УДК 621.3

Величко О. В.[1], Кондратенко К. Г.[2]

[1]Канд. фіз.-мат. наук, доцент, Таврійський державний агротехнологічний університет, Україна, E-mail: velichko_ev@i.ua
[2]Студент, Таврійський державний агротехнологічний університет, Україна

ВІДНОВЛЕННЯ ЩІЛЬНОСТІ ЗАРЯДУ ЛІНІЙНОГО ПРОВІДНИКА ЗА ВІДОМИМ РОЗПОДІЛОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

В статті розглядається задача відновлення лінійної щільності заряду в прямолінійному провіднику за відомим потенціалом на поверхні уявного циліндру з віссю, яка співпадає з провідником. Отримане раніше інтегральне рівняння Фредгольма 1 роду є некоректною задачею. Пропонується наближений спосіб визначення невідомої функції, який спирається на квадратурні формули Гауса та інтерполяцію. Наведено чисельні результати розрахунку щільності заряду для випадку постійного потенціалу, синусоїдального потенціалу та потенціалу, який є лінійною функцією від координати.

Ключові слова: *електричний потенціал, лінійна щільність заряду, інтегральне рівняння Фредгольма 1 роду, квадратурні формули Гауса, інтерполяція.*

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ ТА ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ

Однією з прямих задач електростатики є задача знаходження поля електричних потенціалів, яке виникає в просторі під дією системи електричних зарядів. Розв'язок прямої задачі дозволяє зрозуміти поведінку об'єкта в заданих умовах. Однак часто потрібно розв'язувати конструктивні задачі, в яких потрібно так підібрати параметри об'єкта, щоб він міг оптимально виконувати потрібні технологічні функції. Це призводить до необхідності розв'язувати обернені задачі. З точки зору математики обернені задачі є більш складні, ніж прямі оскільки вони, зазвичай, зводяться до розв'язання інтегральних рівнянь [1].

Формулювання оберненої задачі відновлення щільності зарядів за відомим розподілом потенціалів на заданій поверхні взято авторами з роботи [2], в якій, по всій видимості, вона сформульована і розв'язана вперше. В ній показано її актуальність у зв'язку з методом Хоу для розрахунку часткових ємностей системи провідників. Автори використовують фактично метод коллокації, при якому результати суттєво залежать від вибору точок коллокації. В даній статті розглядається інший спосіб розв'язання задачі, сформульованої в назві, який є більш стійким і може буди застосований до більш загального випадку. Актуальність досліджень пов'язана з удосконаленням математичного апарату електростатики.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Якщо поле утворюється зарядженим провідником скінчених розмірів, тобто зарядами, розподіленими вздовж лінії L, то потенціал в точці М визначається за формулою [3]

$$\varphi(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\tau(l)}{R}\,dl.$$

Тут інтегрування здійснюється вздовж контуру L, $\tau(l)$ – лінійна щільність заряду, l – натуральний параметр, який відраховується вздовж контуру, R – відстань між точкою М та точкою контуру, яка визначається значенням параметру l.

Нехай провідник є прямолінійним і має довжину $2a$. Виберемо так систему координат, щоб напрямок осі абсцис співпадав з напрямком провідника і початок системи координат співпадав з центром провідника. В цьому випадку для точки $M(x,y,z)$ будемо мати вираз:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\tau(t)dt}{\sqrt{y^2+z^2+(x-t)^2}}.$$

Потенціал, який утворюється прямолінійним провідником, має осьову симетрію. Будемо вивчати потенціал на поверхні уявного циліндра радіусу $r>0$, віссю якого є вісь абсцис. Він описується рівнянням $y^2+z^2=r^2$. Для точок на цьому циліндрі потенціал є функцією лише координати x:

$$\varphi_r(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\tau(t)dt}{\sqrt{r^2+(x-t)^2}}.$$

В цій статті розв'язується обернена задача: якою повинна бути лінійна щільність заряду $\tau(t)$ для того, щоб функція $\varphi(x)$ при $x\in(-a,a)$ мала заданий вигляд. Подібна задача розглядалась в статті [2]. В ній автори обмежились випадком, коли функція $\varphi(x)$ є постійною. Ми розглядаємо випадок довільної функції та застосовуємо дещо інший математичний апарат.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для зручності будемо вважати, що ми обрали лінійні одиниці таким чином, що $a=1$, і, отже, інтегрування здійснюється по проміжку $(-1,1)$. В результаті отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$\varphi_r(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{\sqrt{r^2+(x-t)^2}}\,,\ x\in(-1,1)$$

відносно невідомої функції $\tau(t)$.

