$  (по приоритету). По методике, изложенной в работе [8], из матрицы инцидентий  $\mathbf{A}$  строится ступенчатая матрица  $\mathbf{A}_{\text{ech}}$ . Исходя из ступенчатой матрицы, производится организация массивов, содержащих строки исходных данных элементов, попавших в дерево и связи. В массиве связей строки исходных данных следуют по приоритету  $J, L, R, C$ . После организации этих массивов, составляется ряд векторов, содержащих параметры элементов определенного типа. Векторы  $\mathbf{R}_t, \mathbf{C}_t$  содержат значения сопротивлений и емкостей резистивных и емкостных элементов, попавших в дерево, а  $\mathbf{R}_l, \mathbf{L}_l$  – попавших в связи. В дальнейшем элементы, попавшие в дерево, будем обозначать индексом « $t$ », а элементы, попавшие в связи – индексом « $l$ ». Составляются подматрицы инцидентий дерева и связей  $\mathbf{A}_t, \mathbf{A}_l$  и вычисляется матрица сечений  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D}_l = \mathbf{A}_t \setminus \mathbf{A}_l; \mathbf{D} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{D}_l], \quad (1)$$

где символ « $\setminus$ » означает обращение к стандартной подпрограмме решения системы линейных уравнений, записанной в матричной форме;  $\mathbf{A}_l = \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{D}_l$ ;  $\mathbf{1}$  – единичная матрица.

Вычисляем матрицу контуров:

$$\mathbf{B} = [-\mathbf{D}_l^T \quad \mathbf{1}]. \quad (2)$$

Уравнения, составленные по закону токов Кирхгофа, в матричной форме:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{i}$  – вектор мгновенных значений токов всех ветвей цепи:

$$\mathbf{i} = [\mathbf{i}_{Et}, \mathbf{i}_{Ct}, \mathbf{i}_{Rt}, \mathbf{i}_{Lt}, \mathbf{i}_{Jl}, \mathbf{i}_{Ll}, \mathbf{i}_{Rl}, \mathbf{i}_{Cl}]^T, \quad (4)$$

$\mathbf{i}_{Et}$  – вектор токов ветвей дерева, содержащих источники ЭДС (независимые и управляемые);  $\mathbf{i}_{Ct}, \mathbf{i}_{Rt}, \mathbf{i}_{Lt}$  – векторы токов ветвей дерева, содержащих емкостные, резистивные или индуктивные элементы;  $\mathbf{i}_{Jl}$  – вектор токов связей, содержащих идеальные источники тока (независимые и управляемые);  $\mathbf{i}_{Ll}, \mathbf{i}_{Rl}, \mathbf{i}_{Cl}$  – вектор токов связей, содержащих индуктивные, резистивные или емкостные элементы.

Уравнения, составленные по закону напряжений Кирхгофа, в матричном виде представляются в виде:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор напряжений всех ветвей цепи. Вектор значений напряжений состоит из подвекторов, аналогично (4):

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_{Et}, \mathbf{u}_{Ct}, \mathbf{u}_{Rt}, \mathbf{u}_{Lt}, \mathbf{u}_{Jl}, \mathbf{u}_{Ll}, \mathbf{u}_{Rl}, \mathbf{u}_{Cl}]^T. \quad (6)$$

Записываются уравнения, связывающие токи и напряжения на резистивных, индуктивных и емкостных элементах дерева и на элементах связей (кодерева):

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R}_t \cdot \mathbf{i}_{Rt} - \mathbf{u}_{Rt} = \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{Lt} - \mathbf{u}_{Lt} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{Ct} - \mathbf{i}_{Ct} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{R}_l \cdot \mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{u}_{Rl} = \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_l \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{u}_{Ll} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_l \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{Cl} - \mathbf{i}_{Cl} = \mathbf{0} \end{array} \right\}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{R}_t, \mathbf{L}_t, \mathbf{C}_t$  – векторы-строки, содержащие значения сопротивлений, индуктивностей и емкостей элементов, попавших в ветви дерева;  $\mathbf{R}_l, \mathbf{L}_l, \mathbf{C}_l$  – аналогичные векторы, попавшие в связи.

Определим в качестве переменных состояния токи в ветвях с индуктивными элементами связей  $\mathbf{i}_{Ll}$  и напряжения на емкостных элементах дерева  $\mathbf{u}_{Ct}$  [8]. Вектор переменных состояния обозначим  $\mathbf{X}_s = [\mathbf{i}_{Ll}, \mathbf{u}_{Ct}]^T$ .

