УДК 666.1.05

А. А. Шрам

Запорожский национальный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИОННО-ПЛАЗМЕННОЙ МОДИФИКАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ СТЕКЛА

В статье разработана математическая модель ионно-плазменной модификации поверхности стекла при атмосферном давлении.

Ключевые слова: *плазма, математическая модель, поверхностная модификация, стекло, ионно-плазменная обработка.*

Введение модифицирующих элементов в поверхностный слой стекла позволяет повысить его эксплуатационные свойства, механическую прочность, обеспечить регулирование оптических свойств, а также получить возможность окрашивания стекла в различные цвета.

Качество модифицированного поверхностного слоя стекла зависит от таких параметров, как вид исходного материала внедрения, состав обрабатываемого стекла, расход и вид плазмообразующего газа, геометрических и энергетических параметров плазмотрона.

Возможность предварительного определения оптимальных диапазонов изменения технологических параметров процесса для обеспечения внедрения элементарных частиц модифицирующего материала (атомов и ионов) и равномерного их распределения в диффузионном слое приводит к снижению удельного расхода материала внедрения при формировании высококачественных проникающих покрытий на поверхности стекла с одновременным повышением производительности процесса обработки.

Распределение температуры $T(r)$ в сечении цилиндрического дугового столба описывается уравнением баланса энергии, известным как уравнение Эленбааса-Хеллера [1–3]:

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr} r\lambda \frac{dT}{dr}\right) = \sigma E^2 - \psi \,, \tag{1}$$

где напряженность электрического поля $E=E_z(r)=\text{const}$ имеет только аксиальную составляющую, не зависящую от радиальной координаты. Уравнение (1) описывает установившийся процесс, при котором выделяющееся джоулево тепло σE^2 за вычетом потерь на излучение ψ переносится к охлаждаемым стенкам теплопроводностью.

Необходимые для решения задачи свойства плазмы λ, σ, ψ при постоянном давлении являются функциями только температуры [1–3]. Реальные зависимости $\lambda(T)$, $\sigma(T)$, $\psi(T)$ (рис. 1) существенно нелинейные,

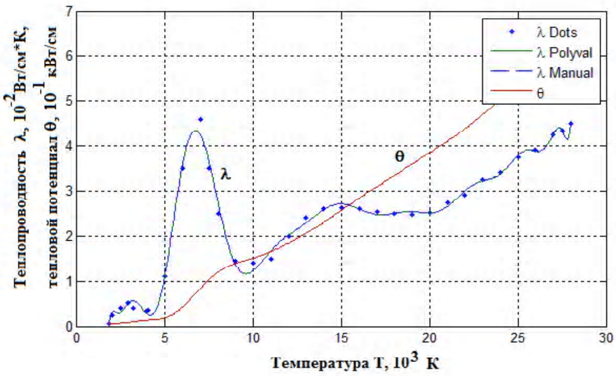

Рис. 1. Зависимости теплопроводности λ и теплового потенциала θ воздуха от температуры

что затрудняет аналитическое рассмотрение (1). Его вид можно несколько упростить известным приемом введения новой независимой переменной – потенциала теплового потока (рис. 1)

$$\theta = \int_0^T \lambda(T)dT \,, \tag{2}$$

являющегося при $p = \text{const}$ однозначной функцией температуры.

При этом уравнение (1) записывается следующим образом:

$$d\theta = \lambda(T)dT \,,$$

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr} r \frac{d\theta}{dr}\right) = \sigma(\theta)E^2 - \psi(\theta) \,. \tag{3}$$

Полный ток дуги I определяется интегральным законом Ома

$$I = 2\pi E \int_o^R \sigma r dr \,. \tag{4}$$

Каналовая модель Штеенбека-Райзера основана на сильной зависимости электрической проводимости плазмы от температуры [3, 4]. При температурах ниже 3000 К $\sigma(T) = 0$ и существенно возрастает при температурах выше 4000 К. Таким образом электрическую дугу можно представить в виде двух областей – проводящей и непроводящей (рис. 2).