Записане інтегральне рівняння є рівнянням Фредгольма першого роду з регулярним ядром [4]. Рівняння з такими ядрами відсутні в фундаментальному довіднику [5]. Оскільки ядро є обмеженою функцією без особливостей, то ця задача є некоректною [6]. Це означає, окрім іншого, і той факт, що не для всіх функцій $\varphi(x)$ вона має розв'язок. Тому будемо шукати таку функцію $\psi(t)$, при якій функція

$$\tilde{\varphi}(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\frac{\psi(t)dt}{\sqrt{r^2+(x-t)^2}}$$

найменше відхиляється від заданої функції в сенсі метрики простору $L^2_{[-1,1]}$:

$$\int_{-1}^{1}(\tilde{\varphi}(x)-\varphi_r(x))^2dx\to\min.$$

Для обчислення функції $\tilde{\varphi}(x)$ скористаємося квадратурами Гауса [7]

$$\tilde{\varphi}(x)=\lambda\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\psi(t_k)}{\sqrt{r^2+(x-t_k)^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{\sqrt{r^2+(x-t_k)^2}}\,.$$

Тут $B_k=\lambda A_k\tau(t_k)$, A_k – ваги Гауса, n – порядок точності формули Гауса. Значення функції в вузлах Гауса t_k – величини $\psi(t_k)$ вважаються шуканими.

З урахуванням цього отримаємо наступний вираз для відхилення:

$$F(B_1,B_2,\ldots,B_n)=\int_{-1}^{1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{\sqrt{r^2+(x-t_k)^2}}-\varphi_r(x)\right)^2dx\to\min.$$

Знаходимо частинні похідні і прирівнюємо їх до нуля

$$\frac{\partial F}{\partial B_j}=2\int_{-1}^{1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{\sqrt{r^2+(x-t_k)^2}}-\varphi_r(x)\right)\frac{dx}{\sqrt{r^2+(x-t_j)^2}}=0,\ j=\overline{1,n}.$$

Таким чином маємо наступну систему для визначення невідомих B_k:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}B_kb_{kj}=c_j,\ j=\overline{1,n}.\right.$$

Тут
$$b_{kj}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{r^2+(x-t_k)^2}\sqrt{r^2+(x-t_j)^2}}\,,$$

$$c_j=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_r(x)dx}{\sqrt{r^2+(x-t_j)^2}}\,,\ j=\overline{1,n}\,.$$

Діагональні елементи можна обчислити точно:

$$b_{kk}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{r^2+(x-t_k)^2}=\frac{1}{r}\operatorname{arctg}\frac{x-t_k}{r}\bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{r}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-t_k}{r}+\operatorname{arctg}\frac{1+t_k}{r}\right),\ k=\overline{1,n}\,.$$

Для обчислення позадіагональних елементів матриці системи та правих частин знову скористаємося квадратурними формулами Гауса:

$$b_{kj}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\sqrt{r^2+(t_i-t_k)^2}\sqrt{r^2+(t_i-t_j)^2}}\,,$$

$$c_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i\varphi(t_i)}{\sqrt{r^2+(t_i-t_j)^2}}\,.$$

Після розв'язання системи визначаємо величини $\psi(t_k)=\dfrac{B_k}{\lambda A_k}$, а потім, за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа або за допомогою сплайнів, відновлюємо шукану функцію $\psi(x)$ на інтервалі $x\in(-1,1)$.