Независимые и управляемые источники напряжения задаем следующим образом. Согласно выбранному приоритету все источники напряжения попадают в ветви дерева. Будем считать, что объединенный источник напряжения состоит из нескольких источников напряжения, включенных последовательно. В его состав входят независимые источники напряжения, источники напряжения, управляемые током любых заданных ветвей с заданным коэффициентом управления  $\mathbf{z}$  и источники напряжения, управляемые напряжением любых ветвей с заданным коэффициентом управления  $\mu$ :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_{Et} = \mathbf{e}(t) + \mathbf{z}_{Et} \mathbf{i}_{Et} + \mathbf{z}_{Ct} \mathbf{i}_{Ct} + \mathbf{z}_{Rt} \mathbf{i}_{Rt} + \mathbf{z}_{Lt} \mathbf{i}_{Lt} + \\ + \mathbf{z}_{Jl} \mathbf{i}_{Jl} + \mathbf{z}_{Ll} \mathbf{i}_{Ll} + \mathbf{z}_{Rl} \mathbf{i}_{Rl} + \mathbf{z}_{Cl} \mathbf{i}_{Cl} + \\ \mu_{Et} \mathbf{u}_{Et} + \mu_{Ct} \mathbf{u}_{Ct} + \mu_{Rt} \mathbf{u}_{Rt} + \mu_{Lt} \mathbf{u}_{Lt} + \\ + \mu_{Jl} \mathbf{u}_{Jl} + \mu_{Ll} \mathbf{u}_{Ll} + \mu_{Rl} \mathbf{u}_{Rl} + \mu_{Cl} \mathbf{u}_{Cl} \end{array} \right\}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{u}_{Et}$  – вектор суммы значений напряжений всех источников ЭДС, входящих в объединенный источник;  $\mathbf{e}(t)$  – вектор значений напряжений независимых источников;  $\mathbf{z}_{Et}, \mathbf{z}_{Ct}, \mathbf{z}_{Rt}, \mathbf{z}_{Lt}, \mathbf{z}_{Jl}, \mathbf{z}_{Ll}, \mathbf{z}_{Rl}, \mathbf{z}_{Cl}$  – векторы коэффициентов управления по току управляемых источников напряжения;  $\mu_{Et}, \mu_{Ct}, \mu_{Rt}, \mu_{Lt}, \mu_{Jl}, \mu_{Ll}, \mu_{Rl}, \mu_{Cl}$  – векторы коэффициентов управления по напряжению управляемых источников напряжения.

В матричной форме уравнение (8) можно записать как:

$$\mathbf{C}_V \cdot \mathbf{X}_k = \mathbf{u}_{Et}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{C}_V$  – матрица коэффициентов управления управляемых источников напряжения;  $\mathbf{X}_k$  – объединенный вектор неизвестных:

$$\mathbf{X}_k = \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{Ll}, \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{Ct}, \mathbf{i}_{Et}, \mathbf{i}_{Ct}, \mathbf{i}_{Rt}, \mathbf{i}_{Lt}, \mathbf{i}_{Jl}, \mathbf{i}_{Ll}, \mathbf{i}_{Rl}, \mathbf{i}_{Cl}, \mathbf{u}_{Et}, \right. \\ \left. \mathbf{u}_{Ct}, \mathbf{u}_{Rt}, \mathbf{u}_{Lt}, \mathbf{u}_{Jl}, \mathbf{u}_{Ll}, \mathbf{u}_{Rl}, \mathbf{u}_{Cl} \right]^T. \quad (10)$$

Вектор  $\mathbf{X}_k$  состоит из ряда подвекторов, содержащих мгновенные значения производных переменных состояния, токов и напряжений всех ветвей дерева и связей.

Подвекторы могут иметь разный размер, а некоторые подвекторы могут вообще отсутствовать. Поэтому вектор  $\mathbf{X}_k$  имеет динамическую структуру и положение каждого подвектора определяется относительно положения предыдущего подвектора (согласно выбранному приоритету ветвей) и сохраняется в специальных переменных.

Аналогично задаем независимые и управляемые источники тока.

Уравнения (3), (5), (7), (9) объединим в единую систему. В результате получаем матричное линейное алгебраическое уравнение:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_k = \mathbf{F}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{M}$  – матрица коэффициентов, а  $\mathbf{F}$  – вектор правых частей объединенной системы уравнений, содержащей уравнения, составленные по законам Кирхгофа в мгновенной форме, уравнения, связывающие токи и напряжения на пассивных элементах, уравнения, задающие независимые, а также зависимые источники напряжения и тока с заданными коэффициентами управления.

Матричное уравнение (3) содержит количество строк, равное числу ветвей дерева  $b_p$ , а уравнение (5) – числу связей  $b_f$ . Уравнение (7) содержит количество строк, равное числу ветвей цепи с пассивными элементами. Уравнение (9) содержит количество строк, равное числу источников напряжения. Таким образом, в уравнении (11) имеем  $2b$  строк. Количество же неизвестных в системе (11) равно количеству всех токов  $b$ , напряжений  $b$  и переменных состояния (за счет производных переменных состояния).

Система уравнений (11) описывает электромагнитные процессы в цепи в произвольный момент времени  $t_k$ . Она может иметь единственное решение, если ее дополнить уравнениями, число которых равно количеству переменных состояния. Эти уравнения можно получить, используя численный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений. Многие существующие методы численного интегрирования требуют, чтобы система дифференциальных уравнений была представлена в нормальной форме, т. е. разрешена относительно первых производных искомых функций. Предлагаемый далее метод не требует этого, т. е. численному решению подлежит система нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений, полученных с помощью законов Кирхгофа без преобразований. Такой способ был предложен в работе [9], но в то время ввиду слабости компьютерной техники он не нашел широкого применения.

