



Науковий журнал

ЕЛЕКТРОТЕХНІКА та ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКА

№4'2025

*Засновано національним університетом "Запорізька політехніка"
у травні 1999 року*

Виходить 4 рази на рік

Запоріжжя

2025

Головний редактор:

д-р техн. наук, професор,
Тиховод Сергій Михайлович

Заступник головного редактора:
канд. техн. наук, доцент,

Коцур Михайло Ігорович

ЗАКОРДОННІ ЧЛЕНИ РЕДАКЦІЙНОЇ
КОЛЕГІЇ

Yunus Biçen, Ph.D, університет Дюздже, Туреччина;

Zgraja Jerzy, Ph.D, професор Лодзького технологічного університету, Лодзь, Польща;

Oskar Biro, Ph.D, професор інституту основ і теорії електротехніки Грацького технічного, Грац, Австрія;

Zurek Stan, Ph.D., науковий співробітник, Кардіфський університет, Кардіф, Великобританія;

Sebastian Tomy, Ph.D, професор університету Торонто, м. Торонто, Канада, технічний експерт корпорації "Motor Drives and Control Group", Бей-Сіті, Мічиган, США;

José Roberto Camacho, PhD, професор електротехніки в Uberlandia федеральний університет, Бразилія;

Mohamed Ahmed Moustafa Hassan, Ph.D., професор кафедри електротехніки та електроенергетики, Каїрський університет, Гіза, Єгипет.

Включено до переліку

наукових фахових видань України (категорія Б)

(наказ МОНУ № 409 від 17.03.2020 р.,

наказ МОНУ № 1471 від 26.11.2020 р.)

ЧЛЕНИ РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ (Україна)

Загірняк М. В., д-р техн. наук, проф., Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, м. Кременчук, Україна; **Зірка С. Є.**, д-р техн. наук, проф., Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро, Україна; **Яримбаш Д. С.**, д-р техн. наук, проф., Запорізький національний університет, м. Запоріжжя, Україна; **Жильцов А. В.**, д-р техн. наук, проф., Національний університету біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна; **Паранчук Я. С.**, д-р техн. наук, проф., Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна; **Бушер В. В.**, д-р техн. наук, проф., Одеський національний політехнічний університету, м. Одеса, Україна; **Папайка Ю. А.**, д-р техн. наук, проф., Національний технічний університет "Дніпровська політехніка", м. Дніпро, Україна; **Мороз Ю. І.**, канд. техн. наук, доц., Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро, Україна; **Андрієнко П. Д.**, д-р техн. наук, проф., НУ «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна; **Коцур І. М.**, канд. техн. наук, доц., НУ «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна; **Назарова О. С.**, канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна; **Безверхня Ю. С.**, доктор філософії, доцент НУ «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна; **Поляков М. О.**, д-р техн. наук, проф., НУ «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна; **Фурманова Н. І.**, канд. техн. наук, доц., НУ «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна; **Пархоменко А. В.**, канд. техн. наук, доц., НУ «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна; **Щербовських С. В.**, д-р. техн. наук, проф., Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна; **Мартинюк В. В.**, д-р. техн. наук, проф., Хмельницький національний університет, м. Хмельницький, Україна; **Кочан В. В.**, канд. техн. наук, доц., Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль, Україна; **Глоба Л. С.**, д-р. техн. наук, проф., Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна; **Скулиш М. А.**, канд. техн. наук, с.н.с., Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна.

Журнал включено до міжнародних наукометричних баз, каталогів та систем пошуку: *Index Copernicus, CrossRef, Directory of Open Access Journals (DOAJ), OpenAIRE, Public Knowledge Project (PKP), ResearchBib - Academic Recourse Index, Scientific Indexing Services (SIS), Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Наукова періодика України – проект Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського (НБУВ).*

У науковому журналі друкуються результати фундаментальних та прикладних досліджень, зокрема результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата технічних наук у галузі електротехніки та електроенергетики у відповідності з рубриками: 1. Електротехніка; 2. Електроенергетика; 3. Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології.

Журнал розповсюджується за Каталогом періодичних видань України (передплатний індекс – 22913)

Видавець: Національний університет "Запорізька політехніка", м. Запоріжжя. Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК №6952 від 22.10.2019р.

Реєстрація суб'єкта у сфері друкованих медіа: Рішення Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 3040 від 07.11.2024 року. Ідентифікатор медіа: R30-05581.

Реєстрація журналу: Журнал зареєстровано у Міністерстві юстиції України. Свідцтво про державну реєстрацію КВ №24219-14059 ПР від 07.11.2019р.

Адреса редакції: Редакційно-видавничий відділ. Національний університет "Запорізька політехніка", вул. Університетська, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна. Телефон: +380(61)769-82-96 Факс: (061) 764-21-41 e-mail: rrvv@zntu.edu.ua.

Електронна адреса журналу <http://ee.zntu.edu.ua> E-mail: etae@ukr.net

Комп'ютерна верстка Дяченко О.О. Редактор англійських текстів Войтенко С.В. Журнал підписано до друку 15.12.2025 за рекомендацією вченої ради Національного університету "Запорізька політехніка" (протокол №6 від 23.12.2025 р.). Формат 60х84/8. Ум. Др. Арк. 7,44. Тираж 300 прим. Зам. №1097.



Scientific journal

ELECTRICAL ENGINEERING & POWER ENGINEERING

№4'2025

Founded by Zaporizhzhia Polytechnic National University in May 1999

4 issues per year

Zaporizhzhia

2025

Editor-in-chief:

Prof., Sc.D. **Sergiy Tihovod**

Associate Editor-in-chief:

Assoc. prof., Ph.D. **Mykhailo Kotsur**

The journal has been included

scientific professional editions of Ukraine

(Order of the Ministry of Education and Science

№ 409 dated 17.03.2020,

Order of the Ministry of Education and Science

№ 1471 dated 26.11.2020)

FOREIGN MEMBERS OF EDITORIAL BOARD

Yunus Biçen, Ph.D. Duzce University, Turkey;

Prof. Jerzy Zgraja, Ph.D., Lodz University of Technology, Lodz, Poland;

Prof. Oszkár Bíró, Ph.D., Technical University of Graz, Graz, Austria;

Zurek, Stan, Ph.D., Research Associate, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom;

Sebastian Tomy, Ph.D, Toronto University, Canada, (Technical Expert, Motor Drives and Control Group, Bay City, Michigan, USA);

José Roberto Camacho PhD, Prof., Universidade Federal de Uberlândia, Brazil;

Mohamed Ahmed Moustafa Hassan, Ph.D., Prof., Cairo University, Giza, Egypt.

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD (Ukraine)

M.V. Zagirnyak, Sc.D., prof., Kremenchuk Michaylo Ostrogradskiy National University; **S. E Zirka**, Sc.D., prof., Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine; **D. S. Yarymbash**, Sc.D., prof., Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine; **A. V. Zhyltsov**, Sc.D., prof., National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine; **Ya. S. Paranchuk**, Sc.D., prof., Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine; **V. V. Busher**, Sc.D., prof., Odesa National Polytechnic University, Odesa, Ukraine; **Yu. A. Papaika**, Sc.D., prof., Dnipro University of Technology, Dnipro, Ukraine; **Yu. I. Moroz**, Ph.D., assoc. prof., Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine; **P. D. Andrienko**, Sc.D., prof., Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia, Ukraine; **I. M. Kotsur**, Ph.D, assoc. prof., Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia, Ukraine; **Nazarova**, Ph.D., assoc. prof., Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia, Ukraine; **Yu.S. Bezverkhnia**, Ph.D., assoc. prof., Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia, Ukraine.

M. O. Poliakov, Sci.D., assoc. prof., Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia, Ukraine; **N. I. Furmanova**, Ph.D., assoc. prof., Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia, Ukraine; **A. V. Parkhomenko**, Ph.D., assoc. prof., Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia, Ukraine; **S. V. Shcherbovskykh**, Sc.D., assoc. prof., Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine; **V. V. Martynyuk**, Sc.D., prof., Khmelnytsky National University, Khmelnytsky, Ukraine; **V. V. Kochan**, Ph.D., assoc. prof., Ternopil National Economic University, Ternopil, Ukraine; **L. S. Globa**, Sc.D. prof., Kyiv Polytechnic National Technical University, Kyiv, Ukraine; **M. A. Skulish**, Ph.D., assoc. prof., Kyiv Polytechnic National Technical University, Kyiv, Ukraine.

The journal included in the international scientometric databases, catalogs and search systems: Index Copernicus; CrossRef; Directory of Open Access Journals (DOAJ); Google Academy; OpenAIRE; Public Knowledge Project (PKP); ResearchBib - Academic Resource Index; Scientific Indexing Services (SIS); Ulrich's Periodicals Directory; WorldCat; Scientific Periodicals of Ukraine — the project of the National Library of Ukraine named V.I. Vernadsky (NBUV).

The scientific journal publishes the results of fundamental and applied research, in particular the results of dissertation papers for obtaining the scientific degrees of a Sci.D. and a Ph.D. of technical sciences in the field of electrical engineering and electrical engineering in accordance with the headings: 1. Electrical engineering; 2. Power engineering; 3. Automation and computer integrated technologies.

The journal is distributed by the Catalog of periodicals of Ukraine (subscription index – 22913)

Founder and editor:

Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia. Certificate of publisher Civil Code №6952 dated October 22, 2019.

Registration of an entity in the field of print media:

Decision of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No. 3040 of November 7, 2024. Media ID: R30-05581.

Journal was registered:

by the Ministry of Justice of Ukraine. Registration number KV № 24219-14059 PR dated November 7, 2019.

Address of editor and editorial office:

Zaporizhzhia Polytechnic National University, Universitets'ka 64 st., Zaporizhzhia, 69063, Ukraine. Phone: +380(61)769-82-96 Fax: (061) 764-21-41 e-mail: rvv@zntu.edu.ua.

E-address: <http://ee.zntu.edu.ua>; **E-mail:** etae@ukr.net

Computer layout Dyachenko O.O. Editor of English texts Voitenko S.V. The journal was signed on December 15, 2025 on the recommendation of the academic council of the Zaporizhzhia Polytechnic National University (Protocol No.6 dated December 23, 2025). Sheet size 60x84/8. Cond. Print. Sheets 7,44. Number of copies printed 300. Rep. № 1097.

ЗМІСТ

I ЕЛЕКТРОТЕХНІКА

Близняков О.В., Зіновкін В.В., Близняков Д.О.

Методика моделювання сталого теплового режиму струмопровідних систем електричних та електронних апаратів.....7

Омар Т. Тауфик, М'ясар С. Алаттар

ПІ-регулятор для керування швидкістю двигуна постійного струму з окремим збудженням, що живиться від подвійного понижувального перетворювача.....15

Савченко О.В., Шарейко Д.Ю., Білюк І.С., Мардзявко В.А.

Оптимізація систем автоматичного керування електроприводом постійного струму із використанням нелінійних коригувальних пристроїв.....21

Гізенко М.Д., Лукаш Д.В., Швед А.С.

Вдосконалення математичних моделей електромеханічних перетворювачів змінного струму.....31

Бут Д.Р., Климов О.Ф., Тиховод С.М., Козлов В.В.

Систематична методика розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах класичним методом.....39

Плахтій О.А., Домнін І.Ф., Багач Р.В., Латвинський В.Д.

Аналіз обмежень лінеаризації та автоматизований синтез регулятора вихідної напруги понижуючого імпульсного перетворювача з шімом в MATLAB/SIMULINK.....47

II ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКА

Шамрай А.Є., Ісаєв І.В.

Оцінка мінімального рівня вищих гармонік струму однофазного замикання на землю у компенсованих мережах 6-10 кВ.....57

CONTENTS

I ELECTRICAL ENGINEERING

Blyzniakov O.V., Zinovkin V.V., Blyzniakov D.O.

Methodology for modeling steady state thermal behavior of current-carrying systems of electrical and electronic apparatus.....7

Omar T. Tawfeeq, Myasar S. Alattar

PI controller for speed control of separately excited dc motor supplying from dual buck converter.....15

Savchenko O.V., Shareyko D.U., Biliuk I.S., Marziavko V.A.

Optimization of automatic control systems for DC electric drives using nonlinear correction devices.....21

Hizenko M.D., Lukash D.V., Shved A.S.

Enhancement of mathematical models for ac electromechanical converters.....31

But D.R., Klymov A.F., Tikhovod S.M., Kozlov V.V.

Systematic methodology for calculating transient processes in linear electric circuits by the classical method.....39

Plakhtii O.A., Domnin I.F., Bahach R.V., Latvynskiy V.D.

Analysis of linearization limit conditions and automated synthesis of the output voltage regulator of a pwm-buck converter in MATLAB/SIMULINK.....47

II POWER ENGINEERING

Shamrai A. E., Isaiev I.V.

Estimation of the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current in compensated 6–10 kv networks.....57

МЕТОДИКА МОДЕЛЮВАННЯ СТАЛОГО ТЕПЛОВОГО РЕЖИМУ СТРУМОПРОВІДНИХ СИСТЕМ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА ЕЛЕКТРОННИХ АПАРАТІВ

- БЛИЗНЯКОВ О.В. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри «Електричні та електронні апарати» НУ «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-0927-3846>, e-mail: blizn1953@gmail.com;
- ЗІНОВКІН В.В. д-р техн. наук, професор, професор кафедри «Електропривод та автоматизація промислових установок» НУ «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7667-0658>, e-mail: znvvv@ukr.net;
- БЛИЗНЯКОВ Д.О. аспірант кафедри «Електричні машини» НУ «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-1535-9524>, e-mail: adndouble@gmail.com

Мета роботи. Розробити методику побудови моделей стаціонарного теплового режиму струмопровідних систем електричних апаратів, а також пристроїв силової електроніки та перетворювальної техніки.

Методи дослідження. Розробка методики проведена з використанням методів аналізу та синтезу струмоведучих систем апаратів, а також класичних методів вирішення диференціальних рівнянь.

Отримані результати. Аналіз структури струмоведучих систем реальних електричних та електронних апаратів показав, що вони містять певний набір характерних струмоведучих елементів, а саме: провідники з постійним поперечним перерізом (стрижні певної довжини або напівбезкінечні); контакти різних типів, силові напівпровідникові прилади. Ці елементи мають певну математичну модель, яка встановлює їх граничні параметри: температури та теплові потоки у стаціонарному тепловому режимі. Використовуючи властивість безперервності температурного поля є можливість побудувати математичну модель струмоведучої системи досить складної структури, яка містить вказані вище струмоведучі елементи. Надано приклад побудовання теплової моделі контактної системи вибірника пристрою регулювання напруги трансформатора.

Наукова новизна. Розроблено методику побудови математичних моделей стаціонарного теплового режиму струмопровідних систем апаратів, які містять різні струмопровідні елементи: провідники, контакти та силові напівпровідникові прилади.

Практична цінність. Запропонована методика дозволяє побудувати математичну модель струмопровідної системи апарата, яка, у свою чергу, дає можливість визначити її стаціонарний тепловий режим з урахуванням конфігурації системи.

Ключові слова: струмопровідна система; тепловий режим; струмопровідний елемент; нагрівання; перевищення температури; тепловий потік.

І. ВСТУП

Відомо, що струмопровідні системи електричних та електронних апаратів мають, як правило, складну і неоднорідну в тепловому відношенні структуру. Струмопровідний контур комутаційного апарату містить зазвичай кілька провідників, які відрізняються геометричними параметрами (довжина, поперечний переріз), матеріалом, і, відповідно, умовами виділення теплової енергії та розсіювання її в навколишнє середовище. Струмопровідний контур комутаційного апарату містить також комутуючі контакти і контактні з'єднання. Системи силової електроніки та перетворювальної техніки, включаючи безконтактні (напівпровідникові) комутаційні апарати, містять силові напівпровідникові прилади (СНП), які, як відомо, є концентрованими (зосередженими в невеликих обсягах) джерелами теплової енергії і, відповідно, вимагають спеціальних систем охолодження.

У той же час, у практиці проектування струмопровідних систем силового електричного та електронного обладнання апаратів аналіз теплових режимів у

номінальному режимі проводять, використовуючи найпростіші моделі. Однією з таких моделей є струмопровідна система, що складається з двох напівбезкінечних стрижнів, що контактують торцевими поверхнями [1]. При проектуванні силових електронних апаратів визначення теплового режиму силових напівпровідникових приладів найчастіше проводять з урахуванням лише теплового опору охолоджувачів (радіаторів) [2]. При цьому не враховується передача тепла у струмоведучі частини, що не зовсім правильно відображає фізичну модель теплового режиму.

Такі моделі не враховують неоднорідність струмопровідної системи і можуть використовуватись лише для попередніх розрахунків, що проводяться на ранніх стадіях проектування обладнання (вибір контактної напруги, матеріалу струмопровідних частин, їх розмірів, параметрів охолоджувачів для СНП тощо). На пізніших стадіях проектування, коли здійснюється розробка робочих креслень деталей і вузлів, виготовлення та випробування макетів та дослідних зразків апарату, потрібні моделі, що враховують стру-

ктуру та, відповідно, неоднорідність струмопровідної системи. На цих етапах, як правило, вносяться певні зміни до конструкції струмопровідної системи (без зміни її структури), які можуть призвести до істотної зміни її теплового режиму. Відповідно, проводяться багаторазові випробування на нагрів у номінальному режимі, які є дуже витратними як за часом, так і за фінансовими ресурсами, що призводить до значних економічних втрат і, зрештою, можуть виявитися не-ефективними.

Отже, вельми корисним може бути поєднання випробувань макетів на нагрів (у номінальному режимі) і проведення перевірочних розрахунків з використанням моделі, що максимально враховує структуру струмопровідної системи, що розроблюється. Такий підхід дозволив би оцінити тепловий режим великої кількості варіантів конструкцій струмопровідної системи і при цьому значно знизити витрати на проведення випробувань на нагрівання і, зрештою, вийти на оптимальний варіант конструкції.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Відомо, що в неоднорідних струмопровідних системах теплопередача відбувається не тільки в радіальному напрямку від струмопровідних частин в навколишнє середовище, але і в осьовому від більш нагрітих струмопровідних елементів до менш нагрітих. Урахування виникаючих зрівняльних теплових потоків робить практично нездійсненним завдання отримання простих виразів для інженерного розрахунку нагріву неоднорідних у тепловому відношенні струмопровідних систем.

Проте, існують видання, в яких надано певні методи, що дозволяють розрахувати тепловий режим неоднорідних провідників; зокрема, надані формули для розрахунку нагріву провідника змінного перерізу [3, 4]. Загальним недоліком запропонованих методів розрахунку є їхнє обмежене застосування, а саме, вони можуть бути використані лише для струмопровідних систем, що не містять концентрованих джерел тепла (комутуючі контакти, контактні з'єднання, СПП тощо).