Нелинейная зависимость электропроводности от функции теплопроводности представляется в виде

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} b^2(\theta - \theta_*) & \text{для } \theta_* < \theta < \theta_0; \\ 0 & \text{для } \theta < \theta_*, \end{cases}$$

где b – постоянная; θ_0 – максимальное значение θ (на оси); θ_* – значение на границе зоны проводимости плазмы.

Благодаря этой аппроксимации сечение канала разбивается на две области: область проводимости $(\sigma \neq 0)$ и непроводящую область $(\sigma = 0)$.

В области проводимости уравнение (3) принимает следующий вид.

Введем переменную

$$x = rE\sqrt{b}\,,\ dx = E\sqrt{b}dr\,,\ dr^2 = \frac{dx^2}{E^2 \cdot b}.$$

$$E^2 \cdot b\frac{d^2\theta_I}{dx^2} + \frac{(E\sqrt{b})^2}{x}\frac{d\theta_I}{dx} + E^2 \cdot b \cdot (\theta_I - \theta_*) = 0\,,$$

$$\frac{d^2\theta_I}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d\theta_I}{dx} + (\theta_I - \theta_*) = 0\,. \qquad (5, a)$$

В непроводящей области уравнение (3) преобразуется в

$$\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}r\frac{d\theta_{II}}{dr}\right) = 0\,. \qquad (5, б)$$

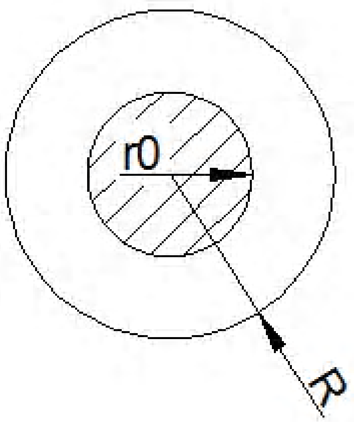

Рис. 2. Каналовая модель электрической дуги

Общее решение уравнения (5, *б*) можно представить в виде

$$\theta_{II} = C_1 + C_2 \cdot \ln|r|\,.$$

Используя граничные условия

$$\theta_I(0) = \theta_0\,,\ \left.\frac{d\theta_I}{dr}\right|_{r=0} = 0\,;$$

$$\theta_{II}(R) = 0\,,\ \theta_{II}(r_0) = \theta_*\,,$$

получаем $C_1 = -C_2 \cdot \ln|R|$,

$$\theta_I = -C_2 \cdot \ln|R| + C_2 \cdot \ln|r_*| \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{\theta_*}{\ln\frac{r_*}{R}}\,.$$

$$\theta_{II}(r) = -\frac{\theta_*}{\ln\left|\frac{r_*}{R}\right|}\cdot\ln|R| + \frac{\theta_*}{\ln\left|\frac{r_*}{R}\right|}\cdot\ln|r| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{II}(r) = \theta_* \cdot \frac{\ln\left|\frac{r}{R}\right|}{\ln\left|\frac{r_*}{R}\right|}.$$

Решением уравнения (5, *а*) является функция Бесселя первого рода нулевого порядка. С учетом граничных условий решение можно записать в виде:

$$\theta_I(r) = \theta_* + (\theta_0 - \theta_*) \cdot J_0(x)\,,$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Таким образом, решения уравнения (3) в проводящей и непроводящей области записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \theta_I(r) = \theta_* + (\theta_0 - \theta_*) \cdot J_0(x) \\ \theta_{II}(r) = \theta_* \cdot \dfrac{\ln\left|\frac{r}{R}\right|}{\ln\left|\frac{r_*}{R}\right|} \end{cases}.$$