Динамические процессы в магнитоэлектрических схемах замещения сложных устройств описываются, как правило, жесткими дифференциальными уравнениями. Это связано с большим разбросом значений параметров элементов реальных цепей. Как известно [7], неявные численные методы интегрирования жестких дифференциальных уравнений имеют преимущества перед явными методами. При этом многошаговые методы имеют преимущества перед одношаговыми методами

по точности. Одними из наиболее распространенных методов расчета динамических процессов в жестких электрических цепях являются методы Гира [8] порядка не более пяти. Более высокий порядок метода не приводит к существенному улучшению точности решения системы дифференциальных уравнений, но увеличивает время счёта. Приведем уравнения методов Гира первого и второго порядка:

$$\mathbf{X}_{s_k} = \mathbf{X}_{s_{k-1}} + h \cdot \mathbf{X}'_{s_k}; \quad (12)$$

$$\mathbf{X}_{s_k} = \frac{4}{3} \mathbf{X}_{s_{k-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{X}_{s_{k-2}} + h \left[ \frac{2}{3} \mathbf{X}'_{s_k} \right], \quad (13)$$

где  $\mathbf{X}_{s_k}$  – подвектор переменных состояния в момент времени  $t_k$ .

Объединив матричное уравнение (11) и матричное уравнение численного метода Гира (12) в единую систему уравнений, получим линейное матричное уравнение относительно токов, напряжений и производных переменных состояния на  $k$ -м шаге интегрирования:

$$\mathbf{M}_G \mathbf{X}_k = \mathbf{F}_G, \quad (14)$$

где  $\mathbf{M}_G, \mathbf{F}_G$  – матрица  $\mathbf{M}$  и вектор  $\mathbf{F}$  в уравнении (11) с присоединенными строками (12) метода Гира.

Численный метод Гира – многошаговый неявный метод интегрирования дифференциальных уравнений. Он позволяет вычислять значения переменных состояния  $\mathbf{X}_{s_k}$  и их производных в  $k$ -ый момент времени, если известны значения переменных состояния в нескольких предыдущих моментах (метод дифференцирования назад).

На первом шаге интегрирования уравнение (14) может быть решено, если использован неявный метод Эйлера (12) при заданных независимых начальных условиях  $\mathbf{X}_{s_0}$ . На втором шаге можно использовать метод Гира второго порядка (13) и так далее до пятого шага. Таким образом, для старта необходимо предусмотреть процедуру «разгона» путем последовательного повышения порядка метода с первого до пятого.

Если систему уравнений (14) решать в цикле с пошаговым увеличением текущего времени до достижения заданного времени окончания моделирования, то получим зависимости от времени всех токов, напряжений и производных переменных состояния. Совокупность вектор-столбцов решения  $\mathbf{X}_k$  для каждого временного шага объединяется в единый массив решений  $\mathbf{X}$ .

Матрица  $\mathbf{M}_G$  имеет много нулевых элементов. Это дает возможность применить математический аппарат работы с разреженными матрицами (sparse), что позволяет успешно работать с матрицами большого размера.

Согласно данному алгоритму можно составить программу для моделирования динамических электромагнитных процессов в линейных цепях с постоянным шагом интегрирования. Однако постоянный шаг интегрирования не является оптимальным шагом, поэтому автоматический выбор оптимального шага является обя-

зательной процедурой в серьезных программных комплексах.

Снимем ограничение линейности цепи, наложенное ранее. Будем считать, что цепь содержит нелинейные резистивные элементы, заданные своей характеристикой в виде таблицы опорных точек. Резистивные элементы могут быть электрическими или магнитными. Поскольку законы Ома и Кирхгофа в электрических и магнитных цепях идентичны, то электрические токи и магнитные потоки точки зрения вычислений равнозначны. Вольтамперные характеристики нелинейных резисторов, а также вебер-амперные характеристики сталей, из которых выполняются магнитопроводы, обычно задаются набором значений, полученных экспериментально. В настоящее время требованиям, предъявляемым к аппроксимации кривых намагничивания электротехнических сталей, в наибольшей степени удовлетворяют сплайн-функции [10]. В системах Matlab и GNU Octave имеется богатый набор операций со сплайнами.

Для холоднокатаных текстурованных сталей с крутой характеристикой намагничивания вблизи мест крутого перегиба кривой наблюдаются значительные отклонения аппроксимации от истинной кривой даже при густом задании опорных точек. Это существенно влияет на точность моделирования и на устойчивость вычислительного процесса. Чтобы избежать такого нежелательного явления предложено выполнять предварительное логарифмирование кривой намагничивания. Как показала практика, предварительное логарифмирование уменьшает скорость роста кривой и при аппроксимации сплайнами логарифмированной кривой проблем не возникает.

В разработанной универсальной математической модели предусмотрено представление магнитопроводов различными моделями. Рассмотрим наиболее эффективный способ, предложенный в работах [2, 3]. М.А. Шакировым предложено понятие магнитного тока смещения  $i^\mu = d\Phi / dt$  по аналогии с электрическим током смещения плотностью  $dD / dt$ . Подобно электрическому току смещения, протекающему через емкостной элемент, магнитный ток смещения должен протекать через магнитный емкостной элемент  $C_m^d$ .