Існує також методика, яка дозволяє розрахувати перевищення температур поблизу контактних точок струмопровідної системи пристрою регулювання напруги трансформатора, що містить ковзний контактний вузол [5]. Проте, зазначена методика розрахунку може бути застосована лише для єдиного конкретного випадку і не враховує повною мірою неоднорідність струмопровідної системи та наявність контактних з'єднань, які вона містить.

Низка сучасних публікацій присвячена, головним чином, аналізу теплових режимів кабельних ліній для передачі електроенергії. Зокрема, у статті [6] надано аналіз теплового режиму трифазної кабельної лінії, що розташована у ґрунті, з застосуванням програми COMSOL (FEMLAB). Статті [7–9] присвячені теоретичним дослідженням температурного поля та

навантажувальної спроможності трифазних кабельних ліній при різних способах прокладки силового кабелю: безпосередньо під землею, у траншеї та у трубі. Відповідно до реальної технології прокладки кабелю побудовано двомірні теоретичні моделі з використанням рівняння теплопровідності, які реалізовані за допомогою програмного забезпечення COMSOL Multiphysics. Матеріали досліджень [10] містять аналіз температурних характеристик високовольтних кабельних (контактних) з'єднань, розташованих у вибухонебезпечних оболонках. Зокрема, досліджується вплив різних наповнювачів та співвідношення наповнення в оболонці на навантажувальну спроможність кабельних з'єднань.

Слід відзначити, що кабельні лінії, в тому числі і кабельні з'єднання є по суті однорідними провідниками. Відзначені вище дослідження розглядають двомірне температурне поле у поперечному перерізі лінії, оскільки температурне поле вздовж кабельної лінії вважається однорідним. Отже, задача побудови математичних моделей неоднорідних струмоведучих систем є актуальною.

III. МЕТА РОБОТИ

Зазначимо, що скласти універсальну модель неоднорідної системи дуже складно, оскільки структура струмоведучої системи залежить від типу апарата та багатьох інших факторів. Слід додати, що струмоведучі системи апаратів окрім провідників, містять концентровані джерела тепла, а саме комутуючі контакти, контактні з'єднання, а також силові напівпровідникові прилади.

Таким чином, метою даного дослідження є розробити методику побудови моделей стаціонарного теплового режиму струмопровідних систем електричних апаратів, а також пристроїв силової електроніки та перетворювальної техніки.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГУ МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Побудова математичної моделі неоднорідної струмоведучої системи полягає в наступному. Система розбивається на ряд характерних елементів (ділянок). Такими елементами є, по-перше, струмоведучі елементи, які мають однаковий поперечний переріз та однакові умови віддачі тепла у навколишнє середовище. Струмопровідні елементи можуть мати певну довжину або бути напівнескінченими. Елементами струмоведучої системи можуть бути також комутуючі контакти, контактні з'єднання та силові напівпровідникові прилади. Для кожного елемента (ділянки) визначаються зрівняльні теплові потоки на їх межах і, використовуючи умову безперервності температурного поля, складається необхідне число алгебраїчних рівнянь, вирішення яких дає перевищення температур на межах ділянок і розподіл температур по всій струмопровідній системі. Визначення зрівняльних тепло-

вих потоків здійснюється на основі існуючих математичних моделей вказаних елементів (ділянок) струмопровідних систем апаратів [1–4, 11–17].

Відомо, що стаціонарний тепловий режим провідника з незмінним поперечним перерізом і однорідними умовами теплообміну з навколишнім середовищем, що визначається розподілом температури по його довжині, описується диференціальним рівнянням другого порядку [4, 12, 13]:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + b^2(\vartheta - \vartheta_{\text{уст}}) = 0 \quad (1)$$

де $\vartheta_{\text{уст}}$, b – коефіцієнти рівняння, що визначаються параметрами струмопровідного елемента:

$$\vartheta_{\text{уст}} = \frac{I^2 \rho_0 \kappa_{\text{д}} + \vartheta_0}{\frac{q}{r_{\text{т}\Sigma}} - I^2 \rho_0 \kappa_{\text{д}} \alpha}; \quad b = \sqrt{\frac{1}{\lambda q} \left(\frac{1}{r_{\text{т}\Sigma}} - \frac{I^2 \rho_0 \kappa_{\text{д}} \alpha}{q} \right)}, \quad (2)$$

де I – тривалий струм навантаження провідника; $\kappa_{\text{д}}$ – коефіцієнт додаткових втрат у провіднику; q – площа поперечного перерізу провідника; $\vartheta_{\text{уст}}$ – температура довкілля, °C; $r_{\text{т}\Sigma}$ – середній по довжині провідника питомий тепловий опір між поверхнею провідника та навколишнім середовищем; λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу провідника; ρ_0 – питомий електричний опір матеріалу провідника за 0°C; α – температурний коефіцієнт опору матеріалу провідника.

Диференційне рівняння (1), строго кажучи, є нелінійним внаслідок температурної залежності теплопровідності та питомого опору матеріалу провідників, а також теплового опору провідник–навколишнє середовище. Отже коефіцієнти $\vartheta_{\text{уст}}$ та b залежить від температури на поверхні провідника. Якщо ці залежності у першому наближенні не враховувати, то рішення рівняння (1) може бути отримано класичним методом в залежності від типу граничних умов. Зокрема, для струмопровідного елемента певної довжини l , рис. 1, граничні умови визначаються температурами на його межах:

$$\vartheta(0) = \vartheta_1; \quad \vartheta(l) = \vartheta_2 \quad (3)$$

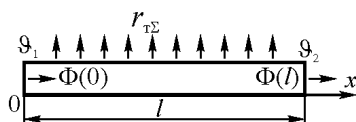


Рисунок 1. Струмопровідний елемент певної довжини

Рішення рівняння (1) з урахуванням граничних умов (3) матиме такий вигляд:

$$\vartheta = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_{\text{уст}}) \operatorname{sh}[a(l-x)] + (\vartheta_2 - \vartheta_{\text{уст}}) \operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} al} + \vartheta_{\text{уст}} \quad (4)$$

Використовуючи закон теплопровідності Фур'є, вирази для зрівняльних теплових потоків на межах струмопровідного елемента можуть бути записані таким чином:

$$\Phi(0) = u\vartheta_1 - v\vartheta_2 + s; \quad \Phi(l) = v\vartheta_1 + u\vartheta_2 - s, \quad (5)$$

$$\text{де } u = a\lambda q \frac{\operatorname{ch} al}{\operatorname{sh} al}; \quad v = \frac{a\lambda q}{\operatorname{sh} al}; \quad s = \vartheta_{\text{уст}}(v - u).$$

Для напівнескінченного струмопровідного елемента, рис. 2, граничні умови виражаються наступним чином:

$$\vartheta(0) = \vartheta_{\text{н}}; \quad \vartheta(\infty) = \vartheta_{\text{уст}}; \quad \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=\infty} = 0. \quad (6)$$

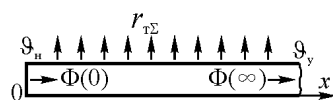


Рисунок 2. Напівнескінченний струмопровідний елемент

Розподіл температури по довжині елемента описуватиметься наступним виразом:

$$\vartheta = (\vartheta_{\text{н}} - \vartheta_{\text{уст}}) e^{-ax} + \vartheta_{\text{уст}}. \quad (7)$$

Зрівняльний тепловий потік на межі елемента:

$$\Phi(0) = a\lambda q(\vartheta_{\text{н}} - \vartheta_{\text{уст}}). \quad (8)$$

Стаціонарний тепловий режим контакту, що визначається розподілом температури в межах області стягування, для сферичної моделі описується наступним диференціальним рівнянням [1, 12–14, 16, 17]:

$$\frac{d^2\tau}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\tau}{dr} + \frac{I^2 \rho}{4\pi^2 \lambda r^2} = 0. \quad (9)$$

Граничні умови для області стягування контакту, що утворюється контакт-деталлями, виконаними з різних матеріалів, матимуть наступний вигляд:

$$\begin{cases} \tau_1(\infty) = \tau_{\text{к1}}; & \tau_2(\infty) = \tau_{\text{к2}}; & \tau_1(a) = \tau_2(a) = \tau_{\text{к.пл}}; \\ -2\pi\lambda_1 r^2 \frac{d\tau_1}{dr} \Big|_{r=\infty} - 2\pi\lambda_2 r^2 \frac{d\tau_2}{dr} \Big|_{r=\infty} = I^2 R_{\text{к}}. \end{cases} \quad (10)$$

де τ_1 , τ_2 – перевищення температур в області стягування струмопровідних елементів, які утворюють контакт; $\tau_{\text{к1}}$, $\tau_{\text{к2}}$ – перевищення температур на межах області стягування контакту; a – радіус контактної площинки; $R_{\text{к}}$ – опір контакту.

Опір контакту, який утворюється струмопровідними елементами, виготовлених з різномірних матеріалів відповідно до сферичної моделі буде визначається за наступною формулою:

$$R_k = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\pi a}, \quad (11)$$

де ρ_i , λ_i – питомий електричний опір та коефіцієнт теплопровідності, відповідно, матеріалів контакту (на ділянках струмопровідної системи в області стягування ліній струму).

Рішення диференційного рівняння (9) з граничними умовами (10) дає вирази для зрівняльних теплових потоків на межах області стягування контакту:

$$\begin{cases} \Phi_1(\infty) = s_1 - s_{12}(\tau_{k1} - \tau_{k2}); \\ \Phi_2(\infty) = s_2 + s_{12}(\tau_{k1} - \tau_{k2}). \end{cases} \quad (12)$$

де

$$\begin{cases} s_1 = \frac{I^2 R_k}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_1 (1 - \lambda_2 G_{12}); \\ s_2 = \frac{I^2 R_k}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_2 (1 - \lambda_1 G_{12}); \\ s_{12} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\rho_1 + \rho_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2) R_k}; \\ G_{12} = \frac{1}{2(\rho_1 + \rho_2)} \left(\frac{\rho_2}{\lambda_2} - \frac{\rho_1}{\lambda_1} \right). \end{cases} \quad (13)$$

Перевищення температури контактної площинки в цьому випадку визначатиметься відповідно до наступного виразу:

$$\tau_{k,пл} = \frac{I^2 R_k^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)(\rho_1 + \rho_2)} + \frac{\lambda_1 \tau_{k1} + \lambda_2 \tau_{k2}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (14)$$

Тепловий режим силових напівпровідникових приладів, що функціонують під навантаженням у тривалому режимі, як відомо, визначається, головним чином, тепловими опорами їх індивідуальних охолоджувачів. Безумовно, більшість теплової енергії, що виділяється у p - n переході СНП, буде передаватися у довкілля через охолоджувачі. Однак, деяка її частина буде передаватися в струмопровідні частини за допомогою зрівняльних теплових потоків і таким чином тепловий режим СНП впливатиме на тепловий режим інших струмопровідних частин силового електронного апарата.

Для визначення зрівняльних теплових потоків

$$\begin{aligned} s_A &= \frac{R_{thj-cK}}{R_{thj-cK} + R_{thj-cA}} P_T; s_K = \frac{R_{thj-cA}}{R_{thj-cK} + R_{thj-cA}} P_T; \\ u_A &= \frac{1}{R_{th oA}} \left(1 - \frac{R_{thj-cK}}{R_{thj-cK} + R_{thj-cA}} \right) + \frac{1}{R_{thj-cA}}; u_K = \frac{1}{R_{th oK}} \left(1 - \frac{R_{thj-cA}}{R_{thj-cK} + R_{thj-cA}} \right) + \frac{1}{R_{thj-cK}}; \\ v_A &= \frac{R_{thj-cK}}{R_{th oK}(R_{thj-cK} + R_{thj-cA})}; v_K = \frac{R_{thj-cA}}{R_{th oA}(R_{thj-cK} + R_{thj-cA})}; \end{aligned} \quad (17)$$

Аналіз елементів, характерних для електричних та електронних апаратів, може бути продовжений.

скористаємося тепловою схемою заміщення найбільш часто застосовуваних в даний час СНП таблеткової конструкції, що мають двостороннє охолодження, рис. 3.

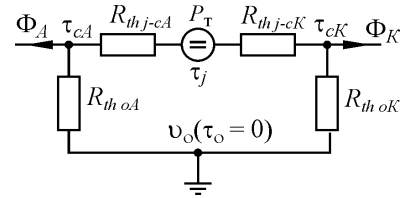


Рисунок 3. Теплова схема заміщення СНП з двостороннім охолодженням

Для наданої схеми справедливі наступні рівняння:

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{\tau_j - \tau_{cA}}{R_{thj-cA}} + \frac{\tau_j - \tau_{cK}}{R_{thj-cK}}; \\ \frac{\tau_j - \tau_{cA}}{R_{thj-cA}} &= \Phi_A + \frac{\tau_{cA}}{R_{th oA}}; \\ \frac{\tau_j - \tau_{cK}}{R_{thj-cK}} &= \Phi_K + \frac{\tau_{cK}}{R_{th oK}}; \end{aligned} \quad (15)$$

де P_T – потужність, що виділяється у p - n переході СНП при тривалому струмі навантаження; τ_j – перевищення температури p - n переходу СНП; τ_{cA} , τ_{cK} – перевищення температур на анодному та катодному виводах корпусу, відповідно; Φ_A , Φ_K – зрівняльні теплові потоки, що надходять у струмопровідні частини, підключені до анода і катода СНП, відповідно; R_{thj-cA} , R_{thj-cK} – усталені теплові опори перехід – анодний вивід корпусу і перехід – катодний вивід корпусу, відповідно, що визначаються за довідковою літературою [2]; $R_{th oA}$, $R_{th oK}$ – теплові опори індивідуальних охолоджувачів, що встановлені на анодному і катодному виводах корпусу СНП, відповідно.

Вирішуючи рівняння (15) відносно зрівняльних теплових потоків, отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} \Phi_A &= s_A - \tau_{cA} u_A + \tau_{cK} v_A; \\ \Phi_K &= s_K - \tau_{cK} u_K + \tau_{cA} v_K, \end{aligned} \quad (16)$$

де

Проте, принцип залишається незмінним. В результаті аналізу теплового режиму струмопровідного елемента необхідно отримати вирази зрівняльних теплових потоків на його межах, які мають бути надані як функції перевищення температур на його межах.

Рішення задачі моделювання сталого теплового режиму струмопровідної системи електричних та електронних апаратів рекомендується здійснювати поетапно у наступній послідовності:

1. Розбити струмопровідну систему апарата на окремі струмопровідні елементи (ділянки), які мають однорідні умови тепловіддачі, однорідний матеріал і відносно просту геометричну конфігурацію.

2. Скласти схему струмопровідної системи, яка повинна містити вказані вище види ділянок. Області стягування контактів та СНП представляються окремими ділянками. Схема повинна містити не тільки струмопровідні елементи апарата, що розглядається, але і струмопровідні частини для підключення його в зовнішнє коло, представляючи їх напівнескінченими ділянками.

3. Використовуючи вирази зрівняльних теплових потоків на межах ділянок, які надані виразами (12) та (16), а також умови безперервності температурного поля вздовж струмопровідної системи, складається система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка по суті буде являти собою математичну модель струмопровідної системи апарата. Невідомими системи рівнянь будуть перевищення температур на межах ділянок.

4. Як зазначалось, вихідні диференціальні рівняння (1) та (9) є нелінійними, отже перевищення температур рекомендується визначати шляхом послідовних наближень. Спочатку задаються початкові значення перевищення температур, потім у циклічному режимі вирішується система рівнянь до отримання сходження перевищень температур на межах ділянок.

5. Використовуючи вирази розподілу температур для струмопровідних елементів (4) і (7), а також вирази для визначення перевищення температур контактних площин (14) і p - n переходів СНП (15), визначається розподіл температури по довжині струмопровідної системи.

Необхідно відзначити, що адекватність отриманої моделі багато в чому буде визначатись відповідністю теплової схеми заміщення реальним процесам теплообміну в струмопровідній системі. Отже, складання структурної схеми (виділення ділянок) та теплових схем заміщення на ділянках є одним із ключових та відповідальних етапів складання моделі стру-

мопровідної системи апарата.

Як приклад, розглянемо процес складання моделі стаціонарного теплового режиму контактної системи вибірнику пристрою регулювання напруги силового трансформатора під навантаженням (РПН), структура якої надана на рис. 4.

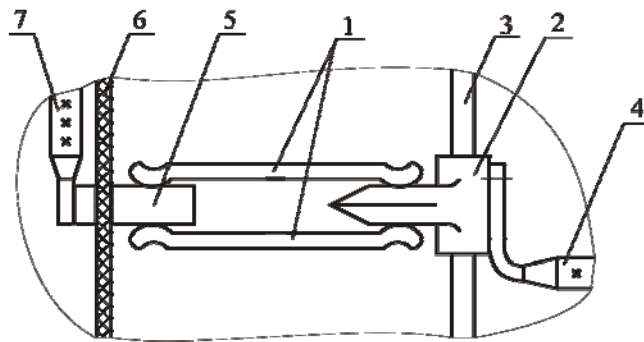


Рисунок 4. Струмопровідна система вибірнику пристрою РПН

Система містить наступні елементи: ламелі 1; нерухомий контакт 2, закріплений на ізоляційній стойці 3, до якого підключається струмопровід 4, що з'єднує вибірник з регулювальною обмоткою трансформатора; струмознімальне кільце 5, закріплене на ізоляційному циліндрі 6; до кільця підключається струмопровід 8, що з'єднує вибірник з контактором.

Очевидно, що надана система має неоднорідну і досить складну структуру, яка містить провідники, комутуючі контакти та контактні з'єднання. Отже, вона може бути поділена на окремі ділянки, які мають певні та незмінні властивості: геометричну конфігурацію; матеріал, щільність струму; умови генерації теплової енергії та розсіювання її у довкілля. За результатами поділення на ділянки складається теплова схема заміщення, яка показана на рис. 5.

Схема заміщення містить провідники: 1 – струмопровід, що з'єднує вибірник з контактором 7 (див. рис.4); 4 – струмознімальне кільце 5 (див. рис. 4); 7 – ламелі 1 (див. рис. 4); 10 – нерухомий контакт 2 (див. рис. 4); 13 – струмопровід, що з'єднує вибірник з трансформатором 4 (див. рис. 4). Слід відзначити, що провідники 4, 7 та 10 мають певну довжину; провідники 1 та 13 є напівнескінченими струмопроводами.