Учитывая, что диаметр проводящей области электрической дуги намного меньше диаметра разрядного канала, распределение температуры на срезе сопла плазмотрона можно записать в виде:

$$T(r) = T_m \cdot \left(\ln\frac{r}{r_0}\right)^{1/n+1}.$$

Температура на оси столба электрической дуги определяется [3]:

$$T_m = \sqrt{\omega \cdot \frac{I_i}{8\pi\lambda_m}} .$$

Температура T по оси турбулентной струи определяется следующей зависимостью [5]:

$$\frac{T - T_\infty}{T_m - T_\infty} = \left[\left[1 - \left(\frac{z}{Z_m} \right)^{1.5} \right]^2 \right]^{\Pr_T} ,$$

где T_m – осевое значение температуры на срезе сопла плазмотрона; T_∞ – температура окружающей среды, $T_\infty = 300$ К ; Z_m – ордината внешней границы струи; $\Pr_T$ – турбулентное число Прандтля, для осесимметричных струй $\Pr_T = 0{,}8$.

Процесс накопления диффундирующего вещества в различных точках среды как функцию времени описывает второй закон Фика:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} ,$$

где D – коэффициент диффузии, c – концентрация диффундирующего вещества, x – координата.

Для диффузии в полубесконечное твердое тело:

$$c(x,t) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(- \frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t} \right),$$

где c – концентрация диффундирующего вещества при данных t и x; c_0 – концентрация вещества при t=0 и x=0.

Зависимость коэффициента диффузии атомов и ионов меди от температуры описывается следующим выражением [6]:

$$D_{\text{Cu}} = 1.91 \cdot 10^{-2} \cdot \exp\left(- \frac{27000}{R \cdot T} \right).$$

Для определения температурного поля и теплового потока при стационарной теплопроводности рассмотрим поверхность стекла как однородную плоскою стенку толщиной δ.

Стенка имеет одинаковый по всей толщине коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{ст}}$. Температура на границах стенки – T_{w1} и T_{w2}, а изотермические поверхности имеют форму плоскостей, параллельных поверхностям стенки.

При рассматриваемых условиях тепло может распространяться только вдоль оси x, и температурное поле будет одномерным. Температурные градиенты вдоль остальных осей координат равны нулю, следовательно,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 .$$

С учетом этого дифференциальное уравнение теплопроводности для плоской стенки будет иметь вид

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 .$$

$$\begin{cases} T(r) = T_m \cdot \left(\ln \frac{r}{r_0} \right)^{1/n+1}, \\ T_m = \sqrt{\omega \cdot \frac{I_i}{8\pi\lambda_m}}, \\ \frac{T - T_\infty}{T_m - T_\infty} = \left[\left[1 - \left(\frac{z}{Z_m} \right)^{1.5} \right]^2 \right]^{\Pr_T}, \\ c(x,t) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(- \frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t} \right), \\ D_{Cu} = 1.91 \cdot 10^{-2} \cdot \exp\left(- \frac{27000}{R \cdot T} \right), \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \end{cases}$$

Решение полученной системы уравнений позволяет установить связь между технологическими характеристиками процесса плазменной модификации поверхности стекла (величиной тока, геометрическими размерами разрядной камеры, теплофизическими свойствами материала внедрения) и распределением материала внедрения в поверхностном слое обработанного изделия.

Концентрация материала внедрения в поверхностном слое стекла описывается следующим уравнением:

$$c(x,t) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi \cdot 1.91 \cdot 10^{-2} \cdot \exp\left(- \frac{27000}{R \cdot T(r)} \right) \cdot t}} \times$$

$$\times \exp\left(- \frac{x^2}{4 \cdot 1.91 \cdot 10^{-2} \cdot \exp\left(- \frac{27000}{R \cdot T(r)} \right) \cdot t} \right)$$

$$T(r) = T_m \cdot \left(\ln \frac{r}{r_0} \right)^{1/n+1}.$$

Профили температуры плазменного потока представлены на рис. 3, 4. Распределение материала внедрения в поверхностном слое стекла показано на рис. 5 (время обработки $t = 20$ сек).

Разработанная математическая модель ионно-плазменной модификации поверхности стекла позволяет установить связь технологических параметров ионно-плазменного процесса с характеристиками поверхности обработанных изделий и выбрать оптимальные диапазоны изменения рабочих параметров процесса.