Для замкнутого ферромагнитного магнитопровода длиной  $\ell$ , на котором расположена катушка, содержащая  $N$  витков, справедливо выражение:

$$H \cdot \ell = N \cdot i. \quad (15)$$

Продифференцируем выражение (15) по времени:

$$\frac{dH}{dB} \frac{dB}{dt} \ell = N \frac{di}{dt}. \quad (16)$$

Преобразуем выражение (16), используя обозначение дифференциальной магнитной проницаемости  $\mu^d = dB / dH$ :

$$\frac{\ell}{S \mu^d} \frac{d\Phi}{dt} = N \frac{di}{dt}, \quad (17)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения магнитопровода.

Уравнение (17) представим в виде, обозначив производную по времени штрихом:

$$R^d \Phi' = Ni', \quad (18)$$

где введено дифференциальное магнитное сопротивление

$$R^d = \frac{\ell}{\mu^d S}.$$

Согласно выражению (16) можно записать:

$$\Phi' = \frac{Ni'}{R^d} = i^\mu. \quad (19)$$

Преобразуем формально выражение (19), введя дифференциальную емкость.

$$i^\mu = \Phi' = C_m^d \frac{du_{cm}}{dt}, \quad (20)$$

где дифференциальная емкость магнитного конденсатора:

$$C_m^d = \frac{\mu^d S}{\ell}. \quad (21)$$

Будем интерпретировать выражение (20) следующим образом (рис. 1). В схеме замещения магнитной ветви протекает магнитный ток  $i^\mu$ , равный производной магнитного потока  $d\Phi / dt$ . В магнитную ветвь включен магнитный конденсатор с дифференциальной емкостью  $C_m^d$ . Влияние тока катушки на магнитный поток в магнитной ветви учтено включением в магнитную ветвь источника напряжения, управляемого током катушки с коэффициентом управления  $N$ . Влияние магнитной ветви на катушку учтено включением вместо катушки источника напряжения, управляемого магнитным током с коэффициентом управления  $N$ .

В число пассивных элементов программы моделирования Solo введем дополнительный тип емкостного элемента  $C_m^d$ . Напряжение на магнитном конденсаторе можно рассматривать как самостоятельную переменную состояния. Ветви с такими конденсаторами могут попасть как в дерево, так и в связи. Векторы  $C_{mt}$  и  $C_{ml}$  содержат величины дифференциальных емкостей ветвей дерева и связей в произвольный момент времени. Векторы токов магнитных конденсаторов, входящих в ветви дерева и связи, обозначим  $i_{Cmt}$ ,  $i_{Cml}$  соответственно, а векторы напряжений –  $u_{Cmt}$ ,  $u_{Cml}$ . В вектор  $X_k$  текущего значения всех искомым переменных добавятся новые компоненты – подвекторы  $u'_{Cmt}$ ,  $i'_{Cmt}$ ,  $i'_{Cml}$ ,  $u_{Cmt}$ ,  $u_{Cml}$ . При подготовке исходных данных всегда можно добиться, чтобы все магнитные конденсаторы попали только в дерево. Обработка нововведенных элементов в программном комплексе Solo производится по правилам обра-

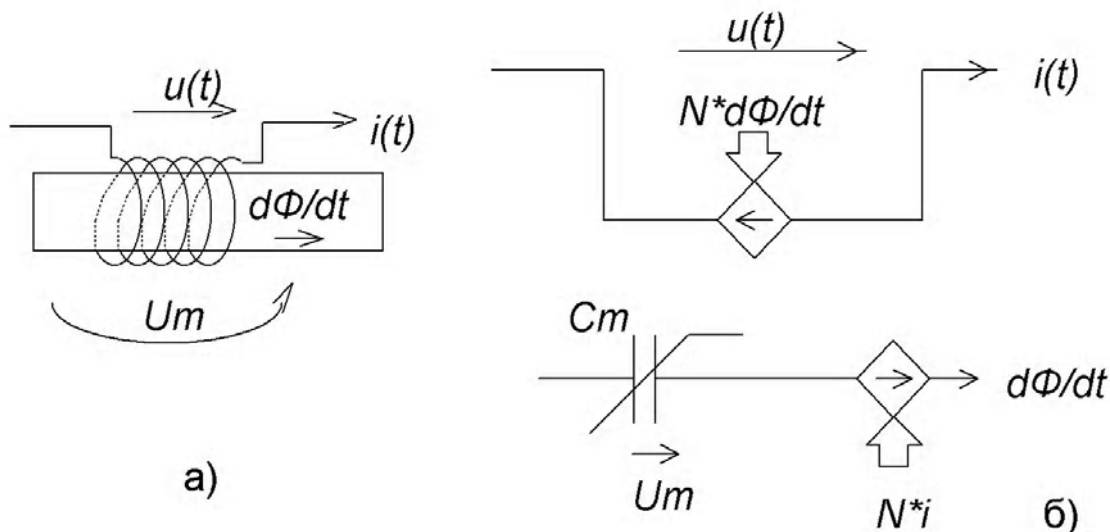


Рисунок 1 – Представление катушки магнитоэлектрической схемой замещения: а) – магнитная ветвь с катушкой; б) – магнитоэлектрическая схема замещения с магнитным конденсатором.