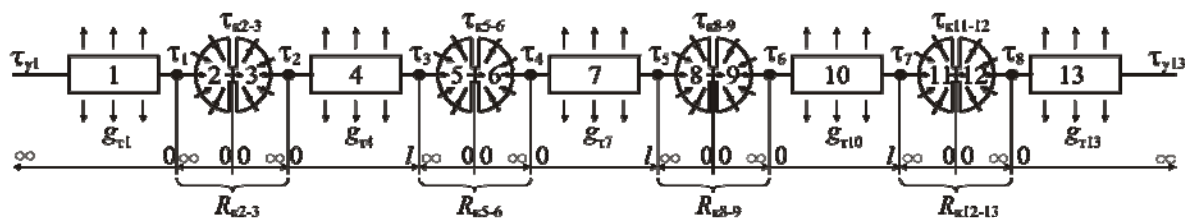


Рисунок 5. Теплова схема заміщення струмопровідної системи вибірного пристрою РПН

Схема заміщення містить також комутуючі контакти і контактні з'єднання, представлені областями стягування контактів, які відображені сферичними моделями: **2-3** – контактне з'єднання між ділянками 1 та 4; **5-6** – ковзний контакт між ділянками 4 та 7; **8-9** – комутуючий контакт між ділянками 7 та 10; **11-12** – контактне з'єднання між ділянками 10 та 13.

Для складання моделі мають бути надані вирази для теплових потоків на межах ділянок у відповідності до формул (5), (8) та (12) та складені рівняння у відповідності до властивості безперервності температурного поля:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(0) &= \Phi_2(\infty); \Phi_3(\infty) = \Phi_4(0); \Phi_4(l_4) = -\Phi_5(\infty); \\ \Phi_6(\infty) &= \Phi_7(0); \Phi_7(l_7) = -\Phi_8(\infty); \Phi_9(\infty) = \Phi_{10}(0); \\ \Phi_{10}(l_{10}) &= -\Phi_{11}(\infty); \Phi_{12}(\infty) = \Phi_{13}(0). \end{aligned} \right\}$$

Таким чином має бути складена система рівнянь відносно перевищень температур у вузлових точках наступного вигляду:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau_2 &= b_1 \\ a_{21}\tau_1 + a_{22}\tau_2 + a_{23}\tau_3 &= b_2 \\ \\ a_{76}\tau_6 + a_{77}\tau_7 + a_{78}\tau_8 &= b_7 \\ a_{87}\tau_7 + a_{88}\tau_8 &= b_8 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Рішення отриманої системи має дати перше наближення перевищень температур у вузлових точках (тобто, на межах ділянок і областей стягування. Остаточні значення перевищення температур мають бути отримані послідовними наближеннями.

Спочатку мають бути задані початкові значення, які використовуються для розрахунку сумарних теплових опорів r_{ti} (або теплових провідностей g_{ti}) між поверхнею провідників та оточуючим середовищем, а також відповідних коефіцієнтів системи рівнянь. Потім, знов вирішується система рівнянь (18) та визначаються нові наближення перевищень температур на межах ділянок до отримання певного результату щодо сходження обчислювального процесу.

За результатами розрахунку перевищень температур у вузлових точках, за виразами (4), (7) та (14) можуть бути визначені перевищення температур у контактних точках та розподіл перевищення темпера-

тур по довжині струмопровідної системи.

V. ВИСНОВКИ

Надана загальна методика складання математичних моделей неоднорідних струмопровідних систем електричних та електронних апаратів будь-якої конфігурації, які у загальному випадку містять характерні різновиди струмопровідних елементів: провідники, а також концентровані джерела теплової енергії: контакти та силові напівпровідникові прилади.

Використовуючи існуючі математичні моделі струмопровідних елементів, отримані вирази граничних теплових потоків, які при використанні властивості безперервності температурного поля дозволяють побудувати систему алгебраїчних рівнянь та, відповідно, математичну модель струмопровідної системи певної конфігурації.

Надано приклад складання математичної моделі ламельного контактного вузла вибірни́ка пристрою регулювання напруги силового трансформатора

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Основы теории электрических аппаратов: Учеб. для вузов/Под ред. И.С. Таева. – М.: Высшая школа, 1987. – 496 с.
- [2] Чебовский О.Г., Моисеев Л.Г., Недошивин Р.П. Силовые полупроводниковые приборы: Справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 400 с.
- [3] Буткевич Г.В., Дегтярь В.Г., Сливинская А.Г. Задачник по электрическим аппаратам. – М.: Высшая школа, 1987. – 232 с.
- [4] Справочник по расчету и конструированию контактных частей силовых аппаратов/Н.М. Адоньев, В.В. Афанасьев, В.Б. Борисов и др. Под ред. В.В. Афанасьева. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. 384 с.
- [5] Богданов Л. Д. и др. Методика расчета на нагрев контактных систем переключающих устройств трансформаторов/ Электротехническая промышленность. Аппараты высокого напряжения, трансформаторы, силовые конденсаторы. 1978. Вып. 1(81). – С. 8–12.
- [6] Karahan M., Varol S. H., Kalenderli Ö. Thermal (2009.) Analysis of Power Cables Using Finite El-

- ement Method and Current-carrying Capacity Evaluation. Int. J. Engng Ed. 25, 6, 1158–1165.
- [7] Jehan, H. S., Mohamed, A. M., Doaa K. I., Essam E. Z. (2017). Thermal analysis of high-voltage cables with several types of insulation for different configurations in the presence of harmonics. IET Generation, Transmission & Distribution. 11, 14, 3439–3448. DOI: 10.1049/iet-gtd.2016.0862
- [8] Nie, Y.; Chen, D., Zheng, S., Xu, X., Wang, X. and Wu, Z. (2024). Simulation and Calculation of Temperature Field and Current-Carrying Capacity of Power Cables under Different Laying Methods. Energies, 17, 4611. <https://doi.org/10.3390/en17184611>
- [9] El-Faraskoury, A., Ghoneim, S., Alaboudy A. K., Salem R., Ward, S. A. (2012). Practical and Theoretical Investigation of Current Carrying Capacity (Ampacity) of Underground Cables. Advances in Electrical Engineering Systems. 1, 3, 163–169. ISSN 2167-633X
- [10] Yong X, Xin Z, Ke Z and Feiyue T. (2025). Investigation on temperature characteristics of high voltage cable joints. Frontiers in Physics. 13:1584225, doi: 10.3389/fphy.2025.1584225
- [11] Andrienko, P.D. Switching Transients in Electrical and Electronic Apparatus / P.D. Andrienko, O. V. Blyzniakov, M.I. Kotsur – Zaporizhzhia: NU «Zaporizhzhia polytechnic», 2021. – 128 p. ISBN 978-617-529-309-6.
- [12] Blyzniakov O.V. Thermal Behavior Analysis of Power Electric and Electronic Equipment: textbook = Аналіз теплових режимів силового електричного та електронного обладнання: Начальний посібник – Запоріжжя : ЗНТУ, 2014. – 146 с.
- [13] Рассальський О.М. Аналіз і розрахунок теплових режимів силового електроустаткування: Начальний посібник/ О.М. Рассальський. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2005. – 146 с.
- [14] Slade P.G. Electrical Contacts: Principles and Applications / Edited by Paul G. Slade, CRC Press Taylor & Francis Group, LLC, 2014. – 1257 p.
- [15] Sueker, Keith H. Power electronics design: a practitioner's guide. – USA: Newnes is an imprint of Elsevier, 2005. – 272 p.
- [16] Electrical contacts: Fundamentals, applications and Technology / Milenko Braunovich, Nikolai K. Myshkin, Valery V. Konchits, CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, 2007. – 660 p.
- [17] Schlegel, S., Gatzsche, M., Hidmann, Ch., Israel T. (2024). Contact and Long-Term Behavior of Current-Carrying Connections in Electrical Engineering. Springer Berlin, Heidelberg, XXIX, 283. DOI: 10.1007/978-3-662-69644-6

Надійшла (Received) 15.05.2025;

Прийнята (Accepted) 17.08.2025;

Опублікована (Published) 26.12.2025;

METHODOLOGY FOR MODELING STEADY STATE THERMAL BEHAVIOR OF CURRENT-CARRYING SYSTEMS OF ELECTRICAL AND ELECTRONIC APPARATUS

BLYZNIAKOV O.V. Ph.D, Associate professor, Associate professor of the electric and electronic apparatus department of the National University “Zaporizhzhia polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-0927-3846>, e-mail: blizn1953@gmail.com;

ZINOVKIN V.V. Sci.D, Professor, Professor of the electric drive and automatic electric installations department of the National University “Zaporizhzhia polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7667-0658>, e-mail: znvvv@ukr.net;

BLYZNIAKOV D.O. Postgraduate student of the electrical machines department of the National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, <https://orcid.org/0009-0000-1535-9524>, e-mail: adndouble@gmail.com

Purpose. Develop a procedure for constructing models of the stationary thermal behavior of current-carrying systems of electrical and power electronic apparatus.

Methodology. The development of the procedure was carried out using methods of analysis and synthesis of current-carrying systems of apparatus, as well as classical methods to solve differential equations.

Findings. Structural analysis of the current-carrying systems of real electrical and power electronic apparatus has shown that they contain a certain set of typical current-carrying components, namely, conductors of invariable cross-sectional area (rods of a certain length or semi-infinite ones); contacts of various types, power semiconductor devices. These components have a certain mathematical model that establishes their boundary parameters: temperatures and heat flows in a stationary thermal behavior. Using the property of temperature field continuity, it is possible to construct a mathematical model of a current-carrying system of a rather complex structure, which contains the foregoing current-carrying components.

Originality. A methodology has been developed for constructing mathematical models of the stationary thermal behavior of current-carrying systems of apparatus that contain various current-carrying components: conductors, contacts, and power semiconductor devices.

Practical value. The proposed methodology enables us to construct a mathematical model of the current-carrying

system of the apparatus, which, in turn, makes it possible to determine its stationary thermal behavior with consideration of the system configuration.

Keywords: current-carrying system; thermal behavior; current-carrying component; heating; temperature-rise; heat flow

REFERENCES

- [1] Osnovy teorii elektricheskikh apparatov: Ucheb. dlja vuzov. Pod red. I.S. Taeva. (1987). M. Vysshaja shkola, 496
- [2] Chebovskij O.G., Moiseev L.G., Nedoshivin R.P. (1985). Silovye poluprovodnikovye pribory: Spravochnik. M. Energoatomizdat, 400.
- [3] Butkevich G.V., Degtjar' V.G., Slivinskaja A.G. (1987). Zadachnik po elektricheskim apparatam. – M.: Vysshaja shkola, 232.
- [4] Spravochnik po raschetu i konstruirovaniyu kontaktnykh chastey sil'notochnykh elektricheskikh apparatov. Pod red. V.V. Afanas'eva. (1988). L.: Energoatomizdat, 384.
- [5] Bogdanov L. D. i dr. (1978). Metodika rascheta na nagrev kontaktnykh sistem pereklyuchajushhih ustroystv transformatorov [Procedure for calculation of heating the contact systems of transformer tap-changers]. *Elektrotehnicheskaja promyshlennost'. Apparaty vysokogo napryazhenija, transformatory, silovye kondensatory*, 1(81), 8–12.
- [6] Karahan M., Varol S. H., Kalenderli Ö. (2009). Thermal Analysis of Power Cables Using Finite Element Method and Current-carrying Capacity Evaluation. *Int. J. Engng Ed.* 25, 6, 1158–1165.
- [7] Jehan, H.S., Mohamed, A.M., Doaa K.I., Essam E.Z. (2017). Thermal analysis of high-voltage cables with several types of insulation for different configurations in the presence of harmonics. *IET Generation, Transmission & Distribution*. 11, 14, 3439–3448. DOI: 10.1049/iet-gtd.2016.0862
- [8] Nie, Y.; Chen, D., Zheng, S., Xu, X., Wang, X., Wu, Z. (2024). Simulation and Calculation of Temperature Field and Current-Carrying Capacity of Power Cables under Different Laying Methods. *Energies*, 17, 4611. <https://doi.org/10.3390/en17184611>
- [9] El-Faraskoury, A., Ghoneim, S., Alaboudy A. K., Salem R., Ward, S. A. (2012). Practical and Theoretical Investigation of Current Carrying Capacity (Ampacity) of Underground Cables. *Advances in Electrical Engineering Systems*. 1, 3, 163–169. ISSN 2167-633X
- [10] Yong X, Xin Z, Ke Z and Feiyue T. (2025). Investigation on temperature characteristics of high voltage cable joints. *Frontiers in Physics*, 13:1584225, doi: 10.3389/fphy.2025.1584225
- [11] Andrienko, P.D., Blyzniakov, O. V., Kotsur, M.I. (2021). Switching Transients in Electrical and Electronic Apparatus: Textbook / P.D. Andrienko, – Zaporizhzhia, NU «Zaporizhzhia polytechnic», 128. ISBN 978-617-529-309-6.
- [12] Blyzniakov O. V. (2014). Thermal Behavior Analysis of Power Electric and Electronic Equipment: Textbook. Zaporizhzhia, ZNTU, 146.
- [13] Rassal's'kyj O.M. (2005). Analiz i rozrahunok teplovykh rezhymiv sylovogo elektroustatukvannja: Navchal'nyj posibnyk. Zaporizhzhia, ZNTU, 146.
- [14] Slade P.G. (2014). Electrical Contacts: Principles and Applications / Edited by Paul G. Slade, CRC Press Taylor & Francis Group, LLC, 1257.
- [15] Sueker, Keith H. (2005). Power electronics design: a practitioner's guide. USA, Newnes is an imprint of Elsevier, 272.
- [16] Braunovich, M., Myshkin, N.K., Konchits, V.V. (2007). Electrical contacts: Fundamentals, applications and Technology. CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, 660.
- [17] Schlegel, S., Gatzsche, M., Hidmann, Ch., Israel T. (2024). Contact and Long-Term Behavior of Current-Carrying Connections in Electrical Engineering. Springer Berlin, Heidelberg, XXIX, 283. DOI: 10.1007/978-3-662-69644-6

PI CONTROLLER FOR SPEED CONTROL OF SEPARATELY EXCITED DC MOTOR SUPPLYING FROM DUAL BUCK CONVERTER

OMAR T. TAWFEEQ

Master, Lecturer at the College of Engineering , University of Mosul, Mosul, Iraq,
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2894-1175>, e-mail:
omartawfeeq_1981@uomosul.edu.iq;

MYASAR S.ALATTAR

Ph.D, Lecturer at the College of Engineering, University of Mosul, Mosul, Iraq,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7811-9683>, e-mail:
myasaralaatar@uomosul.edu.iq;

Purpose. The primary objective of this revision is to adjust the speed and overall performance of a separately excited direct current motor by implementing a traditional controller route that incorporates a Proportional-Integral (PI) controller. The objective of the present scheme is to verify the precise functionality of the motor by means of the dynamic regulation of the two input currents, which are sourced from two separate direct current (DC) power supplies. The objective of the present study is to apply the PI controller to achieve stable and effective performance, especially under variable load conditions, thereby reducing oscillations in speed and enhancing the motor's response to dynamic vagaries. This tactic has been demonstrated to enhance the motor's flexibility, rendering it particularly well-suited for scenarios that demand high-precision motion control. The research demonstrates the efficacy of the PI controller in preserving optimal operational parameters, thereby enhancing energy efficiency and system dependability.

Methodology. The design methodology of the Proportional-Integral (PI) controller is based on exact principles, with the aim of improving motor operation by defining the model controller parameters. This method guarantees the optimal system performance by means of successful adjustment of current inputs, with the objective of minimizing fluctuations and enhancing response stability. The tuning procedure involves the selection of appropriate proportional and integral gains, with a view to maintaining a balance between speed control and dynamic flexibility. The efficacy of the PI controller is enhanced by systematic parameter optimization, resulting in improved efficiency, reduced steady-state error, and enhanced transient response. Consequently, the controller is well-suited for applications that demand precise motor control.

Findings. The PI controller design increases separately the excited dc motor stability and regulates its speed.

Originality. This research introduces a modified control routine for a dual buck DC-DC converter, whereby one converter supplies power to the armature motor circuit, while the second provides power to the flux circuit. The originality of the work lies in the application of a devoted control system on the second converter, which has been built to adjust the flux current. It is evident that by controlling the flux current, the controller enhances the magnetic field stability.

Keywords: dc-dc buck converter, separately excited dc motor, speed control, dual.

I. INTRODUCTION

Now a day's power electronics are efficient science that played a great role in various field of life, as example automation, smart grid, industrial process, renewable energy system, as well as electrics vehicle etc. In industrial process and applications, require movement that used dc motor, speed control at different load conditions considered the main challenges faced the customer's. Many researches are introduced for this purpose.

An artificial neural network are implemented to regulate the speed of dc motor it is involved with model reference adaptive controller, the complete scheme developed the overall performance of drive, where the controller regulate the duty cycle of converter thus the voltage of supplied to motor change according to the ratio of variations. This control structure improve the performance under different state of load or transient condition [1].

Another research deals with design, analysis and of

dc-dc Buck converter used proportional –integral – differential controller is proposed, the control strategy for switching power device depend on storing and freeing energy at circuit that represent model operation principle.

Circuit is realized and tested for different values of resistive load to evaluate the controlled buck characteristic. [2] A fuzzy logic controller base on pulse width modulation is expressed on dc-dc buck converter to perform power device switching. Where the strategy providing smooth control for dc motor speed and accurate response for all operation condition even with disturbances presences. [3]. Additional paper discussed speed control of dc motor fed from buck converter where differential flatness control technique used. this strategy is satisfied for all dynamic conditions which faced dc motor [4].

Dc motor supplied from different scheme of power converter consist of full wave bridge rectifier connected to dc-dc buck converter. The whole system is adjusted at open loop control strategy using matlab Simulink. The

research examine the system performance taking account altered factors total harmonics distortion, ripple, efficiency of rectifiers etc. and their effects on buck performance. Also field and load disturbances are considered in performance of bridge performance. Where all mentioned affect the control strategy is taking account for generating signal of firing angle [5].

A proportional –integral –differential control implemented on dc –dc buck converter. The suggested method make regulating the output voltage of buck independently on input voltage. It is modeled using matlab Simulink tools and constructed dependently of transfer function of system. Supporting by practical experiment system is capable to increase the accuracy and decrease overshoot response for different statuses of load variation controller [6].

II. DC-DC BUCK CONVERTER HES

Buck converter is one of the multi- kind of converters family, these family conclude three main type buck, boost and buck boost. The main function of this converter is to reduce or step down voltage at its output. Buck converter involve transistor as switch , inductor ,diode , and capacitor as well as the load connecting at the end side ,figure 1 shown the complete buck scheme. [7], [8], [10].