Зауважимо, що з ростом r погіршується обумовленість матриці системи. Наприклад при $n=5$, $r=0{,}5$ визначник матриці дорівнює $\approx 0{,}005$. Для великих значень r похибки обчислення можуть стати надто великими. В цьому випадку для розв'язку інтегрального рівняння потрібно застосовувати методи регуляризації [6].

ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

При проведенні чисельних експериментів використовували квадратури Гауса з 5 вузлами. Якщо функція $\varphi_r(x)$ є парною, то очевидно, що функція $\psi(x)$ також є парною, а це означає, що $B_k=B_{n-k+1}$.

Були проведені чисельні розрахунки для функції $\varphi_r(x)=1$ при $r=0{,}25$ та $r=0{,}45$. При розрахунках вважалось, що $\lambda=1$. На рис. 1 наведено графіки функції $\psi(x)$ та відповідні функції $\tilde{\varphi}(x)$.

На рис. 2 наведено відновлені графіки функцій $\psi(x)$ та $\tilde{\varphi}(x)$ при тих же значеннях параметрів для випадку, коли потенціал точок на циліндрі є лінійною функцією: $\varphi_r(x)=2+x$.

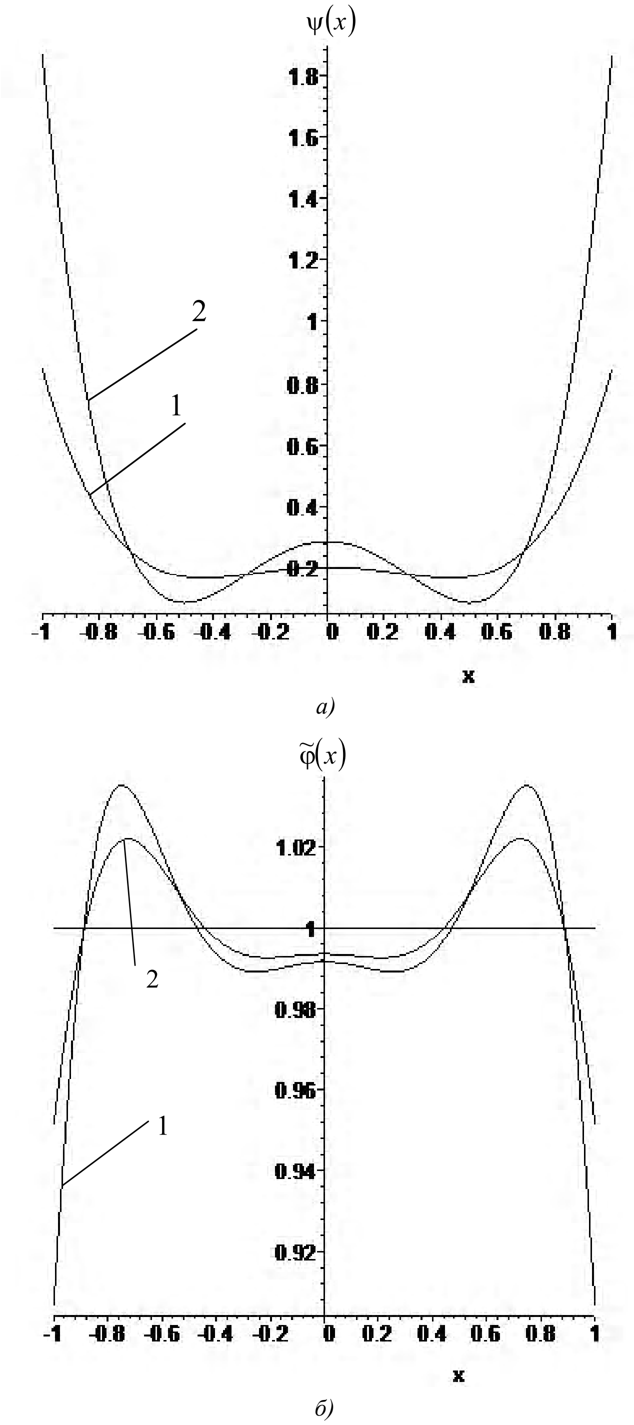


Рис. 1. Графіки функцій для значень параметру $r=0{,}25$ (лінія 1) та $r=0{,}45$ (лінія 2) для функції $\varphi_r(x)=1$.
а) – функція $\psi(x)$, б) – функція $\tilde{\varphi}(x)$