ботки емкостных элементов.

В качестве переменных состояния выбираются токи индуктивностей, попавших в связи, и напряжения электрических и магнитных конденсаторов, попавших в дерево.

В матрицу  $M_G$  добавляются строки, согласно уравнениям связи токов и напряжений на элементах  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$ . В вектор правых частей уравнений  $F_G$  соответственно добавляются строки, содержащие данные о напряжениях на магнитных конденсаторах на предыдущих шагах интегрирования согласно методу Гира. Значения  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$  при изменениях напряжений, токов, магнитных потоков изменяются, что следует учитывать. На данном шаге интегрирования необходимо использовать значения величин  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$ , вычисленные именно на этом шаге. Поэтому на каждом шаге интегрирования идет обращение к подпрограмме Newton, в которой значения величин  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$  вычисляются итерационно с использованием заданных вебер-амперных характеристик электротехнических сталей. На каждом шаге итераций определяется разность значений  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$  текущего и предыдущего циклов итераций. Цикл итераций прекращается, когда эта разность становится меньше заданной величины.

Решение уравнения (14) дает на каждом шаге интегрирования значения производных переменных состояния, электрических токов и напряжений всех элементов, магнитных токов и напряжений ветвей магнитной цепи. Магнитные потоки вычисляются интегрированием магнитных токов методом трапеций. С учетом измененных значений  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$  корректируются матрицы  $M_G$  и  $F_k$  на каждом шаге интегрирования.

В программном комплексе шаг интегрирования выбирается автоматически исходя из скорости сходимости итерационного процесса при обработке нелинейных элементов. Для этого задаем максимальным количеством итераций  $N_{it}$ . Это число выбирается эксперимен-

тально для каждой задачи. Если количество итераций оказывается больше, чем  $N_{it}$ , то шаг интегрирования немедленно делится пополам. Если количество итераций оказывается меньше, чем  $N_{it}/2$  и такая ситуация сохраняется на протяжении заданного числа  $N_{er3}$  шагов, то шаг интегрирования увеличивается вдвое. Если количество итераций оказывается меньше, чем  $N_{it}/D_{it}$  и такая ситуация сохраняется на протяжении заданного числа  $N_{er2}$  шагов то шаг интегрирования также увеличивается вдвое ( $D_{it}$  – коэффициент деления максимального количества итераций). Величины  $N_{er2}$ ,  $N_{er3}$ ,  $D_{it}$  также выбираются экспериментально для каждой конкретной задачи.

Предложенный метод позволяет производить моделирование электромагнитных процессов в магнитной системе, имеющей начальное намагничивание, отличное от нуля.

Для иллюстрации изложенных возможностей программного комплекса Solo рассмотрим пример моделирования переходных процессов при подключении к источнику питания трехфазного пятистержневого трансформатора, показанного на рис. 2.

Схема замещения, по которой проводится моделирование, представлена на рис. 3. На рис. 3а представлена схема замещения первичных обмоток трансформатора, подключенных к трехфазному источнику ЭДС. Влияние основных магнитных потоков на первичную обмотку учтено введением управляющих источников ЭДС в фазы А, В и С с коэффициентами управления  $N_1 \cdot i_2$ ,  $N_1 \cdot i_4$  и  $N_1 \cdot i_6$  соответственно. (Напомним, что  $i_2$ ,  $i_4$ ,  $i_6$  – производные магнитных потоков). На рис. 3б представлена схема замещения вторичных обмоток трансформатора, подключенных к трехфазной нагрузке. Она выполнена аналогично схеме замещения первичных обмоток. Влияние основных магнитных потоков на вторичную обмотку учтено введением управляющих источников ЭДС в фазы нагрузки с коэффициентами управления  $N_2 \cdot i_2$ ,  $N_2 \cdot i_4$

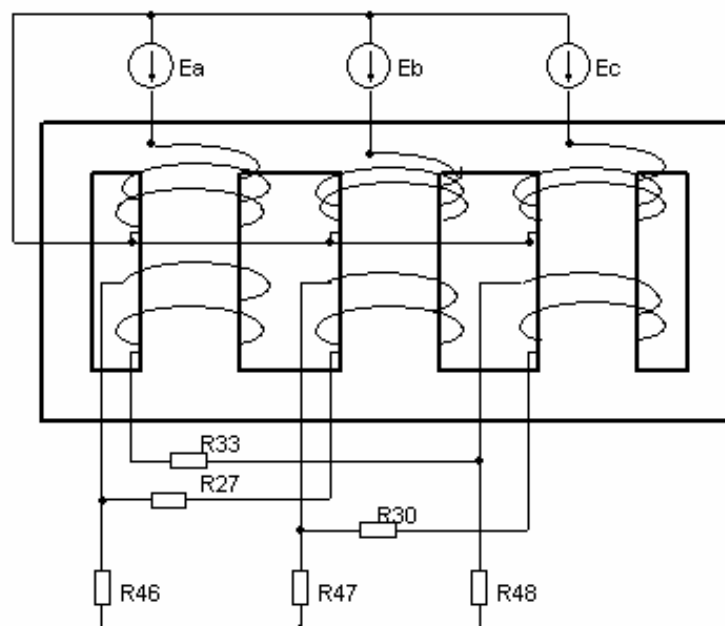


Рисунок 2 – Общая схема трансформатора с источником и нагрузкой.