The operation principle of depends on using PWM technique for switching on and off of mosfet. Switching frequency generation using pwm led to emergence what is called duty cycle (d) ratio which equal to.

$$\text{Duty cycle (d)} = \text{ton}/(\text{ton}+\text{toff}) \quad (1)$$

ton : On time period

toff : Off time period

ton+toff : Operation period

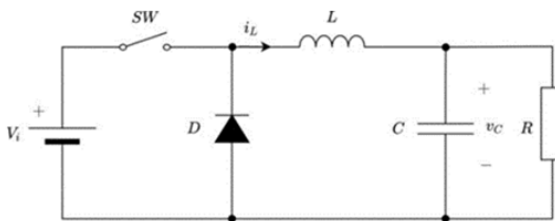


Figure 1. Complete buck circuit with R load

By controlling the mentioned vleue (ton) the output voltage of converter change proportionally with it, that mean increasing duty cycle. Where the output voltage according to the last equation cannot exceed the input voltage value [7], [8], [9].

The equation describe buck converter written as below

$$V_o = d V_{in} \quad (2)$$

:output voltage

V_{in} : input voltage [13]

Figure 2 shows the output voltage.

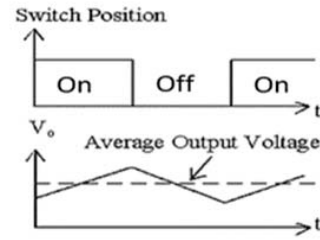


Figure 2. Output and average voltage

$$\Delta V_C = [V_{in} \times d (1 - d)] / 8LC f_2 \quad (3)$$

ΔV_C : ripple voltage on capacitor

$$\Delta I_L = [V_{in} \times d (1 - d)] / f L \quad (4)$$

ΔI_L : changing inductor current

$$I_{Max} = I_o + V_o \text{ toff} / 2 L \quad (5)$$

$$I_{Min} = I_o - V_o \text{ toff} / 2 L \quad (6)$$

I_{Max} , I_{Min} : maximum, and minimum current passing through inductor [11].

III. DC SEPARATELY EXCITED MOTOR

Dc motor can define as a device convert electrical to mechanical energy .It considered an essential drive system for many industrial application .Despite this important feature motor dc motor suffer from needing to maintenance and raising their costs. Due to various type of load many kind of motor can be classify according to how their wounded field such as series, shunt, compound and separately excited motor .The last type denote to the case study in this work, which it can represent by the figure shown below [13], [14]. Expounding the main material and results analysis.

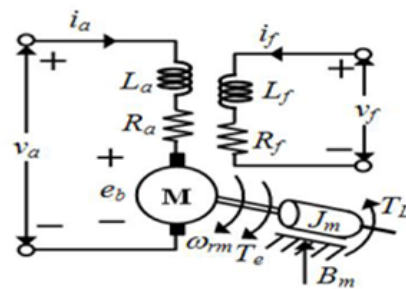


Figure 3. Illustrate The Total Construction Of Dc Motor With Load

$$V_f = R_f i_f + \frac{d\Phi_f}{dt} \quad (7)$$

V_f : voltage applied on field circuit

R_f : field resistance

i_f : field current

Φ_f : Flux on field circuit

$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{d\Phi_f}{dt} + K_r \omega_r i_f \quad (8)$$

V_a : Armature voltage

R_a : Armature resistance

i_a : Armature current

L_a : Armature inductance

IV. DC MOTOR SPEED CONTROL

Speed control for any kind of motors refers to adjusting this value until meet to desired demand, while speed regulation refers to maintain this value although load vary. There are different methods can implement to achieve speed control for the motor types such as.

*Armature control method. It executed by connecting resistor in series with armature circuit winding . This method is suitable at light load states or constant load application.

*Voltage variation. It implemented by changing input voltage (source).

*Field control method, this method employed by changing flux using field rheostat in series with field circuit or changing voltage applied on field circuit.

V. CASE STUDY FOR MOTOR SPEED CONTROL

The case study in this work shown in figure (4) consist of an Ac voltage source feeding rectifier circuit , this rectifier supply a positive current to two identical dc-dc buck converters that supply power to dc motor.

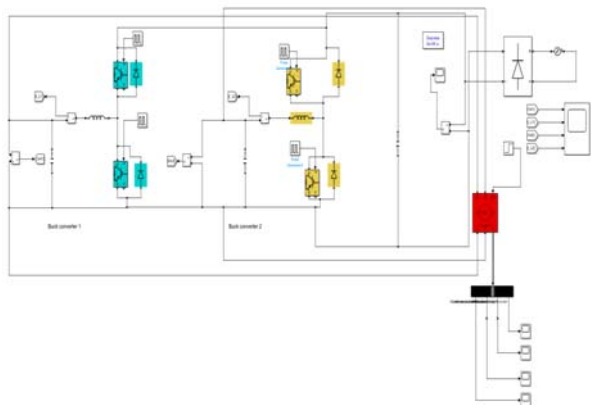


Figure 4. Complete system dual buck converter connected with dc motor without controller

VI. MATLAB SIMULATION RESULTS

1. Simulation results without controller.

The illustrated circuit realized using matlab software describe the drive system performance without using control strategy, it shows the mechanical characteristics of motor as well as the electrical in figures 5, 6 and 7.

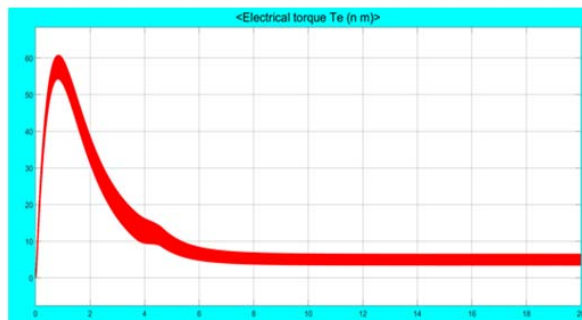


Figure 5. Illustrate the motor speed without using control circuit where it show the proportional increase in speed until reached the rated value of motor speed

Figure (6) shows the torque where it generated by motor at value equal to 5 N.M.

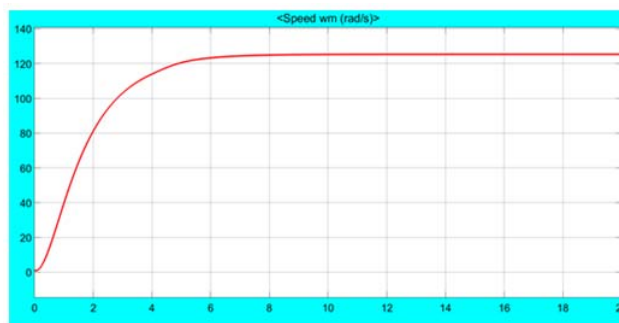


Figure 6. Shows the dc motor torque (ω_r) without control circuit

Figure (7) refers to field current that passing in separated circuit from the armature winding.

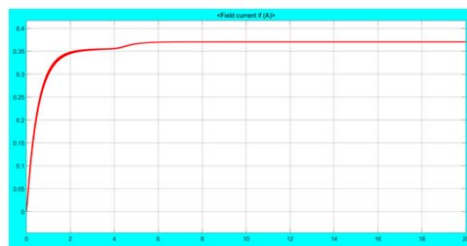


Figure 7. Shows the field current of dc motor without control circuit

2. Simulation results with controller.

During its operation dc motor faced many difficult at environmental status such as load variation, raising current, drop voltage, as well as mechanical fault etc. Load variation considered a common state that affect on motor performance especially speed. Different methods suggested and implemented to overcome speed difference similar to classical (PID) controller , modern (fuzzy logic) controller, hysteresis current controller, F28027 launch pad and other [11], [12], [14].

A Proportional –integral (PI) controller is achieved in this work for controlling input voltage for motor scheme to eliminate the steady state error the increasing the reliability and stability of system. The operation principle is adjust the ton of power switch in buck converter keeping duty cycle at same value. changing ton at buck converter responsible for feeding fiel circuit of motor led to vary the operating conduction then vary the output voltage to desired target, Figure (8) illustrate the PI controller scheme connected to buck system in figure (7).

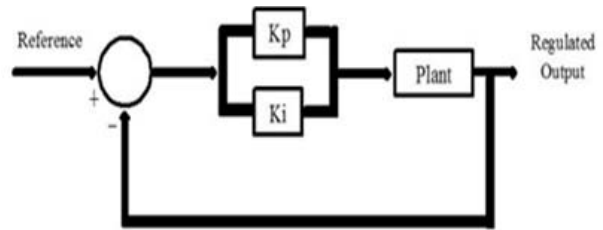


Figure 8. PI controller scheme connected to buck system

in above figure

Kp: Proportional gain

Ki: integration gain

nevertheless the parameter can written as transfer equation

$$c(s) = K_p + \frac{ki}{s} \quad (9)$$

The discussed system is connectd to buck as shown in figure (9).

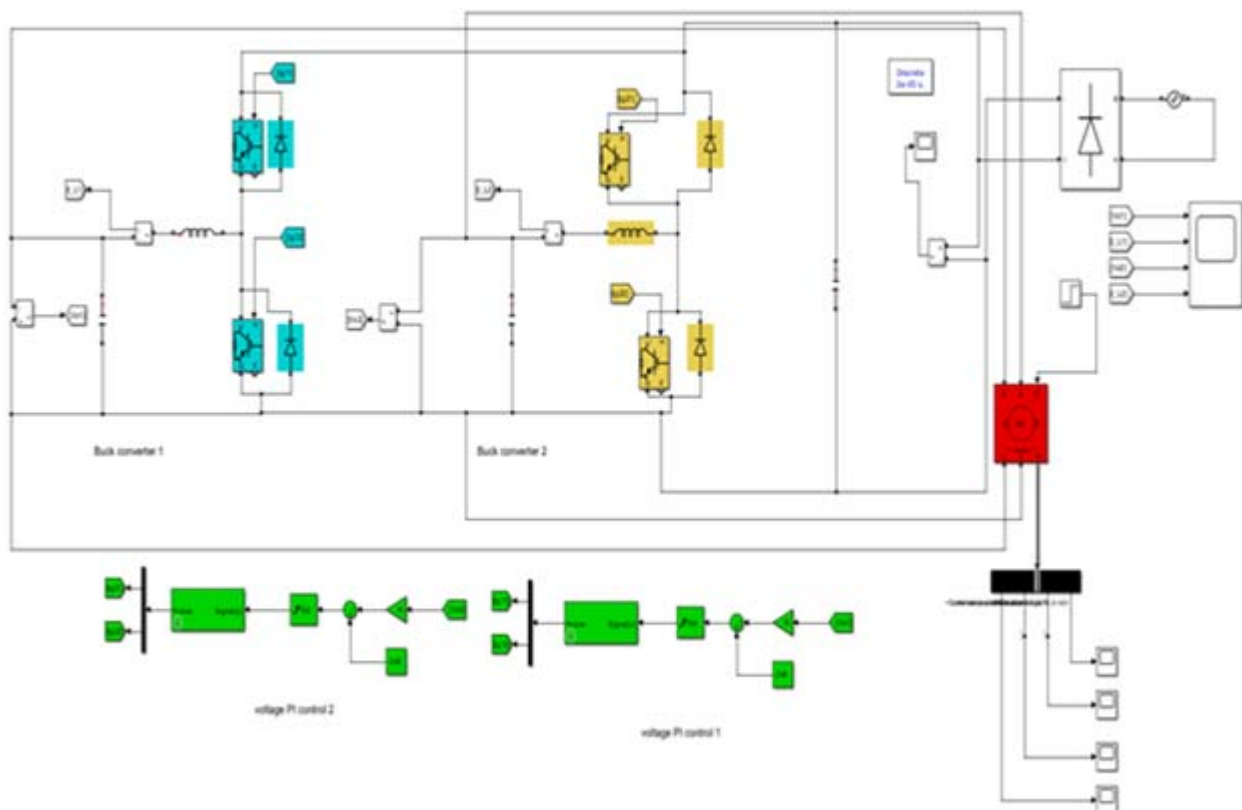


Figure 9.Complete system dual buck converter connected with dc motor with PI controller

When PI controller connected to the drive a sudden change in torque applied, the results describe system performance obtained are shown in the following figures.

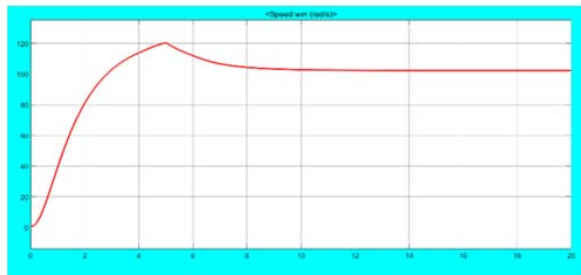


Figure 10. Shows the dc motor speed (rpm) with control circuit

In figure 10 a sudden change in load raising its value to 15 N.M was happened at 5 msec, the speed decreased until reached 110 rps, where the PIcontroller tried to absorbed this change by regulating the field circuit to maintain the speed of value at acceptance limits.

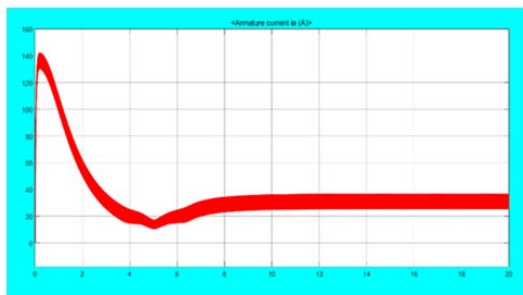


Figure 11. Shows the dc motor torque (N.m) with control circuit

Figure 11 illustrate the effects of PIcontroller to regulate system operation even at sudden change of load torque .at what time it happened the controller adjust the field circuit to overcome the variation in load, when at point 5 msec the load torque decelerate tehn raised to overcome the change.

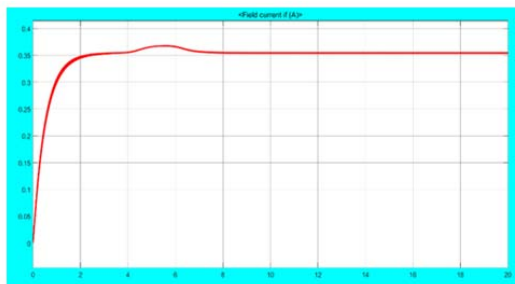


Figure 12. Shows the field current of dc motor with control circuit

Figure 12 denote to field circuit current where at the moment of load change the controller regulate the input voltage applied on circuit to regulate the input current which responsible for generation of torque.

VII.CONCLUSION

In this work implementation of PI controller with dc-dc buck converter developed the system performance at any sudden vary of load torque , it is increasing the stability and reliability of motor drive. The PI effectively regulated the input current of field circuit of motor to adjust its speed .this operation achieved by changing the ducty cycle of onverter switch which connected to the field circuit .By using this technique the whole system takes the ability to face the disturbances happened at any time with fast dynamic response.

REFERENCE

- [1] Raghupathy Prakash and R. Vasanthi. (2014). Speed control of DC-DC convertir Fed DC moto usine robuste adaptive intelligent Controller. Journal of Vibration and Control. DOI: 10.1177/1077546314521848
- [2] M. Dinesh, K. R. Venkatesan, Dr. J. Baskaran. (2015). Design, Control and Simulation of Buck Converter using PID controller and Reference Regulator Technique. International Journal on Recent Technologies in Mechanical and Electrical Engineering (IJRMEE). 2, 10. ISSN: 2349-7947
- [3] V. P. Vino, L. Anto Jeni, A Sweetlin, K. Gurumoorthy. (2015). Design of Intelligent Control of DC-DC Buck Converter Fed DC Motor . International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT) . Special Issue. ISSN: 2278-0181 Published by, www.ijert.org NCICCT-2015 Conférence Procédions
- [4] S. Richard Marian .Gerald Christopher Raj, G. Praveenraj. (2017). International Conference on Electrical, Instrumentation and Communication Engineering (ICEICE2017)
- [5] Chandla Ellis, Giritharan. (2019) Simulation and Analysis of Full Wave Bridge Rectifier Connected to DC/DC Buck Converter Feeding DC Motor. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE). ISSN: 2278-3075, 9, 2, December 2019.
- [6] Djamel Ounnas, Daouadi Guiza, Youcef Soufi, Rabeh Dhaouadi ,Abdelmalek Bouden. (2019). Design and Implementation of a Digital PID Controller for DC–DC Buck Converter. 1st International Conference on Sustainable Renewable Energy Systems and Applications (ICSRESA), December 04-05, 2019, Tebessa, Algeria
- [7] Mikl'os Csizmadia, Mikl'os Kuczmann. (2020). Controller design of DC/DC buck converter based on feedback linearization with integrator. 2nd IEEE International Conference on Griding and Polytope Based Modeling and Control, November 19, 2020,

- Budapest, Hungary
- [8] R. Abhishek, Pallavi Zoting, Purva Ragit. (2020). Design and Analysis of a DC -DC Buck converter and Boost Converter to Achieve High Efficiency by altering duty cycle and input voltage. International Journal of Scientific and Research Publications, 10, 6, 2020. DOI: 10.29322/IJSRP.10.06.2020.p10285
- [9] Setta r S. Ker eam. (2022). Design and Implementing of a Buck Dc-To-Dc Converter into the DC Motor's Speed Controller in Matlab/Simulink. Anbar Journal of Engineering Science (AJES), 13, 2, 36 ~ 41 P- ISSN: 1997-9428 ; E-ISSN: 2705-7440
- [10] Cristri, A.W.a, Iskandar, R.F. (2016). Analysis and Design of Dynamic Buck Converter with Change in Value of Load Impedance. Engineering Physics International Conference, EPIC 2016. Procedia Engineering 170 (2017) 398 – 403. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.03.064
- [11] M. Gupta and S. P. Phulambrikar. (2014). Design and Analysis of Buck Converter . International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT). 3, 3, March – 2014 .ISSN: 2278-0181
- [12] Sahana M, Sachin. Angadi, A.B.Raju.(2016). Speed Control of Separately Excited DC Motor Using Class A Chopper. International Conference on Circuits, Controls, Communications and Computing (I4C). DOI:10.1109/CIMCA.2016.8053296.
- [13] Sumaiya Umme Hani, Md. Kamrul Hassan, Md. Rifat Hazari and Mohammad Abdul Mannan. (2015). Speed Control of Separately Excited DC Motor with Efficiency Maximization Propensity. The AIUB Journal of Science and Engineering (AJSE), 14, 1, August 2015.
- [14] Waleed I. Hameed, Kharia A. Mohamad. (2012). Speed Control Of Separately Excited Dc Motor Using Fuzzy Neural Model Reference Controller. International Journal of Instrumentation and Control Systems (IJICS) 2, 4, October 2012. DOI : 10.5121/ijics.2012.2403

Received 19.06.2025;

Accepted 30.08.2025;

Published 26.12.2025;

ПІ-РЕГУЛЯТОР ДЛЯ КЕРУВАННЯ ШВИДКІСТЮ ДВИГУНА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З ОКРЕМИМ ЗБУДЖЕННЯМ, ЩО ЖИВИТЬСЯ ВІД ПОДВІЙНОГО ПОНИЖУВАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА

ОМАР Т. ТАУФИК

магістр, викладач інженерного коледжу, Університет Мосула, Мосул, Ірак,
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7189-4537>, e-mail:
omartawfeeq_1981@uomosul.edu.iq;

М'ЯСАР С. АЛАТТАР

доктор філософії, викладач інженерного коледжу, Університет Мосула,
 Мосул, Ірак, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7811-9683>, e-mail:
myasaralaatar@uomosul.edu.iq;

Мета роботи. Метою роботи є розробка алгоритму регулювання швидкості та загальної продуктивності двигуна постійного струму з окремим збудженням, шляхом реалізації традиційного способу керування, який включає пропорційно-інтегральний (ПІ) контролер.