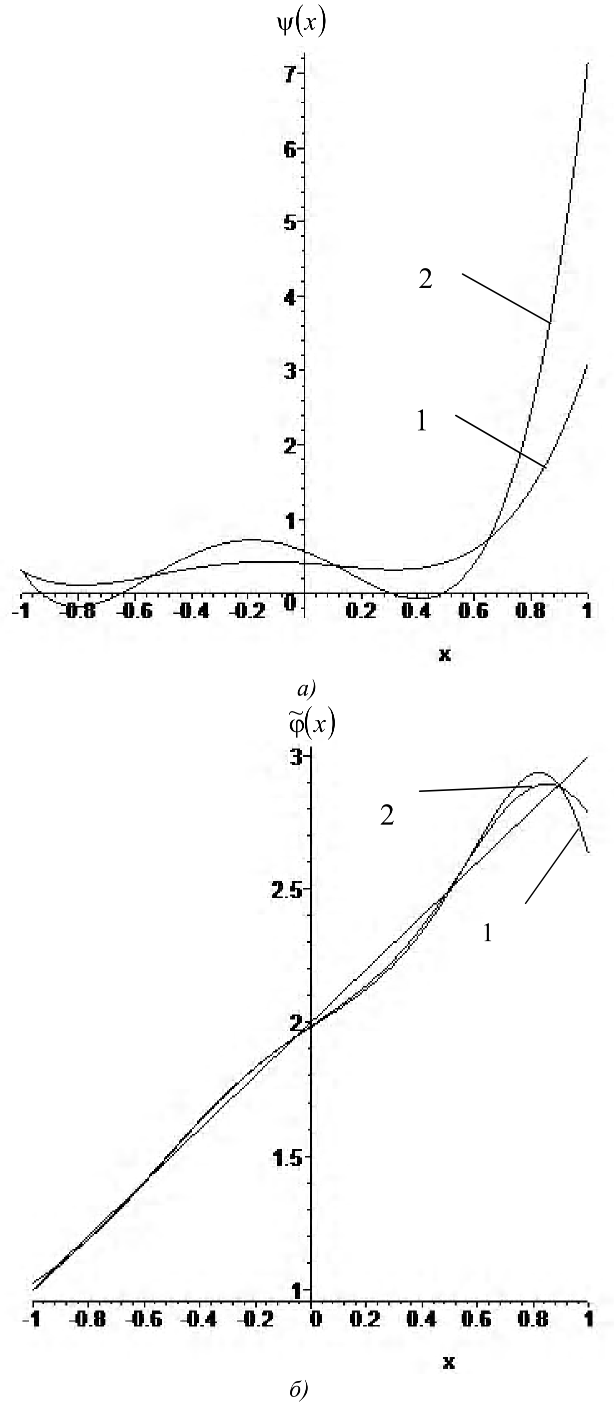
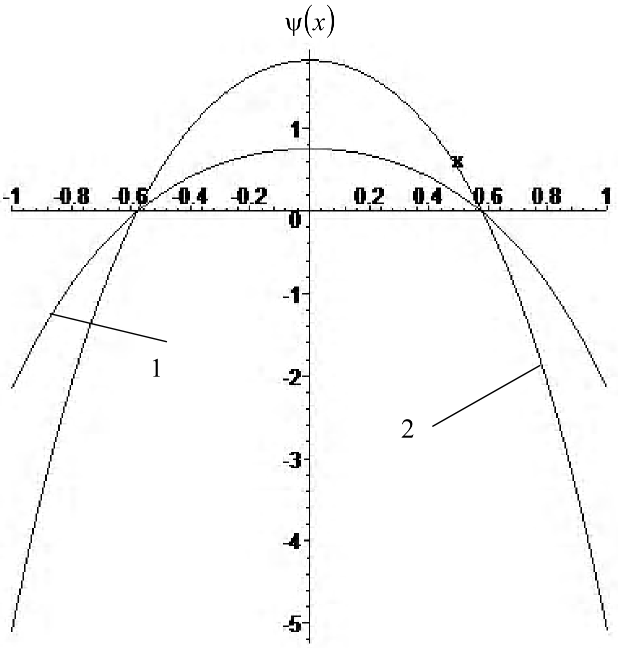
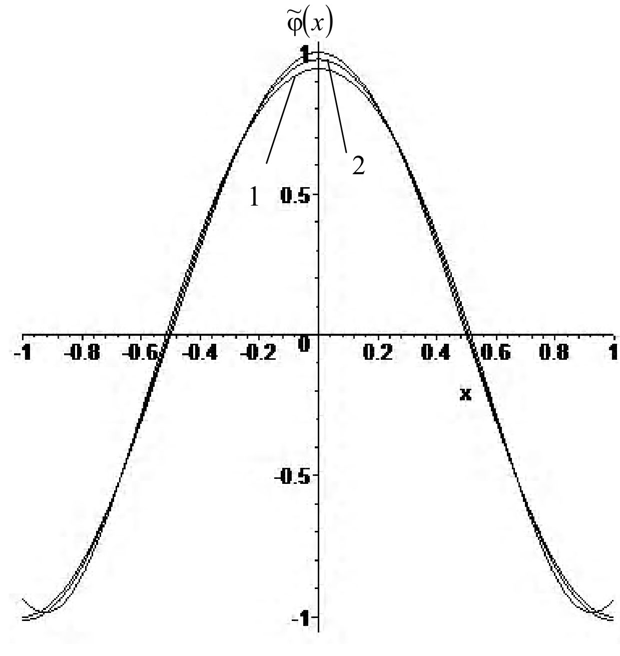