и  $N_2 \cdot i_0$  соответственно. На рис. 3в представлена схема замещения магнитной системы трансформатора.

В ветвях магнитной системы протекают магнитные токи – производные по времени магнитных потоков. Участки магнитопровода характеризуются дифференциальной емкостью, которая вычисляется на каждом шаге интегрирования. Влияние обмоток учитывается введением управляющих источников ЭДС, имеющих коэффициент управления, равный произведению тока обмотки на ее количество витков. Магнитные потоки в воздухе учтены введением линейных магнитных емкостей  $C_{39}$ ,  $C_{40}$ ,  $C_{42}$ . Последовательно с каждым магнитным конденсатором включен резистивный элемент, учитывающий потери в магнитном поле. В результате моделирования получаем электрические и магнитные токи, магнитные потоки, напряжения всех ветвей, а также производные всех переменных состояния. Результаты моделирования приведены на рис 4.

Адекватность разработанной математической модели и программного комплекса, разработанного на ее основе, проверена сравнением проведенного расчета с экспериментальными данными. В работе [11] приведены осциллограммы, снятые при включении трехфазного трансформатора под напряжение в режиме холостого хода. В этой же работе приведены все данные трансформатора и условия проведения эксперимента. При этих условиях проведено моделирование электромагнитных процессов при включении трансформатора под напряжение источника. Поскольку для трансформатора наибольшей опасностью представляет амплитуда броска тока, то оценим отклонение наибольшего значения тока, полученное в результате моделирования и в эксперименте. Наибольший бросок тока наблюдается в фазе «А». Отклонение значений, полученных в результате моделирования и в эксперименте, составляет 8%. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными показывает хорошее согласование, как по величине

нам, так и по формам кривых.

В рассмотренном примере рассмотрена простая электрическая схема и линейная нагрузка. Однако разработанный программный комплекс предполагает возможность моделирования переходных процессов в цепи произвольной конфигурации при наличии нелинейных электрических элементов. В программном комплексе Solo разработаны математические модели следующих элементов: диодов, тиристоров, нелинейных сопротивлений, управляемых источников ЭДС и тока с коэффициентом управления, изменяющемся по заданной функциональной зависимости. Ввиду ограниченности данной статьи дополнительные возможности будут описаны и продемонстрированы в последующих публикациях.

## ВЫВОДЫ

1. Для совместного моделирования динамических процессов токов и магнитных потоков в нелинейных электромагнитных устройствах на основе магнитоэлектрических схем замещения произвольной конфигурации разработана новая математическая модель, автоматически формирующая и решающая дифференциально-алгебраические системы уравнений состояния.
2. В разработанной математической модели используется концепция формирования магнитоэлектрических схем замещения, предложенная М. А. Шакировым, использующая понятия «магнитный ток» и «магнитные конденсаторы».
3. В виде усовершенствования метода М. А. Шакирова предложено использовать магнитные конденсаторы с дифференциальной емкостью.
4. Разработанная математическая модель, реализованная в виде программного комплекса Solo, позволяет автоматизировать расчеты электромагнитных переходных процессов в магнитоэлектрических схемах замещения произвольной конфигурации.