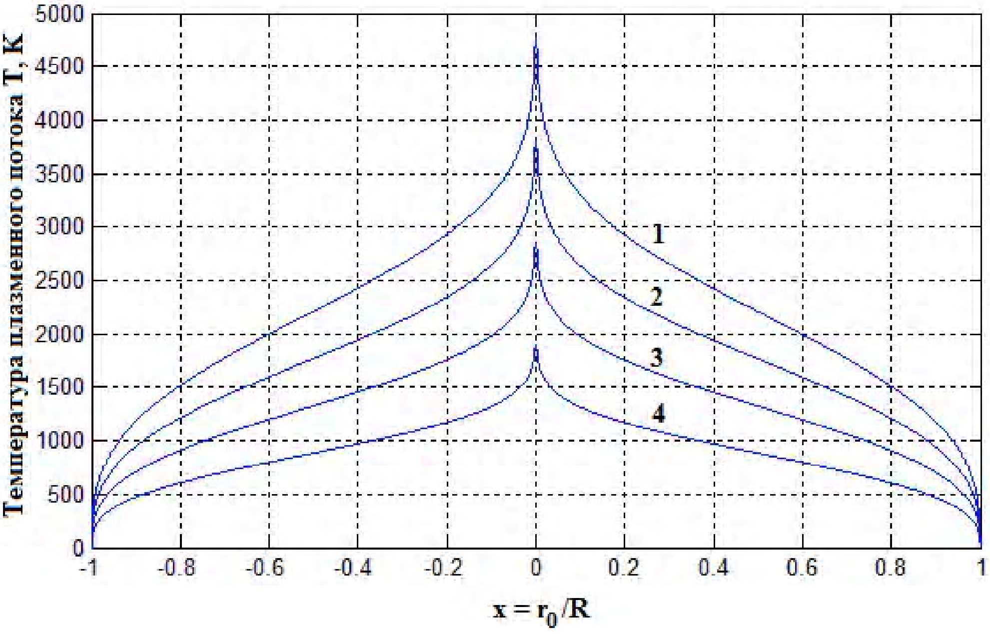

Рис. 3. Профили температуры плазменного потока при работе плазмотрона на воздухе:1 – Z = 10 мм, G = 0.0021 кг/с; 2 – Z = 30 мм, G = 0.0021 кг/с; 3 – Z = 50 мм, G = 0.0021 кг/с; 2 – Z = 70 мм, G = 0.0021 кг/с.