Методи дослідження. Методи комп'ютерного моделювання з застосуванням програмного забезпечення MatLAB.

Отримані результати. Методологія проектування пропорційно-інтегрального (ПІ) контролера побудована на точних принципах покращення роботи двигуна шляхом визначення параметрів моделі контролера. Цей метод гарантує, що система забезпечує найкращу продуктивність, успішно регулюючи струмові вхідні сигнали, мінімізуючи коливання та підвищуючи стабільність реакції. Процедура налаштування включає вибір відповідних пропорційних та інтегральних коефіцієнтів підсилення для підтримки балансу між керуванням швидкістю та динамічною гнучкістю. Завдяки систематичній оптимізації параметрів, ПІ-контролер підвищує ефективність, зменшує похибку стаціонарного режиму та покращує перехідну характеристику, що робить його придатним для застосувань, що потребують точного керування двигуном.

Наукова новизна. Наукова новизна роботи полягає у застосуванні спеціалізованої системи керування на другому перетворювачі, спеціально розробленій для регулювання струму магнітного потоку. Керуючи струмом магнітного потоку, контролер підвищує стабільність магнітного поля.

Практична цінність. Завдяки систематичній оптимізації параметрів, ПІ-контролер підвищує ефективність, зменшує похибку стаціонарного режиму та покращує перехідну характеристику, що робить його придатним для застосувань, що потребують точного керування двигуном..

Ключові слова: понижувальний перетворювач постійного струму, двигун постійного струму з окремим збудженням, регулювання швидкості.

УДК.621.313

ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ КОРИГУВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ

САВЧЕНКО О.В. завідувач лабораторіями кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9718-7857>, e-mail: savchenko1984@gmail.com;

ШАРЕЙКО Д.Ю. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6460-9331>, e-mail: dshareyko.mk@gmail.com;

БІЛЮК І.С. канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1654-7468>, e-mail: ivanbilyuk@gmail.com;

МАРДЗЯВКО В.А. асистент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Миколаївського національного аграрного університету, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-9215>, e-mail: vitalijmardzavko@gmail.com ;

Мета роботи. Метою даної роботи є дослідження нелінійного коригувального пристрою для системи автоматичного керування електроприводом постійного струму, який забезпечує наближення до оптимального режиму роботи за критерієм швидкодії та точності, з одночасним визначенням умов стійкості й меж працездатності системи.

Методи дослідження. У роботі застосовано математичне моделювання, теорію оптимального керування на основі принципу мінімаксу, метод гармонічної лінеаризації для аналізу стійкості, а також чисельні методи для визначення оптимальних параметрів фазовипереджувальної ланки. Використано структурні схеми електроприводів постійного струму та моделі з релейними характеристиками, що дозволило дослідити вплив нелінійної корекції на динамічні властивості системи.

Отримані результати. У процесі дослідження побудовано структурну схему електропривода постійного струму з нелінійним регулятором, що включає фазовипереджувальну ланку та релейні елементи. Запропоновано методику апроксимації оптимального закону керування за принципом мінімаксу, що забезпечує мінімізацію відхилення від оптимального режиму у широкому діапазоні амплітуд вхідних впливів. Встановлено залежності між параметрами фазовипереджувальної ланки та величиною відхилення системної похибки, що дозволило сформулювати критерії вибору її часових сталих. Отримано аналітичні вирази для оцінки моменту перемикання сигналу, побудовано нормовані співвідношення між амплітудою та часом перемикання, які визначають якість процесу регулювання. Показано, що запропонований нелінійний коректор дозволяє скоротити час перехідного процесу та зменшити величину похибки без істотного збільшення перерегулювання. Проведений аналіз стійкості системи із застосуванням методу гармонічної лінеаризації дав змогу визначити критичні значення коефіцієнтів підсилення та частот автоколивань. Встановлено, що наявність нелінійного коректора суттєво впливає на динамічні характеристики і водночас звужує межі стійкості. Побудовані графіки критичного коефіцієнта підсилення та частоти автоколивань залежно від параметра нелінійної ланки дозволили чітко визначити області стійкої та нестійкої роботи електропривода постійного струму. Таким чином, результати підтверджують, що використання нелінійного коригувального пристрою забезпечує підвищення швидкодії системи та зменшення похибки, але потребує врахування компромісу між якістю регулювання та запасом стійкості.

Наукова новизна. У роботі обґрунтовано новий підхід до синтезу систем керування електроприводами постійного струму на основі нелінійної динамічної корекції. Запропоновано застосування принципу мінімаксу для апроксимації оптимального закону керування та показано його ефективність у широкому діапазоні вхідних впливів. Вперше проведено комплексний аналіз взаємозв'язку між параметрами нелінійної ланки та межами стійкості системи.

Практична цінність. Результати роботи можуть бути використані при проектуванні електроприводів, які працюють у режимах із високими вимогами до швидкодії та точності регулювання. Запропоновані підходи сприяють створенню більш ефективних алгоритмів керування, що враховують компроміс між швидкодією, точністю та стійкістю системи.

Ключові слова: електропривод, двигун постійного струму, система автоматичного керування, неліній-

© Савченко О.В., Шарейко Д.Ю., Білюк І.С., Мардзявко В.А., 2025

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (CC-BY-SA 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2025-4-3>

ний коригувальний пристрій, оптимальне керування, фазовипереджувальна ланка, стійкість, мінімакс.

I. ВСТУП

Підходи до аналізу й синтезу нелінійних систем суттєво відрізняються від методів, що застосовуються для лінійних систем. Найбільш помітно це проявляється у питанні визначення стійкості. Для лінійних систем стійкість залежить виключно від їхніх внутрішніх характеристик, тоді як у нелінійних - вона визначається значно ширше, враховуючи не лише внутрішні властивості, але й зовнішні впливи.

Нелінійні системи можуть мати кілька станів рівноваги, різні форми стійкості - як у цілому, так і в малому, включаючи абсолютну стійкість. Характерною особливістю таких систем є явище автоколивань та питання їх стійкості. Аналіз і синтез у цій галузі базується на складному математичному апараті, а значна частина задач розв'язується лише чисельними методами, які часто дають лише наближені результати. Незважаючи на це, інтерес дослідників до нелінійних систем постійно зростає.

У лінійних системах усі показники якості керування тісно пов'язані між собою: наприклад, підвищення швидкодії неминуче призводить до зростання перегулювання на перехідній характеристиці. Це означає, що покращення одних параметрів завжди пов'язане з погіршенням стійкості. Основні принципи аналізу та синтезу лінійних систем спираються на два твердження: будь-яка система автоматичного керування діє як фільтр, а будь-яка координата може бути представлена рядом Фур'є. Це пояснюється тим, що гармонійний сигнал, проходячи через таку систему, зберігає свою форму, змінюючись лише за амплітудою та фазою. У випадку нелінійних систем ситуація зовсім інша: вони спотворюють форму сигналу, тому принцип суперпозиції тут не працює. Ця особливість відкриває нові можливості: у нелінійних системах можна одночасно покращувати кілька показників якості керування або вдосконалювати один параметр без істотного погіршення інших. Наприклад, підвищення швидкодії може відбутися без істотного збільшення перегулювання, а якщо й відбудеться його зростання, то воно буде значно меншим, ніж у лінійних системах.

Таким чином, виникає потреба у поглибленому дослідженні процесів, що відбуваються в автоматичних системах керування з нелінійними коректувальними пристроями. Особливо актуальними залишаються завдання оптимізації таких систем, визначення їхньої стійкості та умов виникнення автоколивань.

II. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Основним завданням під час проектування систем автоматичного керування є раціональний вибір їхньої структурної схеми, параметрів елементів, способів технічної реалізації, а також урахування експлуатаційних вимог, пов'язаних із масогабаритними характеристиками та енергоспоживанням. Водночас велика кількість

задач, що розв'язуються за допомогою нелінійних коректувальних пристроїв, а також різноманітність методів їх синтезу й технічного виконання, значно ускладнюють вибір конкретного варіанта схеми.

Попри це, у деяких випадках можна виділити певні ознаки, що дозволяють класифікувати різні схеми. Насамперед важливо визначити, чи була система лінійною до введення в неї нелінійного коректора, а також яке функціональне призначення має цей коректувальний пристрій. Залежно від завдань, які він вирішує, виділяють кілька основних груп:

- 1) пристрої, що забезпечують покращення перехідних процесів;
- 2) пристрої, орієнтовані на оптимізацію системи за певним критерієм;
- 3) пристрої, які надають системі інваріантні властивості щодо зовнішніх збурень чи змін параметрів;
- 4) пристрої, що реалізують необхідні конструктивні або експлуатаційні характеристики.

Більшість сучасних досліджень [1], [2] зосереджена на вивченні нелінійних властивостей окремих елементів систем автоматичного керування та їх впливі на статичні характеристики. Інші роботи [3]–[6] орієнтовані на дослідження нелінійних властивостей самих об'єктів керування. Однак питання стійкості нерідко залишаються поза увагою авторів: зазвичай розглядається лише стійкість лінійної частини системи, що не відображає повної картини. Водночас саме аналіз стійкості в умовах нелінійності є ключовим аспектом, особливо для практичного застосування.

У статтях [5], [6] розглянуто використання нелінійних динамічних перемикаючих коректувальних сигналів, що дозволяють отримати нові результати. Їх фізична сутність полягає в тому, що вони змінюють лише динамічні параметри ланок системи, залишаючи статичні характеристики незмінними. Такі зміни здійснюються під час перехідного процесу завдяки заміні на певних часових інтервалах реального сигналу спеціально сформованим $[F_{t_2}^h]$, який у проміжку від t_1 до t_2 має амплітуду F . Таким чином, при гармонійному вхідному сигналі виду $x = x_0 \sin(\omega t)$, вихід системи набуває вигляду $y = [F_{t_2}^h] y_0 \sin(\omega t)$. Як показано у дослідженнях [7], технічно доцільним є використання обмеженого набору значень амплітуди коректувального сигналу: $F = 0, -1, k$ (де k - певний коефіцієнт). Наприклад, інтервал $[-1_{t_2}^h]$ відповідає зміні знаку керуючого сигналу, що дозволяє суттєво впливати на динаміку процесів у системі.

Схожі задачі досліджувалися в роботах [7]–[9], проте у них не було приділено достатньої уваги питанням стійкості при використанні таких методів корекції.

У роботі [10] аналізуються проблеми синтезу та забезпечення стійкості нелінійних слідкуючих систем

електроприводів із релейними характеристиками. Водночас, на відміну від запропонованого підходу, там розглядаються лише умови абсолютної стійкості, причому для систем зі значними спотвореннями статичних характеристик, спричиненими суттєвими нелінійностями.

Таким чином, актуальним завданням є поглиблене вивчення нелінійних коригувальних пристроїв, що дозволяють змінювати динаміку системи, з одночасним визначенням умов її стійкості та ефективності роботи в реальних умовах експлуатації.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ МЕТИ РОБОТИ

Метою даної роботи є дослідження нелінійного коригувального пристрою для системи автоматичного керування електроприводом постійного струму, який забезпечує наближення до оптимального режиму роботи за критерієм швидкодії та точності, з одночасним визначенням умов стійкості й меж працездатності системи.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Характерною особливістю оптимальних систем є їх здатність забезпечувати максимальну якість функціонування за умов обмежених можливостей, тобто з урахуванням наявних у системі обмежень на ресурси керування [7]. Оптимальність системи визначається за допомогою критерію, що задається у вигляді функціоналу:

$$J = \int_0^T F(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_2, t) dt, \quad (1)$$

де T - час керування; $x_1 \dots x_n$ - фазові координати системи; $u_1 \dots u_r$ - керуючі на вході незмінної частини системи (об'єкта керування).

Метою синтезу оптимального керування є визначення вектора керуючих дій U з компонентами $u_1 \dots u_r$, який забезпечує досягнення екстремального значення функціоналу. При цьому вектор U повинен належати обмеженій області Ω_u допустимих керувань.

В електроприводах найчастіше виникає необхідність забезпечення максимальної швидкодії системи з урахуванням особливостей механічних передач. У теоретичному аспекті для широкого класу систем ця задача ефективно розв'язується за допомогою принципу максимуму. Встановлено, що керуючі впливи u_i на вході об'єкта повинні мати кусково-гладкий характер із амплітудою, яка дорівнює максимально допустимому значенню [7], [8]. Крім того, кількість інтервалів, на яких знак сигналу залишається сталим, при дійсних полюсах передавальної функції об'єкта не перевищує її порядку.

Разом із тим побудова оптимальних систем супроводжується значними технічними труднощами. Практична реалізація оптимального керування зазвичай ґрунтується або на обчисленні моментів перемикання релейних елементів, що формують кусково-гладке керування, або на визначенні функціональної залежності керуючого сигналу u від поточних координат об'єкта. Обидва підходи потребують розв'язання складних інженерних задач [7]–[9].

Розглянемо структурну схему слідкувального електроприводу постійного струму з нелінійним регулятором, що наведена на рисунку 1.

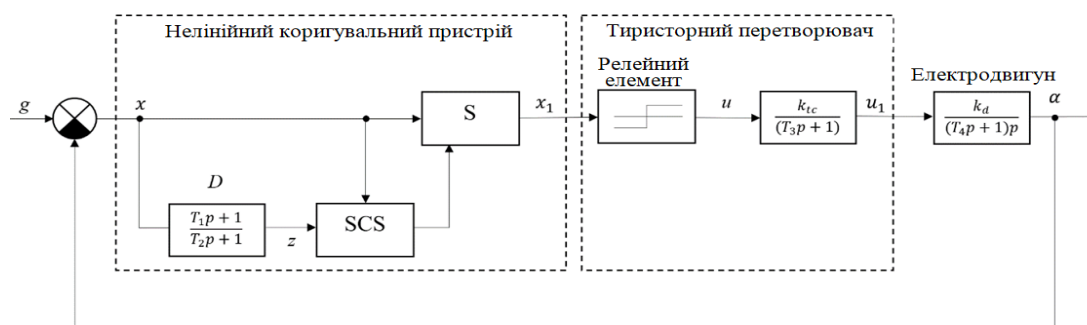


Рисунок 1. Електропривод постійного струму з нелінійним регулятором: k_c - коефіцієнт передачі, T_i - стала часу, D - фазовипереджувальна ланка, SCS - схема порівняння знаків, S - двопозиційний ключ

На структурній схемі (рис. 1) двигун постійного струму подано у вигляді аперіодичної ланки з коефіцієнтом передачі k_d та сталою часу T_4 . Навантаження, приведені до вала двигуна, враховується цією ж сталою часу. Тиристорний перетворювач, який живить двигун, також моделюється як аперіодична ланка з коефіцієнтом передачі k_{1c} і сталою часу T_3 . Водночас тиристорний перетворювач виконує роль релейного перемикача. Для забезпечення оптимальної реакції си-

стеми на стрибкоподібний сигнал на вході релейного елемента необхідно реалізувати функціональну залежність такого вигляду:

$$F_x = x - \operatorname{sign} x \ln(1 + |x|), \quad (2)$$

Нелінійний перетворювач, що реалізує залежність F_x , функціонує на основі коригувального сигналу типу $[-1_{t_2}^1]$. Такий підхід вважається найбільш доцільним

для реалізації нелінійної динамічної корекції з позиції технічної здійсненності. Це пояснюється тим, що інші методи апроксимації оптимальних законів керування - скорочення числа вимірюваних фазових координат, зменшення кількості інтервалів керування чи спрощення математичної форми закону керування - зазвичай не забезпечують значного спрощення апаратної реалізації.

У більшості випадків вони все одно потребують використання нелінійних функціональних перетворювачів, аналогічно до варіантів із суворо оптимальним керуванням [7].

Запропонований нелінійний коригувальний пристрій має відносно просту структуру. Він складається з двопозиційного ключа S , схеми порівняння знаків (SCS) та фазовипереджувальної ланки D , що описується передавальною функцією:

$$W_D(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}, (T_1 > T_2), \quad (3)$$

У реальних електроприводах стала часу тиристорного перетворювача T_3 зазвичай на два-три поряд-

ки менша від сталої часу двигуна T_4 . Це дозволяє суттєво спростити математичний опис системи. При перемноженні двох аперіодичних ланок, що формують лінійну частину, у знаменнику передавальної функції виникає квадратний тричлен, однак член із добутком $T_3 T_4$ внаслідок його малої величини можна знехтувати.

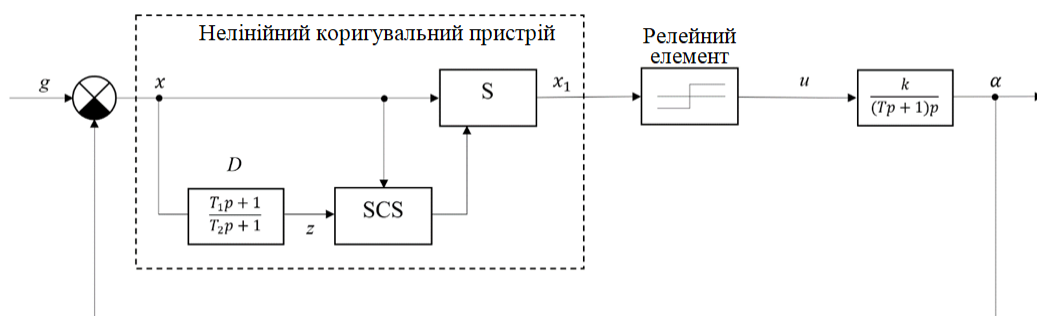
Таким чином, замість двох послідовно з'єднаних аперіодичних ланок лінійну частину системи доцільно подати у вигляді однієї еквівалентної аперіодичної ланки з коефіцієнтом передачі

$$k = k_d \cdot k_{ic},$$

та еквівалентною сталою часу

$$T = T_3 + T_4,$$

Подібна апроксимація значно полегшує аналіз і подальший синтез системи, оскільки дозволяє зменшити порядок математичної моделі без втрати адекватності опису її основних динамічних властивостей. Відповідна структурна схема подана на рис. 2.