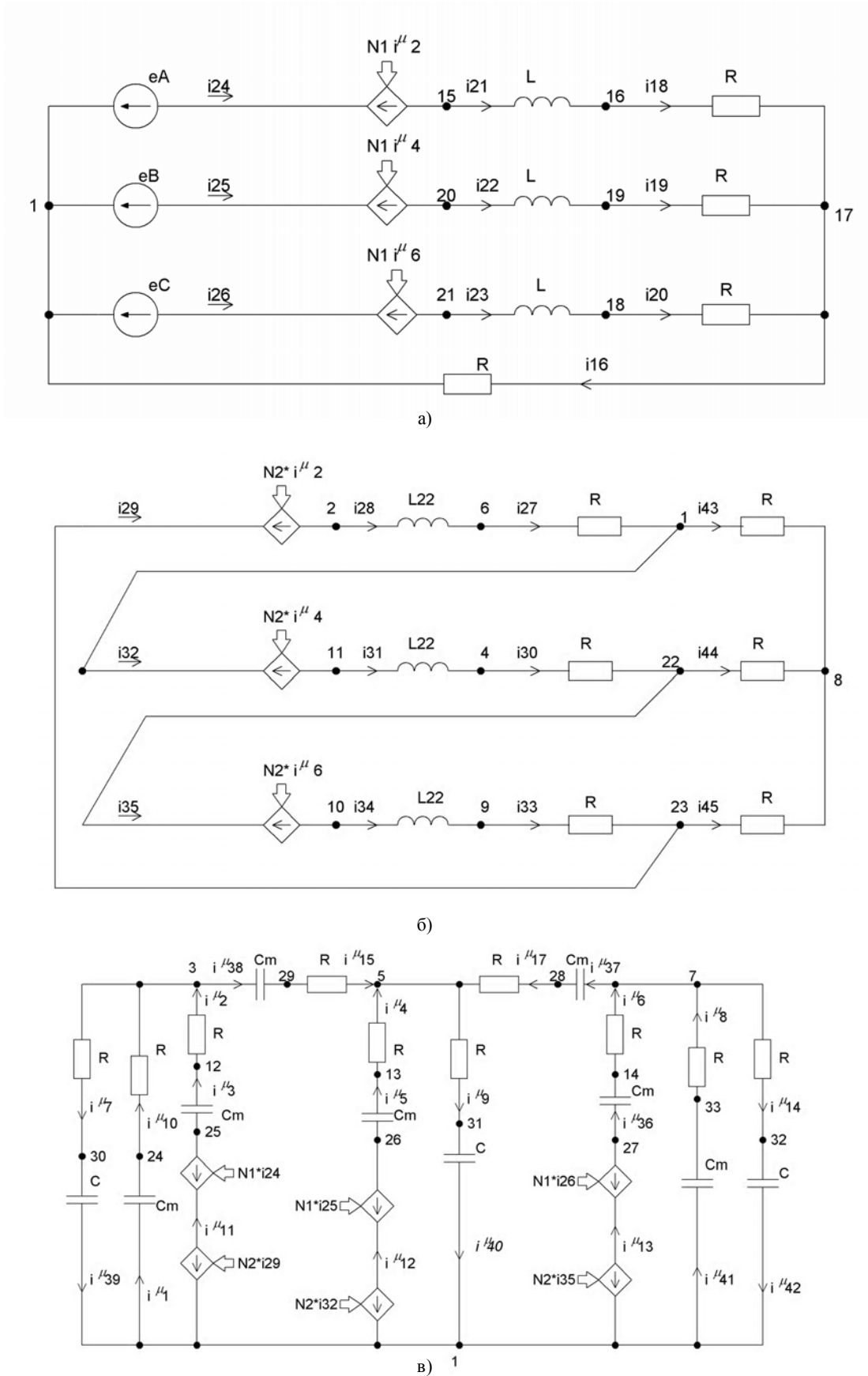


Рисунок 3 – МЭСЗ трехфазного трансформатора с магнитными конденсаторами : а) схема первичных обмоток, подключенных к трехфазному источнику ЭДС; б) схема вторичных обмоток, подключенных к трехфазной нагрузке; в) схема магнитной системы.



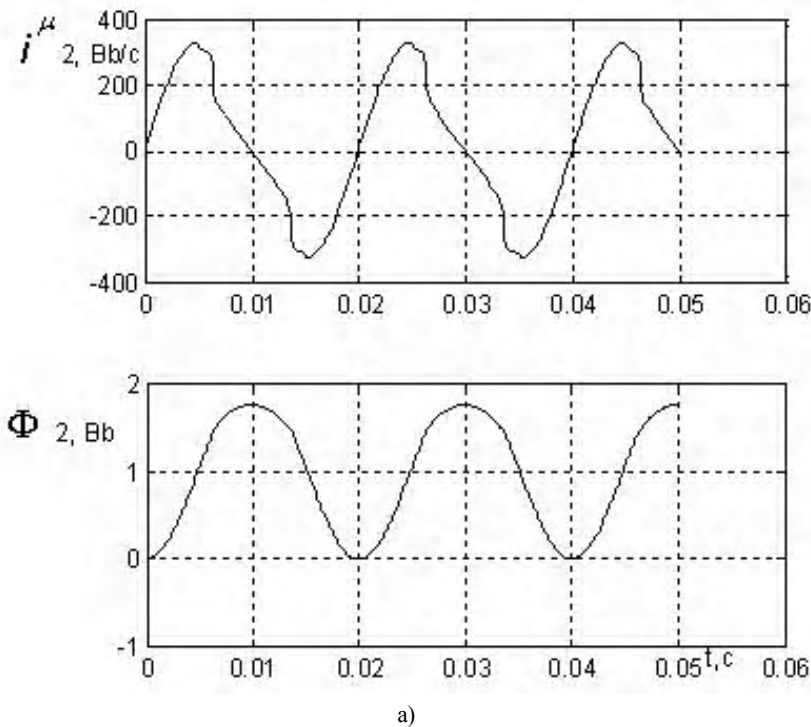


Рисунок 4 – Расчетные осциллограммы при включении трансформатора: а) зависимость от времени магнитного тока и магнитного потока в стержне фазы «В»; б) зависимость от времени тока первичной обмотки фазы «В».