Рис. 2. Графіки функцій для значень параметру $r=0{,}25$ (лінія 1) та $r=0{,}45$ (лінія 2) для функції $\varphi_r(x)=2+x$.
а) – функція $\psi(x)$, б) – функція $\tilde{\varphi}(x)$

На рис. 3 наведено відновлені графіки функцій $\tau(x)$ та $\tilde{\varphi}(x)$ при тих же значеннях параметрів для випадку, коли потенціал точок на циліндрі є функцією $\varphi_r(x) = \cos(\pi x)$.



а)



б)

Рис. 3. Графіки функцій для значень параметру $r = 0{,}25$ (лінія 1) та $r = 0{,}45$ (лінія 2) для функції $\varphi_r(x) = \cos(\pi x)$. а) – функція $\psi(x)$, б) – функція $\tilde{\varphi}(x)$

Як бачимо з наведених графіків, для тригонометричної функції побудоване наближення є більш близьким до заданого розподілу потенціалів, ніж для постійного та лінійного розподілів.

ВИСНОВКИ

В статті запропоновано спосіб наближеного визначення щільності заряду в обмеженому прямолінійному нескінченно тонкому провіднику, при якій розподіл потенціалів на уявному циліндрі, для якого цей провідник є віссю, найменше відрізняється від теоретично заданого. Чисельний аналіз проведено для різних радіусів циліндру та для різноманітних випадках розподілу потенціалів на циліндрі.

В результаті чисельних експериментів встановлено, що різниця між заданими функціями розподілу потенціалів на циліндрі $\tilde{\varphi}(x)$ та відповідними функціями $\varphi_r(x)$, які отримані в результаті розв'язання задачі, у всіх випадках досягає найбільших значень біля кінців провідника, і вона тим більша, чим менше значення параметру r – радіусу відповідного циліндру. Цього ефекту можна позбавитися, якщо замість простору $L^2_{[-1,1]}$ розглядати, наприклад, простір $C_{[-1,1]}$. Це планується зробити в наступних дослідженнях авторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тумашев Г. Г. Обратные краевые задачи и их приложения / Г. Г. Тумашев, М. Т. Нужин. – Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.
2. Пентегов И. В. Усовершенствование метода Хоу для расчета частичных емкостей системы проводников / И. В. Пентегов, А. Л. Приступа // Електротехніка і електромеханіка. – 2012. – № 1. – С. 57–59.
3. Павловская М. В. Электростатика. Диэлектрики и проводники в электрическом поле. Постоянный ток / М. В. Павловская, А. И. Мамыкин // Электронное пособие по общему курсу физики. Режим доступу http://physicsleti.narod.ru/fiz.
4. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1974. – 832 с.
5. Манжиров А. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. – М. : Изд-во «Факториал Пресс», 2000. – 384 с
6. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.
7. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М. : Наука, 1966. – 370 с.