Рисуюнок. 2. Спрощена структурна схема електроприводу постійного струму

Якщо до системи, що перебуває у стані спокою, прикласти стрибкоподібний сигнал, то на початковому етапі знак помилки x та вихідного сигналу фазовипереджальної ланки z збігається. У цей момент ключ S пропускає сигнал помилки без інверсії, завдяки чому система починає рух у напрямку зменшення невідповідності. Це викликає розгін електропривода.

Згодом у певний момент часу t_n знак сигналу z змінюється. Схема порівняння знаків SCS впливає на ключ S , внаслідок чого знак сигналу у прямому каналі системи інвертується, що призводить до її гальмування. При коректному виборі моменту перемикавання t_n , у кінці другого інтервалу фазова точка системи потрапляє у початок координат фазового простору [7]. Це означає, що як помилка системи, так і її похідна дорівнюють нулю. Такий процес при релейному законі керування з одним перемиканням вважається оптимальним [7].

У цьому випадку зв'язок між моментом перемикавання t_n та амплітудою стрибка A (для $A > 0$) задається нормованим співвідношенням:

$$t_n^* = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - e^{-a}}}, \quad (4)$$

де

$$t_n^* = \frac{t_n}{T}, \quad a = \frac{A}{(k u_m \cdot T)},$$

Аналогічна функціональна залежність для досліджуваної системи, що описується виразом $t_n^* = f(a_k)$, визначається наступним чином.

Відповідно до рис. 2, отримано нормоване співвідношення, яке характеризує величину системної помилки за умови сталого збурювального впливу $g(t) = A_k = \text{const}$:

$$\dot{x}^* + x^* = -u^*, \quad (5)$$

де $x^* = x/(ku_m T)$, $u^* = u/u_m$, а диференціювання проводиться за нормованим часом $t^* = t/T$.

Вирішуючи його при $x^* = a_k = A_k/(ku_m T)$ та $x^*(0) = 0$, отримаємо:

$$x^* = a_k - u^*(1 - e^{-t^*}) + u^* t^*, \quad (6)$$

$$x^* = u^*(1 - e^{-t^*}), \quad (7)$$

Підставляючи (6) та (7) в рівняння фазовипережувальної ланки

$$\tau_2 \dot{z}^* + z^* = \tau_1 x^* + x^*, \quad (8)$$

де $\tau_1 = T_1/T$; $\tau_2 = T_2/T$; $z^* = z/(ku_m T)$.

Отримаємо

$$\tau_2 \dot{z}^* + z^* = a_k - u^*(1 - \tau_1) + u^*(1 - \tau_1)e^{-t^*} + u^* t^*, \quad (9)$$

Початкова умова для (6)

$$z^*(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1} x^*(0) = \frac{\tau_1}{\tau_2} a_k, \quad (10)$$

Оскільки зміна знака сигналу в прямому каналі відбувається у момент часу $t_{пк}^*$, коли $z^* = 0$, то, розв'язуючи рівняння (9) з початковою умовою (10) та враховуючи співвідношення $z^*(t_{ск}^*) = 0$, у підсумку отримуємо кінцевий вираз (при припущенні $u^* = +1$, що забезпечує рух системи до стану рівноваги за умови $a_k > 0$).

$$t_{пк}^* = a_k \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} e^{-t_{пк}^*/\tau_2} - \frac{\tau_1 - \tau_2}{1 - \tau_2} \tau_2 e^{-t_{пк}^*/\tau_2} - \frac{1 - \tau_1}{1 - \tau_2} e^{-t_{пк}^*} + \tau_2 - \tau_1 + 1 + a_k, \quad (11)$$

Спільний розв'язок рівнянь (4) та (11) можливий лише за умови, що параметр a набуває єдиного значення $a = a_k$. У зв'язку з цим, для забезпечення коректного відпрацювання впливів різної амплітуди виникає необхідність такого вибору параметрів нелінійної коригувальної ланки, який би гарантував мінімальне відхилення реального закону керування від оптимального в усьому заданому діапазоні амплітуд $0 \leq a \leq a_{\max}$.

Ступінь наближення отриманого закону керування до оптимального доцільно оцінювати за залежністю амплітуди від моменту перемикавання. Такий підхід дозволяє визначити якість функціонування системи в різних режимах та оцінити ефективність вибраних параметрів коригувальної ланки.

$$a = t_i^* - \ln(2 - e^{-t_i^*}), \quad (12)$$

$$a_k = \left(t_{пк}^* + \frac{\tau_1 - \tau_2}{1 - \tau_2} \tau_2 e^{-t_{пк}^*/\tau_2} + \frac{1 - \tau_1}{1 - \tau_2} e^{-t_{пк}^*} + \tau_1 - \tau_2 - 1 \right) \times$$

$$\times \frac{1}{1 + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} e^{-t_{пк}^*/\tau_2}}, \quad (13)$$

Будемо визначати ступінь близькості керування до оптимального величиною:

$$\Delta = a_k - a, \quad (14)$$

де a_k і a визначаються з (6) і (7) при $t_{пк}^* = t_{пк}^*$, Δ це величина помилки системи з нелінійною корекцією в кінці другого інтервалу:

$$\Delta = x_k^* = \frac{x_k}{ku_m \cdot T}, \quad (15)$$

За умов строго оптимального керування виконується рівність $x_k = 0$ (а отже, і $\Delta = 0$). Тому чим меншою є величина Δ , тим ближче перебіг процесу до оптимального, таким чином, Δ може розглядатися як кількісний показник ступеня наближення до оптимального режиму, а її використання для оцінки якості керування є обґрунтованим.

Аналіз виразів (12) та (13) дозволяє встановити, що відповідні залежності $a(t_{пк}^*)$ і $a_k(t_{пк}^*)$ при достатньо великих значеннях $t_{пк}^* = t_{пк}^*$ асимптотично прямують до таких виразів:

$$a_a = t_{пк}^* - \ln 2, \quad (16)$$

$$a_{ка} = t_{пк}^* - (1 - (\tau_1 - \tau_2)), \quad (17)$$

при

$$1 - (\tau_1 - \tau_2) = \ln 2, \quad (18)$$

асимптоти збігаються, тобто при $t_{пк}^* \rightarrow \infty$ (і, отже, $a \rightarrow \infty$):

$$\lim_{t_{пк}^* \rightarrow \infty} \Delta = 0, \quad (19)$$

З формул (12-14) випливає, що при $a = a_k = t_{пк}^* = 0$ дорівнює нулю і Δ . Це означає, що за певного значення параметра a абсолютне значення Δ досягає свого максимуму. Таким чином, для наближення керування до оптимального в процесі зміни a від нуля до нескінченності необхідно вибирати параметри τ_1 та τ_2 так, щоб мінімізувати максимальне значення $|\Delta|$, тобто реалізувати принцип мінімаксу $|\Delta|$.

На практиці амплітуда вхідних стрибкоподібних сигналів обмежена. У цьому випадку підбір τ_1 та τ_2 також повинен забезпечувати досягнення мінімаксу $|\Delta|$ ($|\Delta|_{\min \max}$) у визначеному діапазоні зміни параметра a . Завдання вибору τ_1 та τ_2 вирішувалося чисельно. Для різних діапазонів відносних амплітуд обчислення проводилися на ЕОМ методом перебору значень a , τ_1

та τ_2 , які вимірюються у відносних (нормованих) одиницях.

Отримані результати дозволили побудувати залежності параметрів τ_1 та τ_2 , що забезпечують $|\Delta|_{\min \max}$, від ширини діапазону, визначеної верхньою межею $a_{\max}$. Відповідні графіки залежностей τ_1 та τ_2 від $a_{\max}$ у натуральному та логарифмічному масштабах наведено на рис. 3.

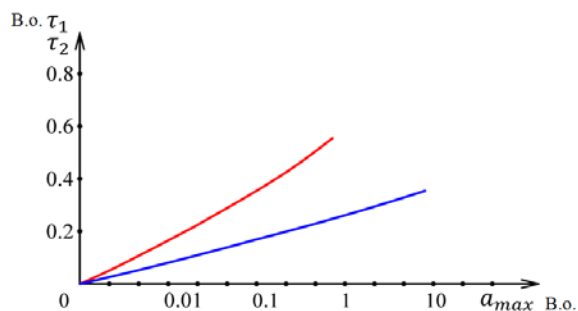


Рисунок 3. Графіки залежностей τ_1 і τ_2 від $a_{\max}$: червоною лінією показана залежність для τ_1 , а синію для τ_2

Фазовипереджувальну ланку можна реалізувати простою схемою пасивного чотирьохполюсника, що наведена на рис. 4.

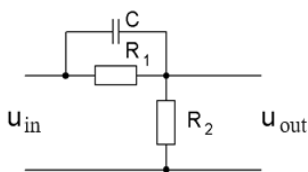


Рисунок 4. Фазовипереджувальна ланка

Часові сталі визначаються за відомими формулами: $T_1 = R_1 C$; $T_2 = C R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Отже, нелінійні коригувальні пристрої можуть застосовуватися як прості засоби оптимізації автоматизованих систем.

Проведені дослідження параметрів коригуючих пристроїв дозволили визначити умови, за яких досягається оптимальне керування системою. Однак, отримані результати є недостатніми без урахування властивостей стійкості, оскільки саме вони визначають можливість практичної реалізації побудованої системи. Тому далі розглянемо питання стійкості оптимізованої системи та межі її працездатності.

Як відомо, релейні системи характеризуються підвищеною схильністю до виникнення автоколивань [7]–[10]. Додатковим фактором є наявність нелінійного коригуючого пристрою, який у певні проміжки часу формує позитивний зворотний зв'язок у системі (рис. 1), що може суттєво зменшити запас стійкості. Тому вибір параметрів цього пристрою повинен здійснюватися не лише з позицій оптимізації, але й з урахуванням їх впливу на стабільність роботи системи. Варто

також підкреслити, що реальні автоматичні системи, поряд із високою швидкістю, мають забезпечувати досягнення й інших показників якості. У цьому контексті застосування лінійних методів керування здатне істотно спростити задачу стабілізації. Для подальшого аналізу розглянемо випадок синусоїдного вхідного впливу, коли вихідний сигнал нелінійної частини (рис. 1) визначається виразами [11], [12]:

$$x = x_{\max} (\sin \psi - a), \psi_1 < \psi \leq \psi_2, \quad (20)$$

$$x = x_{\max} (\sin \psi_2 - a), \psi_2 \leq \psi < \pi + \psi_1. \quad (21)$$

Кути ψ_1 та ψ_2 обмежують область коливань нелінійного елемента, де виконується умова $x_1 = \text{const}$. Коефіцієнти гармонічної лінеаризації визначаються як значення першої гармоніки під час розкладу функції $x(\psi)$ у ряд Фур'є. З урахуванням того, що для аперіодичної ланки на відріжку $\psi_1 - \psi_2$ координата x змінюється згідно з формулою (20), а на проміжку $\psi_2 - (\pi + \psi_1)$ - відповідно до формули (21), отримаємо вирази для коефіцієнтів q і q' :

$$q = \frac{1}{\pi} (\psi_2 - \psi_1 + \frac{1}{2} (\sin 2\psi_2 - \sin 2\psi_1)), \quad (22)$$

$$q' = -\frac{1}{\pi} (\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1), \quad (23)$$

Коефіцієнти гармонічної лінеаризації визначаються як параметрами вхідного сигналу, так і характеристиками самої ланки. Припустимо, що ланки порівняння знаків та ключова ланка не мають постійної часу. У цьому випадку маємо: $\psi_0 = 0$, $\cos \psi_0 = 1$, $\sin \psi_0 = 0$, $\psi_2 = \pi/2$, $\psi_1 = -\arcsin(1-2a)$. Використовуючи формули (22) та (23), можна отримати вирази для коефіцієнтів гармонічної лінеаризації нелінійної ланки, наведеної на рис. 1.

$$q = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin(1-2a) + 2(1-2a)\sqrt{a(1-a)} \right), \quad (24)$$

$$q' = -\frac{4a}{\pi} (1-a), \quad (25)$$

Характеристичне рівняння лінійної частини системи рис.1 має вигляд:

$$T_3 T_4 p^3 + (T_3 + T_4) p^2 + p + k, \quad (26)$$

Критичний коефіцієнт підсилення лінійної системи k_{kl} та частота коливань системи на границі стійкості ω_1 визначаються наступними виразами:

$$k_{kl} = \frac{T_3 + T_4}{T_3 T_4}, \omega = \sqrt{\frac{1}{T_3 T_4}}, \quad (27)$$

Спираючись на [11], [12] припустимо, що $T_3 = 0,018$ с, $T_4 = 0,12$ с., тоді у відповідності до (26) маємо: $k_k = 64 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 = 21,5 \text{ с}^{-1}$.

Для дослідження стійкості нелінійної системи

рис.1 представимо рівняння нелінійної ланки у виді:

$$x_1 = (q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p)g, \quad (28)$$

Коефіцієнти гармонійної лінеаризації визначаються за формулами (22), (23). Характеристичне рівняння набуває наступного виду:

$$T_3 T_4 p^3 + (T_3 + T_4) p^2 + p + (q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p)k = 0, \quad (29)$$

Щоб визначити границю стійкості, підставимо $p = j\omega$ у рівняння (27).

$$-T_3 T_4 j\omega^3 - (T_3 + T_4)\omega^2 + j\omega + kq(a) + jkq'(a) = 0, \quad (28)$$

Після перетворень:

$$\omega = \frac{(T_3 + T_4)q'(a)}{2T_3 T_4 q(a)} + \sqrt{\left(\frac{(T_3 + T_4)q'(a)}{2T_3 T_4 q(a)}\right)^2 + \frac{1}{T_3 T_4}}, \quad (29)$$

Вираз для критичного коефіцієнта передачі системи має вигляд:

$$k_k = \frac{(T_3 + T_4)\omega^2}{q(a)}, \quad (30)$$

Рівняння (29) та (30) дозволяють визначити межу стійкості системи, зображеної на рис. 1, для довільних значень її параметрів. Це дає змогу аналізувати поведінку системи та обирати оптимальні режими роботи.

Після отримання та аналітичного виведення формул (29)–(30) виконаємо побудову графіків стійкості системи, що відображають залежності критичного коефіцієнта передачі $k_k(a)$ та частоти автоколиваний $\omega(a)$ від параметра a .

Вихідними даними для побудови графіків стійкості використаємо є структурну схему системи (рис. 1), яка включає двигун постійного струму, змодельований у вигляді аперіодичної ланки з коефіцієнтом передачі k_d та сталою часу T_d , тиристорний перетворювач, поданий як аперіодична ланка з коефіцієнтом передачі k_{ts} і сталою часу T_3 , а також нелінійний регулятор. Оскільки стала часу перетворювача значно менша від сталої часу двигуна, лінійну частину системи було спрощено до однієї еквівалентної аперіодичної ланки. Для аналізу стійкості застосовано метод гармонійної лінеаризації, при якому нелінійний елемент замінюється еквівалентною ланкою з коефіцієнтами q та q' , визначеними за формулами (22) і (23).

Виконуючи чисельне розв'язання рівнянь (29) і (30) для різних значень параметра a з подальшим нанесенням на одну координатну площину залежностей $k_k(a)$ та $\omega(a)$, отримаємо значення границь стійкості системи. Такий підхід забезпечує наочність дослідження впливу параметра a на динамічні властивості системи та дає можливість оцінити її стійкість у різних режимах.

Для проведення розрахунку та визначення границь стійкості системи було використано програму MATLAB, який автоматизував обчислення критичних параметрів і дозволило візуалізувати отримані залежності у вигляді границь стійкості.

Границі стійкості системи були визначені за допомогою методу гармонійної лінеаризації, який дозволяє досліджувати нелінійні системи керування шляхом заміни їх на еквівалентні лінійні моделі з певними параметрами.

У процесі аналізу нелінійний регулятор електропривода, що містить релейний елемент і фазовипереджувальну ланку, був представлений у вигляді еквівалентної лінійної ланки з коефіцієнтами гармонійної лінеаризації q та q' . Ці коефіцієнти були визначені через розклад функцій у ряд Фур'є, що дозволило врахувати вплив амплітуди вхідного сигналу на поведінку системи.

На основі отриманих коефіцієнтів було складено характеристичне рівняння системи, у яке підставлявся комплексний параметр $p = j\omega$, що відповідає умові нейтральної стійкості - моменту, коли система знаходиться на межі між стійким станом і виникненням автоколиваний. Це дало змогу отримати аналітичні залежності для критичного коефіцієнта підсилення k_k та частоти автоколиваний ω , які характеризують границі стійкої роботи системи.

Далі ці рівняння були розв'язані чисельним методом у середовищі MATLAB, що дозволило побудувати графіки залежностей критичного коефіцієнта передачі $k_k(a)$ та частоти автоколиваний $\omega(a)$ від параметра нелінійної ланки a , (див. рис. 5).

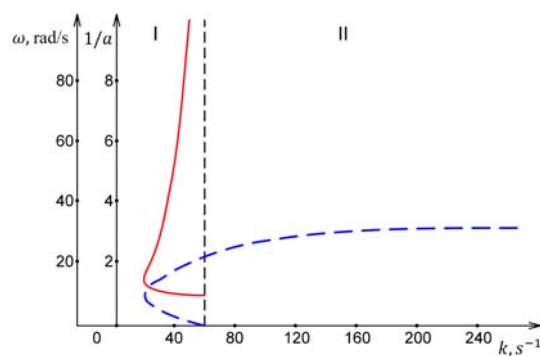


Рисунок 5. Границі стійкості системи

На рис. 5 область стійкості позначена як I, а зона нестійкості - як II. Із графіка видно, що наявність нелінійної ланки суттєво звужує межі стійкості системи, зображеної на рис. 1. За значень коефіцієнта передачі k , менших від певного критичного значення k_k , система перебуває у стійкому стані. Якщо ж k знаходиться в інтервалі між k_k та k_{kl} , у системі можуть виникати стійкі автоколивання. При подальшому збільшенні k понад k_{kl} система втрачає стійкість. Синя крива демонструє, що зі зменшенням амплітуди коливаний

відбувається зниження їх частоти.

Отримані результати (рис. 5) стосуються узагальненої моделі електропривода з релейним законом керування для двигунів постійного струму привідного класу потужності 0,75–2,2 кВт. Як приклад можна представити відповідні електродвигуни в табл. 1.

Table 1. Приклади відповідних двигунів

Модель двигуна	Потужність, кВт	Напруга, В	Струм, А	Швидкість, об/хв
ДПМ-20-Н1-01	0,75	110	8,5	1500
ДПМ-25-Н2	1,1	220	6,0	1500
ДПР-52-Н1	1,5	220	8,0	2000
ПБМ-100-2УХЛ4	2,2	220	12,0	1500
2ПН90-1УХЛ4	1,6	220	9,0	1600
ДПР-52-УХЛ4	1,2	110	10	1800

Таким чином, результати дослідження підтверджують ефективність використання нелінійних коригувальних пристроїв для оптимізації автоматичних систем керування, однак їх практична реалізація потребує ретельного врахування динамічних властивостей та меж стабільності.