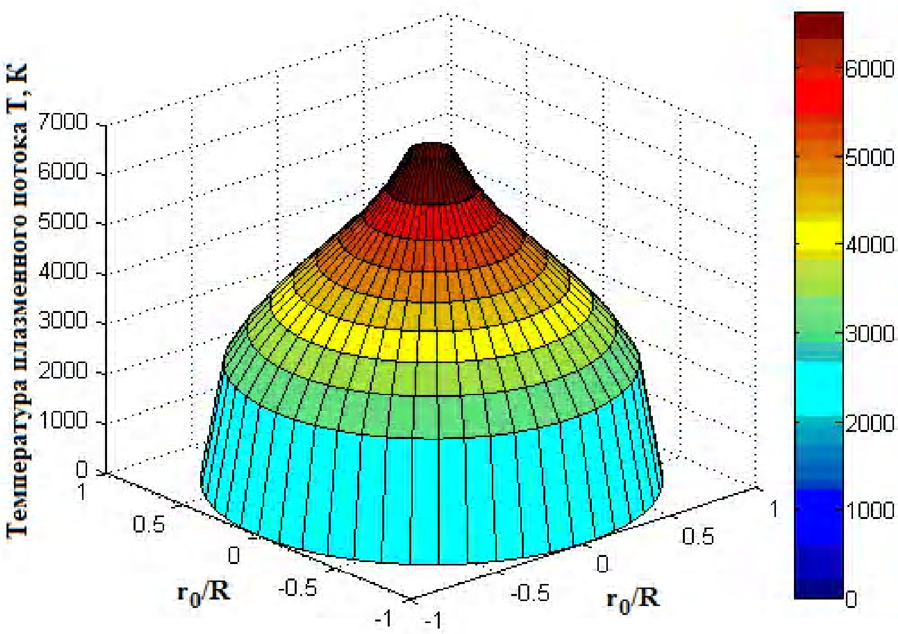

Рис. 4. Температурное поле плазменного потока на срезе сопла плазмотрона

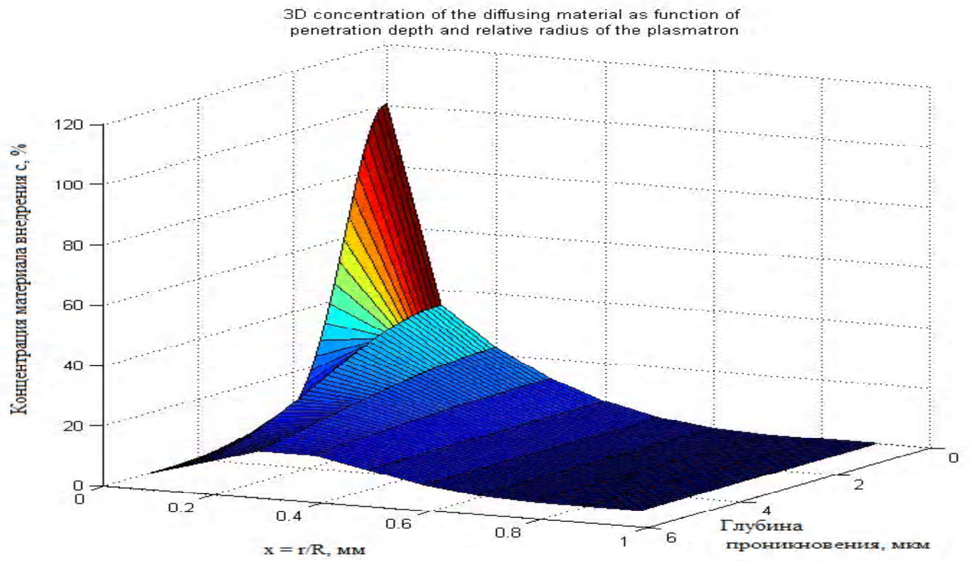

Рис. 5. Распределение материала внедрения в поверхностном слое стекла (t = 20 сек)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория столба электрической дуги / В. С. Энгельшт, В. И. Гурович, Г. А. Десятков и др. – Новосибирск : Наука, 1990. – 376 с.
2. Физика и техника низкотемпературной плазмы / [С. В. Дресвин, А. В. Донской, В. М. Гольдфарб, В. С. Клубникин]; под общ. ред. С. В. Дресвина. – М. : Атомиздат, 1972. – 352 с.
3. *Fridman, A.* Plasma chemistry / Alexander Fridman . – New York: Cambridge University Press, 2008. – 978 p.
4. *Грановский, В. Л.* Электрический ток в газе (установившийся ток) / В. Л. Грановский. – М. : Наука, 1971. – 544 с.
5. *Петров, С. В.* Плазменное газовоздушное напыление / С. В. Петров, И. Н. Карп. – К.: Наук. думка, 1993. – 495 с.
6. *Евстропьев, К. К.* Диффузионные процессы в стекле / К. К. Евстропьев. – Л. : Стройиздат. – 1970 . – 168 с.

Стаття надійшла до редакції 25.06.2011.

Шрам О. А.

Математична модель іонно-плазмової модифікації поверхні скла

У статті розроблено математичну модель іонно-плазмової модифікації поверхні скла при атмосферному тиску.

Ключові слова: *плазма, математична модель, поверхнева модифікація, скло, іонно-плазмова обробка.*

Shram A. A.

Mathematical model of glass surface ion-plasma modification

The paper describes the mathematical model of glass surface ion-plasma modification at atmospheric pressure.

Keywords: *plasma, mathematical model, surface modification, glass, ion-plasma treatment.*