Стаття надійшла до редакції 14.01.2013.
Після доробки 28.01.2013.

Величко Е. В.[1], Кондратенко К. Г.[2]
[1]Кандидат физико-математических наук, доцент, Государственный агротехнологический университет, Украина
[2]Студент, Таврического государственного агротехнологического университета, Украина

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА ЛИНЕЙНОГО ПРОВОДНИКА ПО ИЗВЕСТНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПОТЕНЦИАЛОВ

В статье рассматривается задача восстановления линейной плотности заряда в прямолинейном проводнике по известному потенциалу на поверхности виртуального цилиндра с осью, которая совпадает с проводником. Полученное интегральное уравнение Фредгольма 1 рода есть некорректной задачей. Предлагается приближенный способ определения неизвестной функции, который опирается на квадратурные формулы Гаусса и интерполяцию. Приведены численные результаты для случая постоянного потенциала, синусоидального потенциала и потенциала, который есть линейной функцией координат.

Ключевые слова: *электрический потенциал, линейная плотность заряда, интегральное уравнение Фредгольма 1 рода, квадратурные формулы Гаусса, интерполяция.*

Velichko H. V.[1], Kondratenko K. G.[2]
[1]Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor, Taurida Starte University of Agrotechnological, Ukraine
[2]Student, Taurida Starte University of Agrotechnological, Ukraine

RECOVERY OF THE CHARGE DENSITY LINEAR CONDUCTOR ON KNOWN POTENTIAL DISTRIBUTION

The paper considers the problem of the linear charge density reconstruction in a straight conductor according to the known potential on the surface of a virtual cylinder with an axis which coincides with the conductor. The resulting Fredholm integral equation of one kind is the ill-posed problem. The approximate method of determining the unknown function, which is based on Gauss quadrature formulas and interpolation is proposed. The expressions for the coefficients of the system of linear algebraic equations defining the values of the unknown function at the nodes of Gauss are given. The limits of this method applicability are explored. The numerical results of the problem solution for the case when the cylinder is set in a virtual permanent capacity, the sinusoidal potential and the potential with a linear function of the coordinates are presented. It is shown that the greatest deviation from the predetermined received function is observed near the ends of the cylinder.

Keywords: *electric potential, the linear charge density, Fredholm integral equation one kind Gauss quadrature formulas, interpolation.*

REFERENCES

1. Tumashev G. G., Nuzhin M. T. Obratnye kraevye zadachi i ih prilozhenija. Kazan’, Izd-vo Kazansk. Un-ta, 1965, 333 p.
2. Pentegov I.V., Pristupa A.L. Usovershenstvovanie metoda Hou dlja rascheta chastichnyh emkostej sistemy provodnikov, *Elektrotehnika i elektromehanika*, 2012, No. 1, pp. 57–59.
3. Pavlovskaja M. V., Mamykin A. I. Jelektrostatika. Dijelektriki i provodniki v jelektricheskom pole. Postojannyj tok. Jelektronnoe posobie po obshhemu kursu fiziki. Rezhim dostupu http://physicsleti.narod.ru/fiz.
4. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov. Moscow, Nauka, 1974, 832 p.
5. Manzhirov A., Poljanin A. D. Spravochnik po integral’nym uravnenijam: Metody reshenija. Moscow, Izd-vo «Faktorial Press», 2000, 384 p.
6. Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel’kov G. M. Chislennye metody Moscow, Binom, Laboratorija znanij, 2003, 632 p.
7. Krylov V. I., Shul’gina L. T. Spravochnaja kniga po chislennomu integrirovaniju, Moscow, Nauka, 1966, 370 p.