V. ВИСНОВКИ

1. Розроблено методику апроксимації оптимального закону керування на основі принципу мінімаксу, що мінімізує відхилення від оптимального режиму у широкому діапазоні вхідних впливів.

2. Встановлено умови, за яких досягається оптимальне керування при використанні нелінійного коректора, та отримано залежності параметрів фазовипереджувальної ланки від амплітуди вхідних сигналів.

3. Показано, що застосування нелінійної корекції значно покращує динамічні властивості системи, забезпечуючи швидке зменшення похибки без істотного погіршення інших показників якості.

4. Виконаний аналіз стійкості з використанням методу гармонічної лінеаризації підтвердив, що нелінійний коректор звужує межі стійкості системи. Зокрема, при перевищенні критичного коефіцієнта підсилення можливе виникнення автоколивань і втрата стабільності.

5. Запропоновані теоретичні положення можуть бути використані на практиці для побудови електроприводів, де висувуються підвищені вимоги до швидкодії та точності регулювання, але водночас необхідно враховувати компроміс із запасом стійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kodkin V., Anikin A., Baldenkov A. Structural correction of nonlinear dynamics of frequency-controlled induction motor drives // *Int. J. Power Electron. Drive Syst.* – 2020. – №11. – С. 220–227.
2. Islam R., Islam M., Hossain K. Pintukumar Sadhu performance analysis of a DTC and SVM based field-orientation control induction motor drive // *Int. J. Power Electron. Drive Syst.* – 2015. – №3. – С. 336–343.
3. Chunmei Li, A., L. A. Nonlinear system control strategy based on single chip computer // *5th International Conference on Advanced Design and Manufacturing Engineering.* – 2015. – С. 321–325. DOI: 10.2991/icadme-15.2015.64
4. Kimstach O. Optimisation Problem of Bi-current System of Distribution Generation // *2023 IEEE 5th International Conference on Modern Electrical and Energy System.* – 2023. – С. 1–5. DOI: 10.1109/MEES61502.2023.10402508
5. Kimstach O. Optimal starting of the induction motor // *ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK.* – 2020. – №89. – С. 263–268.
6. Kimstach O. Definition of Optimal Structure of Power Network // *Problemele energeticii regionale.* – 2019. – №1(39). – С. 22–33. DOI: 10.5281/zenodo.2650415
7. Hlypalo E. Nonlinear correcting devices in automatic systems // *Energy.* – 1973.
8. Шарейко Д.Ю., Фоменко Л. Оптимізація автоматичних систем нелінійними коригуючими пристроями // *Інновації в суднобудуванні та океанотехніці.* – 2023. – С. 349–352.
9. Biluk I., Shareyko D., Fomenko S. Adaptive Control in Complete Electric Drives // *2020 IEEE Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP).* – 2020. – С. 1–4. DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240856
10. Biluk I., Shareyko D., Savchenko O. Development of a laboratory stand for the study of asynchronous electric drives // *Int. Scientific Discussion: Problems, Tasks, Prospects Brighton.* – 2024. – С. 464–481. DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240856
11. Beaty H.W. Electrical equipment handbook: Troubleshooting and maintenance. – New York, NY: McGraw-Hill. – 2003. – 832 с.
12. Лавріненко Ю. Електропривод / Ю. Лавріненко, О. Марченко, П. Савченко. – Київ: Ліра-К, 2009. – 504 с.

Надійшла (Received) 15.09.2025;

Прийнята (Accepted) 27.10.2025;

Опублікована (Published) 26.12.2025;

OPTIMIZATION OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS FOR DC ELECTRIC DRIVES USING NONLINEAR CORRECTION DEVICES

- SAVCHENKO O.V. head of Laboratories, department of automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9718-7857>, e-mail: savchenko1984@gmail.com;
- SHAREYKO D.U. candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6460-9331>, e-mail: dshareyko.mk@gmail.com;
- BILIUK I.S. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1654-7468>, e-mail: ivanbilyuk@gmail.com;
- MARZIAVKO V.A. Assistant Professor, Department of Electric Power, Electrical Engineering and Electromechanics, Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-9215>, e-mail: vitalijmardzavko@gmail.com;

Purpose of the work. The purpose of this work is to study a nonlinear correction device for an automatic control system for a DC electric drive, which provides an approach to the optimal operating mode according to the criterion of speed and accuracy, while simultaneously determining the stability conditions and limits of the system's performance.

Research methods. The work uses mathematical modeling, the theory of optimal control based on the minimax principle, the harmonic linearization method for stability analysis, as well as numerical methods to determine the optimal parameters of the phase-leading link. Structural diagrams of DC electric drives and models with relay characteristics were used, which made it possible to study the influence of nonlinear correction on the dynamic properties of the system.

Results. In the process of research, a structural diagram of a DC electric drive with a nonlinear regulator, including a phase-leading link and relay elements, was constructed. A method for approximating the optimal control law using the minimax principle is proposed, which ensures minimization of deviations from the optimal regime in a wide range of input amplitudes. Dependencies between the parameters of the phase-leading link and the magnitude of the system error deviation are established, which made it possible to formulate criteria for selecting its time constants. Analytical expressions for estimating the signal switching moment are obtained, the normalized relations between the amplitude and the switching time are constructed, which determine the quality of the control process. It is shown that the proposed nonlinear corrector allows to reduce the time of the transient process and reduce the error magnitude without a significant increase in overshoot. The analysis of the system stability using the harmonic linearization method made it possible to determine the critical values of the gain coefficients and self-oscillation frequencies. It is established that the presence of a nonlinear corrector significantly affects the dynamic characteristics and at the same time narrows the limits of stability. The constructed graphs of the critical gain and self-oscillation frequency depending on the nonlinear link parameter allowed us to determine clearly the areas of stable and unstable operation of the DC electric drive. Thus, the results confirm that the use of a nonlinear correction device provides an increase in the system speed and a decrease in the error, but requires consideration of a compromise between the quality of regulation and the margin of stability.

Scientific novelty. The work substantiates a new approach to the synthesis of DC electric drive control systems based on nonlinear dynamic correction. The application of the minimax principle for approximating the optimal control law is proposed and its effectiveness in a wide range of input influences is shown. For the first time, a comprehensive analysis of the relationship between the parameters of the nonlinear link and the system stability limits is carried out.

Practical value. The results of the work can be used in the design of electric drives operating in modes with high requirements for speed and regulation accuracy. The proposed approaches contribute to the creation of more effective control algorithms that take into account the trade-off between speed, accuracy, and system stability.

Keywords: electric drive, DC motor, automatic control system, nonlinear correction device, optimal control, phase-advancing link, stability, minimax.

REFERENCE

10.5281/zenodo.2650415

- [1] Kodkin, V., Anikin, A., & Baldenkov, A. (2020). Structural correction of nonlinear dynamics of frequency-controlled induction motor drives. *Int. J. Power Electron. Drive Syst.*, (11), 220–227.
- [2] Islam, R., Islam, M., & Hossain, K. (2015). Pintukumar sadhu performance analysis of a dtc and svm based field-orientation control induction motor drive. *Int. J. Power Electron. Drive Syst.*, 5(3), 336–343.
- [3] Chunmei Li, A, L. A. (2015). Nonlinear system control strategy based on single chip computer. In *5th international conference on advanced design and manufacturing engineering* (p. 321–325). DOI: 10.2991/icadme-15.2015.64
- [4] Kimstach, O. (2023). Optimisation Problem of Bi-current System of Distribution Generation. In *2023 IEEE 5th International Conference on Modern Electrical and Energy System* (p. 1–5). DOI: 10.1109/MEES61502.2023.10402508.
- [5] Kimstach, O. (2020). Optimal starting of the induction motor. *ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK*, 5(89), 263–268.
- [6] Kimstach, O. (2019). Definition of Optimal Structure of Power Network. *Problemele energeticii regionale*, 1(39), 22–33. DOI: 10.5281/zenodo.2650415
- [7] Hlypalo, E. (1973). *Nonlinear correcting devices in automatic systems*. Energy.
- [8] Shareiko, D. Yu., & Fomenko, L. (2023). Optymizatsiia avtomatychnykh system neliniinymy kory-huiuchymy prystroiamy [Optimization of automatic systems by nonlinear corrective devices]. In *Innovations in shipbuilding and ocean engineering* (p. 349–352). NUK.
- [9] I. Biluk, D. Shareyko, A. & Fomenko, S. (2020). Adaptive Control in Complete Electric Drives. In *2020 IEEE Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP)* (p. 1–4). DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240856
- [10] I. Biluk, D. Shareyko, A. & Savchenko, O. (2024). Development of a laboratory stand for the study of asynchronous electric drives. In *Int. Scientific Discussion: Problems, Tasks Prospects Brighton* (p. 464–481). DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240856
- [11] Beaty, H. W. (2003). *Electrical equipment handbook: Troubleshooting and maintenance*. New York, NY: McGraw-Hill, 832p.
- [12] Lavrinenko, Y., Marchenko, O., & Savchenko, P. (2009). *Elektropryvod. [Electric drive]*, 504p.

ENHANCEMENT OF MATHEMATICAL MODELS FOR AC ELECTROMECHANICAL CONVERTERS

- HIZENKO M.D. postgraduate student of the department of electrical and electronic apparatus, National University “Zaporizhzhia polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8584-6022>, e-mail: nhizenko.freshcode@gmail.com;
- LUKASH D.V. postgraduate student of the department of electrical and electronic apparatus, National University “Zaporizhzhia polytechnic”, Polytechnic National University, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9191-5179>, e-mail: lukash.dmitry.v@gmail.com;
- SHVED A.S. postgraduate student of the department of electrical and electronic apparatus, National University “Zaporizhzhia polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6822-1190>, e-mail: gemix555@gmail.com;

Purpose. Development of mathematical models of electromechanical AC converters invariant to the speed of rotation of the coordinate system using as state variables of electromechanical converters the modules of the resulting vectors of three-phase variables and their phase shifts relative to each other for the development of new structures of automated asynchronous electric drives.

Methodology. Mathematical modeling methods for electromechanical systems, numerical methods for solving systems of first-order differential equations for the development of mathematical models of AC electromechanical converters invariant to the rotational speed of the coordinate system.

Findings. The reviewed mathematical models of electromechanical converters made it possible to reproduce their steady-state and dynamic processes with the same accuracy as models in Cartesian coordinates. The use of phase shifts of the resulting vectors relative to each other as state variables for the electromechanical converter allowed for the derivation of mathematical models in which all variables are limited in magnitude and have constant values in the steady-state mode, regardless of the coordinate system's rotational speed. Studies performed using the proposed models indicate that the vector and circular diagrams, which are traditionally used for analyzing the steady-state modes of electromechanical converters, characterize the angular position of some vector variables with an accuracy of a multiple of $2\pi K$.

Originality. The proposed mathematical model of AC electromechanical converters is invariant to the rotational speed of the coordinate system, which allows the use of the modules of the resulting vectors of three-phase variables and their phase shifts relative to each other as state variables of electromechanical converters.

Practical value. The proposed mathematical models make it possible to obtain the amplitude values of the vector variables, their angular position relative to one another, instantaneous $\cos\varphi$ values (and so on), without additional calculations.

Keywords: induction motor, resulting vector, mathematical models, polar coordinates, rotational speed.

I. INTRODUCTION

Mathematical modeling is currently one of the highest priority approaches for determining and investigating the characteristics of various types of electromechanical converters. When mathematically modeling electromechanical processes in an induction motor with a solid rotor, it is necessary to take into account the non-linearity of the ferromagnetic material, the slotting of the cores, and eddy currents in the rotor. Modern simulation programs account for these factors during the calculation of instantaneous states of the electromagnetic field: determining winding flux linkages, losses in the steel and windings, and the electromagnetic

torque. Fragments of induction motor equations, in which vector variables are represented by their polar coordinates, are finding increasing application both in the design of automatic control systems for induction electric drives and in the analysis of their dynamic and steady-state modes [1, 2]. Work [3] provides six variants for writing such equations, which describe the processes in an unsaturated squirrel-cage induction motor under generally accepted assumptions [4]. However, equations in polar coordinates have been studied little, and their properties have been insufficiently explored. This limits the application of such equations in engineering practice.

© Hizenko M.D., Lukash D.V., Shved A.S., 2025

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (CC-BY-CA 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2025-4-4>

II. ANALYSIS OF LAST RESEARCHES

The development and improvement of mathematical models for induction motors (IM) remains a relevant area of research in electrical engineering, as model accuracy directly affects the efficiency of control, diagnostics, and design systems. In recent years, the main focus has shifted from classical models to accounting for nonlinearities, magnetic saturation, temperature effects, and the use of modern identification and simulation methods.

Traditional d-q models, based on generalized motor theory, often assume a linear magnetic circuit. In modern research, the influence of saturation on the dynamics of induction motors is actively investigated. The 'Nonlinear d-q model of an induction motor considering cross-saturation' [5] represents an improved model that uses cubic splines or special functions to describe the dependence of inductances on current. This allows for accurate prediction of transient processes under high load conditions. In [6] proposes a model that includes the temperature dependence of parameters (winding resistances), which is critically important for thermal protection and assessing the service life of the induction motor.

For systems requiring high dynamic accuracy, advanced vector control and direct control models are actively being developed. In [7], the authors focus on improving flux linkage vector observers. The authors modify the classical model to minimize the flux estimation error at low speeds. Work [8] uses a multi-dimensional model to estimate additional losses and torque pulsations caused by non-sinusoidal supply.

To achieve the most accurate analysis of magnetic fields and loss distribution, finite element method (FEM) models are used. Recently, hybrid approaches that combine the speed of d-q models with the accuracy of FEM have become popular. Research in [9] proposes a methodology in which non-linear characteristics obtained using FEM are integrated into the d-q model in the form of tables or approximations, significantly increasing accuracy without substantially slowing down the simulation. The paper [10] discusses modern algorithms (e.g. genetic algorithms or swarm intelligence) for improving the accuracy of model parameter estimation in real time.

Modern electric drive control systems often use models to predict motor behavior several steps ahead (model predictive control, MPC). In [11], the focus is on developing models optimized for digital implementation. Particular attention is paid to the choice of the sampling step and the linearization of nonlinear dependencies to reduce the computational load of the controller. In the article [12] the imperfections of the semiconductor inverter (dead time, PWM delays) are taken into account, integrating them into the general mathematical model of the engine for more accurate prediction.

Accurate mathematical models are needed to develop diagnostic algorithms based on State Observers that compare measured and calculated parameters. The study [13] proposes an extended d-q model, where the stator windings are divided into several sections with the

introduction of additional resistance at the fault location. This allows for the simulation of a fault signature (e.g., characteristic current harmonics) for subsequent diagnostics. In [14], the influence of rotor asymmetry on the model parameters is analyzed and adaptive observers are proposed for accurate state tracking even under defect conditions.

The skin effect in deep rotor slots and bars becomes especially important when operating with frequency converters, when the rotor currents have a high frequency. In publication [15], two equivalent rotor windings (internal and external) are used to more accurately reflect the change in rotor resistance and inductance depending on the slip frequency. This is critical for accurate prediction of torque and efficiency over a wide speed range. In the article [16] he demonstrates how improved models that take into account frequency dependence allow for more accurate calculation of additional losses and increase the accuracy of thermal modeling.

An analysis of publications shows that modern research is focused on creating refined, nonlinear, and adaptive mathematical models of induction motors. The primary focus is on improving accuracy by taking into account physical phenomena (saturation, temperature) and integrating complex numerical methods (FEM) into faster dynamic models (d-q). This is critical for the development of high-precision and energy-efficient electric drive systems.

III. FORMULATION OF THE WORK PURPOSE

Development of mathematical models for AC electromechanical converters that are invariant to the rotational speed of the coordinate system, utilizing the moduli of the resulting vectors of three-phase variables and their phase shifts relative to one another as state variables for the electromechanical converters, with the aim of developing new structures for automated induction electric drives.

IV. EXPOUNDING THE MAIN MATERIAL AND RESULTS ANALYSIS

As noted in [4], the most widely used differential equations are those in which the relationship between the electromagnetic torque M_e of the motor and the resulting stator voltage vector U_s is expressed through intermediate vector variables, the stator current i_s and the rotor flux linkage ψ_r (the i_s - ψ_r system), or the stator flux linkage ψ_s and the rotor flux linkage ψ_r (the ψ_s - ψ_r system).