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Dommel Hermann W. EMTP theory book / Hermann W. Dommel. – British Columbia : Microtran Power System Analysis Corporation Vancouver, 1996. – 631 p.
2. Шакиров М. А. Анализ неравномерности распределения магнитных нагрузок и потерь в трансформаторах на основе магнитоэлектрических схем замещения. / М. А. Шакиров // Электричество. – 2005. – № 11. – С. 15–27.
3. Шакиров М. А. Расчет несимметричных режимов работы трансформаторов с учетом намагничивания стали. / М. А. Шакиров // Электричество. – 2006. – № 6. – С. 21–33.
4. Lindberg E. ANP3 & NAP2 – A package for circuit and systems simulation / E. Lindberg // Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Engineering Software, 24 March. – London, England, 1981. – P. 686–700.
5. Хайнеман Р. PSPICE Моделирование работы электронных схем / Р. Хайнеман. – М. : ДМК, 2005. – 325 с.
6. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. / В. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2002. – 528 с.
7. Влах И. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем / И. Влах, К. Сингхал. – М. : Радио и связь, 1988. – 560 с.
8. Чуа Л. О. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы / Л. О. Чуа, Пен-Мин. Линг; [пер. с англ.]. – М. : Энергия, 1980. – 640 с.
9. Сигорский В. П. Алгоритмы анализа электронных схем. / В. П. Сигорский, А. И. Петренко. – М. : Сов. радио, 1976. – 608 с.
10. К. Де Бур. Практическое руководство по сплайнам. Пер. с англ. / К. Де Бур. – М. : Радио и связь, 1985. – 304 с.
11. Elleuch M. Three phase, three limb transformer model for switching transient calculations. Part 1: Parameter definition and identification / M. Elleuch, M. Poloujadoff // Acta Technica Csav. – 1988. – No. 1. – P. 100–117.

Статья поступила в редакцию 10.12.2014.

Тиховод С. М.

Д-р техн. наук, Запорізький національний технічний університет, Україна

**МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ТРАНСФОРМАТОРАХ НА ОСНОВІ МАГНІТОЕЛЕКТРИЧНИХ СХЕМ ЗАМІЩЕННЯ**

Розроблена і реалізована в програмному комплексі Solo математична модель автоматизованого формування і числового розрахунку системи диференціальних алгебраїчних рівнянь, що описують перехідні процеси в електромагнітних пристроях із складним навантаженням на основі нелінійних магнітоелектричних схем заміщення довільної складності. У моделях магнітопроводів запропоновано використовувати магнітні конденсатори з диференціальною ємністю.

**Ключові слова:** магнітоелектрична схема заміщення, граф кола, магнітні струми, магнітні конденсатори.

Tykhovod S. M.

Doctor technical sciences, Zaporozhye national technical university, Ukraine

### TRANSIENTS MODELING IN TRANSFORMERS ON THE BASIS OF MAGNETOELECTRIC EQUIVALENT CIRCUITS

*The mathematical model of numerical calculation of transients in electromagnetic devices with complicated load on the basis of nonlinear magneto-electric equivalent circuits of any complexity is developed. On the basis of the developed mathematical model, the method of state variables with application of the equations according to currents and voltages of Kirchhoff's rules obtained by topological way is used. Thus uniformity for automatic drawing up of the condition equations of magneto-electric equivalent circuits is obtained. Convenience of application of the controlled sources of voltage and current which are widely used in magneto-electric equivalent circuits at the description of interaction of electric currents and magnetic fluxes is also reached. It is offered to use «magnetic currents» and «magnetic condensers» with a differential capacity in magnetic circuits models. On the basis of mathematical model the program complex Colo is developed. This complex provides modeling of the magneto-electric circuits containing greater than 300 elements and it has the increased speed of calculations in comparison with the existing program complexes and gives the steady solution with a less error: The mathematical model is executed so that the results of calculation are time dependences of currents (magnetic fluxes) and voltage drops for all elements of circuit for any configuration.*

**Keywords:** magneto-electric equivalent circuit, graph-scheme, magnetic currents, magnetic condensers.

### REFERENCES

1. Dommel Hermann W. EMTP theory book. British Columbia, Microtran Power System Analysis Corporation Vancouver, 1996, 631 p.
2. Shakirov M. A. Analiz neravnomernosti raspredeleniya magnitnyh nagruzok i poter v transformatorah na osnove magnitoelektricheskikh shem zamescheniya. *Elektrichestvo*, 2005, No. 11, pp. 15–27.
3. Shakirov M. A. Raschet nesimmetrichnykh rezhimov raboty transformatorov s uchetom namagni-chivaniya stali. *Elektrichestvo*, 2006, No. 6, pp. 21–33.
4. Lindberg E. ANP3 & NAP2 – A package for circuit and systems simulation, *Proceedings of the 2'nd International Conference on Engineering Software*. 24 March, London, England, 1981, pp. 686–700.
5. Hayneman R. PSPICE Modelirovanie raboty elektronnyh shem. Moscow, DMK, 2005, 325 p.
6. Dyakonov V. Simulink 4. Specialnyy spravochnik. Sankt-Piterburg, Piter, 2002, 528 p.
7. Vlah I., K. Sing-hal. Mashinnye metody analiza i proektirovaniya elektronnyh shem. Moscow, Radio i svyaz, 1988, 560 p.
8. Chua L. O., Pen-Min. Lin. Mashinnyy analiz elektronnyh shem: Algoritmy i vychislitelnye metody. Moscow, Energiya, 1980, 640 p.
9. Sigorskiy V. P., Petrenko A. I. Algoritmy analiza elektronnyh shem. Moscow, Sov. Radio, 1976, 608 p.
10. K. De Bur. Prakticheskoe rukovodstvo po splaynam. Moscow, Radio i svyaz, 1985, 304 p.
11. Elleuch M., Poloujadoff M. Three phase, three limb transformer model for switching transient calculations. Part 1: Parameter definition and identification, *Acta Technica Csav*, 1988, No. 1, pp. 100–117.