For the given combinations of vector variables, these equations in polar coordinates have the form for model in i_s - ψ_r variables:

$$\begin{aligned} U_s \cdot \cos(\theta_{u_s} - \theta_{i_s}) &= r_e \left(T_e \frac{di_s}{dt} + i_s \right) + \dots \\ &\dots + K_r z_p \omega \psi_r \sin(\theta_{i_s} - \theta_{\psi_r}) - \dots \\ &\dots - \frac{K_r}{T_r} \psi_r \cos(\theta_{i_s} - \theta_{\psi_r}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{i_s}}{dt} &= \frac{U_s \sin(\theta_{u_s} - \theta_{i_s})}{r_e T_e i_s} - \omega_k - \dots \\ &\dots - \frac{K_r z_p \omega \psi_r \cos(\theta_{u_s} - \theta_{\psi_r})}{r_e T_e i_s} - \dots \\ &\dots - \frac{K_r \psi_r \sin(\theta_{i_s} - \theta_{\psi_r})}{T_r r_e T_e i_s}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$i_s \cos(\theta_{i_s} - \theta_{\psi_r}) = \frac{I}{K_r r_r T_r} \left(T_r \frac{d\psi_r}{dt} + \psi_r \right), \quad (3)$$

$$\frac{d\theta_{\psi_r}}{dt} = \frac{K_r r_r i_s \sin(\theta_{i_s} - \theta_{\psi_r})}{\psi_r} - \omega_k - z_p \omega, \quad (4)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_c, \quad (5)$$

$$M_e = \frac{3}{2} K_r z_p i_s \psi_r \sin(\theta_{i_s} - \theta_{\psi_r}) \quad (6)$$

- for model in ψ_s, ψ_r variables:

$$\begin{aligned} U_s \cdot \cos(\theta_{u_s} - \theta_{\psi_s}) &= \frac{r_s}{L'_s} \left(\frac{L'_s}{r_s} \cdot \frac{d\psi_s}{dt} + \psi_s \right) - \dots \\ &\dots - \frac{K_r r_r}{L'_s} \psi_s \cos(\theta_{\psi_s} - \theta_{\psi_r}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{\psi_s}}{dt} &= \frac{K_r r_s}{L'_s} \frac{\psi_r}{\psi_s} \sin(\theta_{\psi_s} - \theta_{\psi_r}) - \dots \\ &\dots - \omega_k + \frac{U_s}{\psi_s} \sin(\theta_{u_s} - \theta_{\psi_s}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\psi_s \cos(\theta_{\psi_s} - \theta_{\psi_r}) = \frac{I}{K_s} \left(\frac{L'_s}{r_r} \frac{d\psi_r}{dt} + \psi_r \right), \quad (9)$$

$$\frac{d\theta_{\psi_r}}{dt} = \frac{K_s r_r}{L'_r} \frac{\psi_s}{\psi_r} \sin(\theta_{\psi_s} - \theta_{\psi_r}) - \omega_k + z_p \omega, \quad (10)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_c, \quad (11)$$

$$M_e = \frac{3}{2} \frac{K_r z_p}{L'_s} \psi_s \psi_r \sin(\theta_{\psi_s} - \theta_{\psi_r}) \quad (12)$$

where, U_s, i_s, ψ_s, ψ_r are the magnitudes of the resulting vectors for stator voltage, stator current, stator flux linkage, and rotor flux linkage, respectively; $\theta_{u_s}, \theta_{i_s}, \theta_{\psi_s}, \theta_{\psi_r}$ are the angles of the corresponding vectors (angles between the respective vectors and the polar axis); $\dot{\omega}_k, \dot{\omega}$ are the angular velocities of rotation of the polar axis and the rotor of the electrical motor; M_e, M_c are the electromagnetic torque of the motor and the static load torque; z_p is the number of pole pairs of the stator winding; J is the total moment of inertia, referred to the

motor shaft; L_m, L_s, L_r, r_s, r_r are the parameters of the induction motor circuits, referred to the stator winding; $L_e = (L_s - L_m) + K_r(L_r - L_m)$ is the equivalent leakage inductance of the motor phase; $r_e = r_s + K_r^2 r_r$ is the equivalent active resistance of the motor phase; $L'_s = (1 - K_s K_r) L_s$ and $L'_r = (1 - K_s K_r) L_r$ are stator and rotor leakage inductances; $T_e = L_e / r_e$ and $T_r = L_r / r_r$ are electromagnetic time constants of the motor's main circuit and the rotor circuit; $K_s = L_m / L_s$ and $K_r = L_m / L_r$ are stator and rotor coupling coefficients.

It should be noted, that the derivatives in the second and fourth equations of equation systems (1) and (2) feature the arguments of the resulting vectors as state variables, which are dependent on the position and rotational speed of the polar axis of the coordinate system. The arguments of the trigonometric functions are the differences in the arguments of these vectors, which are independent of the position and rotational speed of the polar axis, and which must be calculated additionally. Furthermore, if the rotational speed of the coordinate system is not synchronized with the rotational speed of the resulting vectors, the variables $\theta_{u_s}, \theta_{i_s}, \theta_{\psi_s}, \theta_{\psi_r}$ will increase indefinitely (including when $\dot{\omega}_k = 0$). This must be taken into account both when conducting research using such models and when designing control systems for these variables.

Mathematical models of the induction motor are more convenient, when the signals

$$\varphi_{u_s i_s} = \theta_{u_s} - \theta_{i_s}, \quad (13)$$

$$\varphi_{u_s \psi_s} = \theta_{u_s} - \theta_{\psi_s}, \quad (14)$$

$$\varphi_{i_s \psi_r} = \theta_{i_s} - \theta_{\psi_r}, \quad (15)$$

$$\varphi_{\psi_s \psi_r} = \theta_{\psi_s} - \theta_{\psi_r}, \quad (16)$$

characterizing the mutual angular position of the corresponding vectors relative to each other are used as state variables.

To obtain such models, the following equation is introduced in addition to equation systems (1)-(6) and (7)-(12):

$$\frac{d\theta_{u_s}}{dt} = \omega_{u_s} - \omega_k, \quad (17)$$

where $\dot{\omega}_{u_s}$ is the rotational speed of the resulting stator voltage vector relative to the stationary axis in space.

In this case, $\dot{\omega}_{u_s}$ is the frequency of the three-phase voltage supplying the motor.

If we subtract the equations (2) and (8) from equation (17) and also subtract the equations (4) and (10) from equation (2) and (8). And we perform the substitution of variable from (13)-(16) into these equations, we can represent the mathematical models of the induction motor in the following form:

- for the model in i_s, ψ_r variables

$$U_s \cos(\varphi_{u_s i_s}) = r_e \left(T_e \frac{di_s}{dt} + i_s \right) + \dots \dots + \omega_{u_s} - \frac{U_s}{\psi_s} \sin(\varphi_{u_s \psi_s}), \quad (25)$$

$$\dots + K_r z_p \omega \psi_r \sin(\varphi_{i_s \psi_r}) - \frac{K_r}{T_r} \psi_r \cos(\varphi_{i_s \psi_r}), \quad (18)$$

$$\frac{d\varphi_{u_s i_s}}{dt} = \frac{U_s \sin(\varphi_{u_s i_s})}{r_e T_e i_s} - \omega_{u_s} - \dots \dots - \frac{K_r z_p \omega \psi_r \cos(\varphi_{i_s \psi_r})}{r_e T_e i_s} - \frac{K_r \psi_r \sin(\varphi_{i_s \psi_r})}{T_r r_e T_e i_s}, \quad (19)$$

$$i_s \cos(\varphi_{i_s \psi_r}) = \frac{1}{K_r r_r T_r} \left(T_r \frac{d\psi_r}{dt} + \psi_r \right), \quad (20)$$

$$\frac{d\varphi_{i_s \psi_r}}{dt} = \frac{K_r r_r i_s \sin(\varphi_{i_s \psi_r})}{\psi_r} - \omega_{u_s} z_p \omega, \quad (21)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_c, \quad (22)$$

$$M_e = \frac{3}{2} K_r z_p i_s \psi_r \sin(\varphi_{i_s \psi_r}), \quad (23)$$

- for the model in ψ_s - ψ_r variables

$$U_s \cos(\varphi_{u_s \psi_s}) = \frac{r_s}{L'_s} \left(\frac{L'_s}{r_s} \frac{d\psi_s}{dt} + \psi_s \right) - \dots \dots - \frac{K_r r_s}{L'_s} \psi_r \cos(\varphi_{\psi_s \psi_r}), \quad (24)$$

$$\frac{d\varphi_{u_s \psi_s}}{dt} = \frac{K_r r_s \psi_r \sin(\varphi_{\psi_s \psi_r})}{L'_s \psi_s} + \dots$$

$$\psi_s \cos(\varphi_{\psi_s \psi_r}) = \frac{1}{K_s} \left(\frac{L'_r}{r_r} \frac{d\psi_r}{dt} + \psi_r \right), \quad (26)$$

$$\frac{d\varphi_{\psi_s \psi_r}}{dt} = \frac{K_s r_r \psi_s \sin(\varphi_{\psi_s \psi_r})}{L'_r \psi_r} - \omega_{u_s} + z_p \omega, \quad (27)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_c, \quad (28)$$

$$M_e = \frac{3}{2} \frac{K_r z_p}{L'_s} \psi_s \psi_r \sin(\varphi_{\psi_s \psi_r}), \quad (29)$$

The mathematical models (18)-(23) and (24)-(29) are invariant to the rotational speed of the coordinate system, and the variables ω_{U_s} , U_s , i_s , ψ_s , ψ_r , $\phi_{U_s \psi_s}$, $\phi_{U_s \psi_r}$ are limited in magnitude and have constant values in the steady-state mode. Mathematical models of the induction motor for any other combination of resulting vectors can be obtained in a similar manner. The variables ϕ_{sIs} ($\phi_{U_s \psi_s}$), represent the phase shift between the stator voltage vector U_s and the stator current vector i_s (the rotor flux linkage vector ψ_r). The derivative of $\phi_{U_s Is}$ ($\phi_{U_s \psi_s}$) with respect to time is the rate of change of the phase shift, or, in other words, the absolute slip of the resulting stator current vector (rotor flux linkage vector) relative to the resulting voltage vector.

In view of the foregoing, the structural diagrams (fig.1 and fig.2) of the induction motor correspond to equations (18)-(23) and (24)-(29).

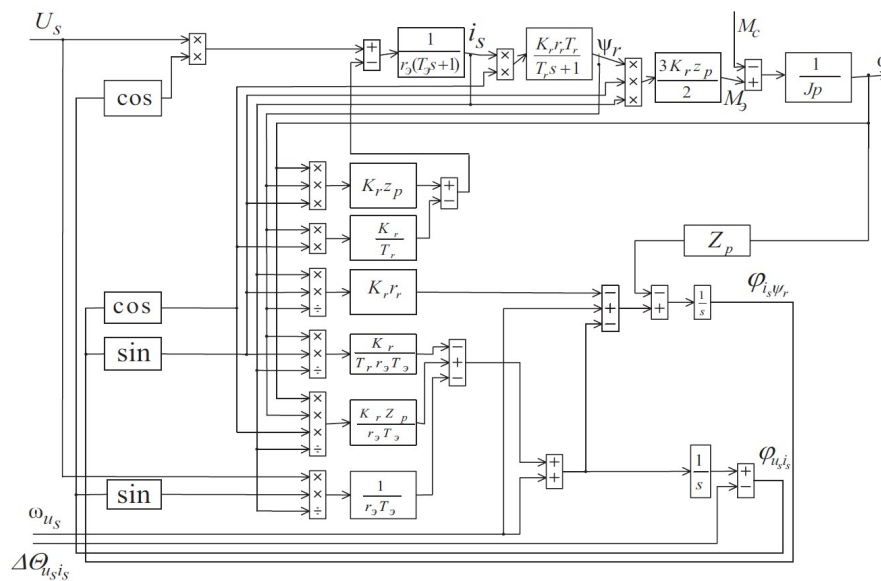


Figure 1. Computational model of an induction motor in i_s - ψ_r variables

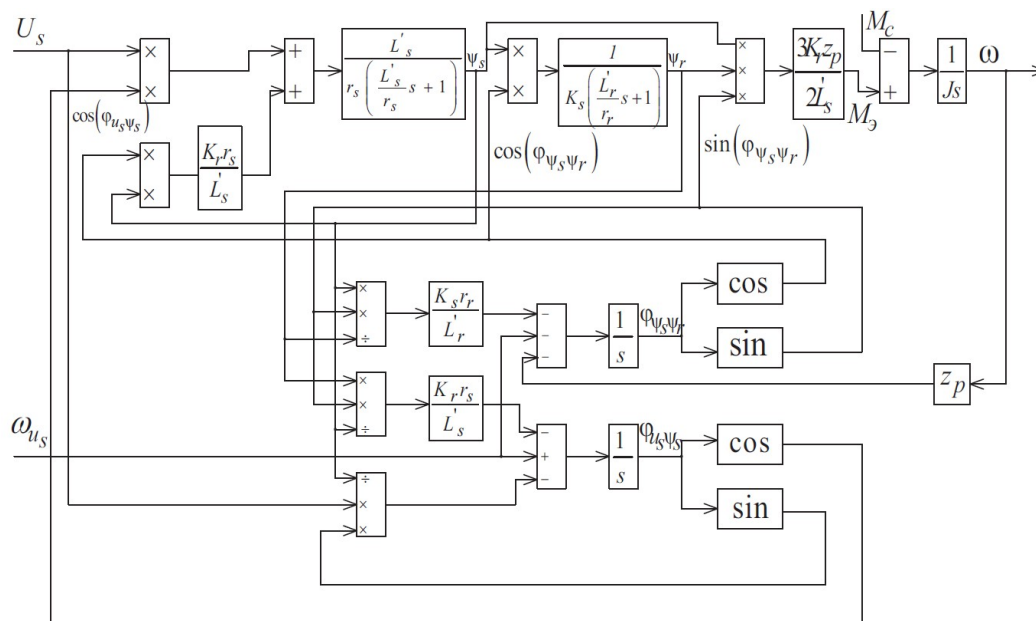


Figure 2. Computational model of an induction motor in ψ_s - ψ_r variables

However, difficulties arise in the modeling process concerning the operability of such models, due to the presence of a division by zero regime. These difficulties are easily eliminated by introducing negligibly small initial values for the moduli (magnitudes) of the vector variables.

In accordance with these diagrams, studies of all possible operating modes for a large number of 4A series induction motors were performed using the Matlab application software package. Processes were investigated in motors of various power ratings, nominal parameters, numbers of pole pairs, etc. The studies were carried out in comparison with the results obtained using models in Cartesian coordinates (d - q models).

As an example, fig. 3 – fig. 8 shows the graphs of the change in the state variables of a 4A132M4U3 induction motor during a direct start at nominal supply network parameters.

The conducted studies indicate that by using equations (18)-(23) and (24)-(29) and the computational model corresponding to fig.1 and fig.2, the electromagnetic torque and the rotational speed of the rotor shaft of the induction motor can be calculated with the same accuracy as when using equations in Cartesian coordinates (fig. 3, fig. 4).

Oscillogram in fig. 5 characterizes the instantaneous amplitude values of the stator winding phase currents, and oscillogram in fig. 6 shows the instantaneous values of the amplitude of the rotor winding flux linkage space wave.

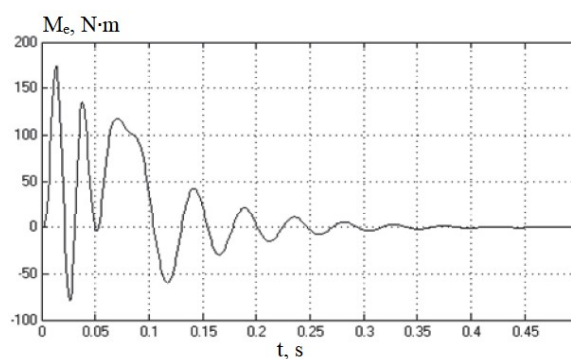


Figure 3. Oscillogram of the electromagnetic torque of the 4A132M4U3 induction motor during a direct start

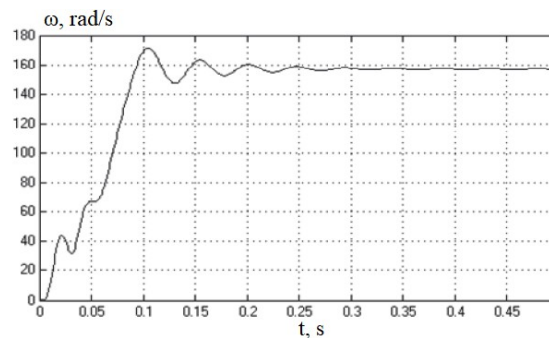


Figure 4. Oscillogram of the angular velocity of the 4A132M4U3 induction motor during direct start

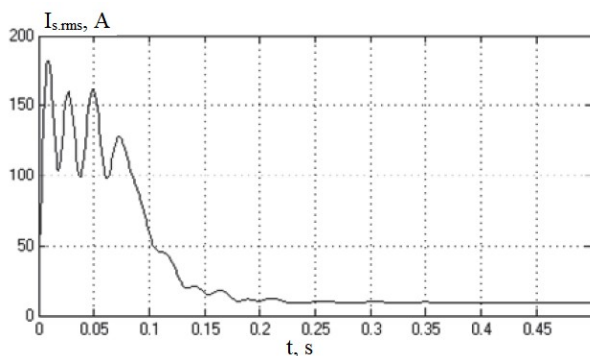


Figure 5. Oscillogram of the change in the RMS value of the stator current of the 4A132M4U3 induction motor during direct start

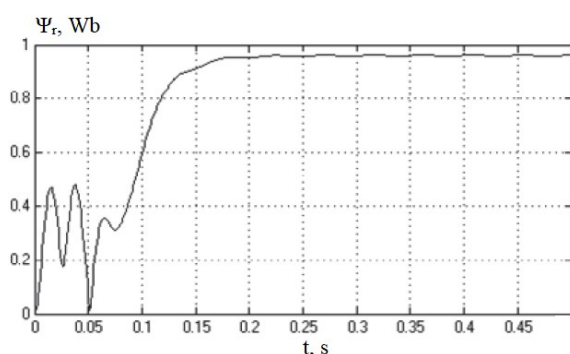


Figure 6. Oscillogram of the change in the rotor winding flux linkage of the 4A132M4U3 induction motor during direct start

The curve in fig. 7 illustrates the phase shifts between the phase voltages and currents of the stator winding, which do not exceed the value of $\pi/2$ in the steady-state mode. The phase shifts between the stator current vector and the rotor flux linkage vector (fig. 8) can exceed several revolutions and are characterized by the relationship $\phi_{Is\psi r} = 2 \cdot \pi \cdot K + \Delta \phi_{Is\psi r}$.

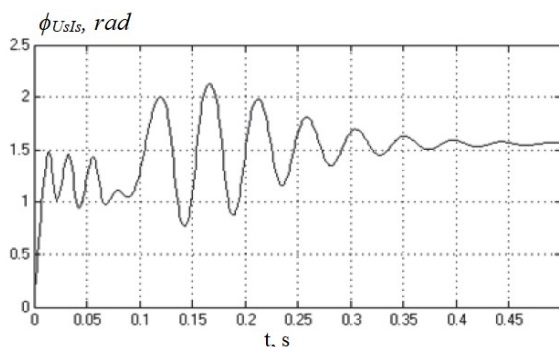


Figure 7. The value of the phase shift between the stator voltage and current vectors of the 4A132M4U3 induction motor during direct start

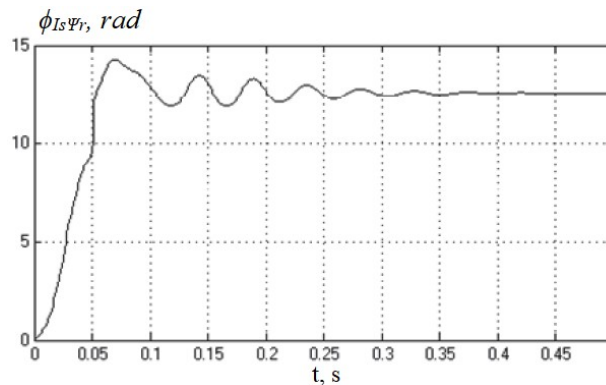


Figure 8. The value of the phase shift between the stator current vector and the rotor flux linkage vector of the 4A132M4U3 induction motor during direct start

Where, K is an integer whose value is determined by the motor type and parameters, as well as the algorithm for forming its dynamic modes; $\Delta \phi_{Is\psi r}$ is the angular displacement less than one revolution.

The presented equations and structural diagrams yield a new set of induction motor state variables (moduli and phase shifts of the resulting vectors), which can serve as a basis for creating new, competitive structures for automatic control systems of induction electric drives, relative to existing ones.

When conducting research using the developed models, information regarding the angular position and rotational speed of the coordinate system is not required.

V. CONCLUSION

The mathematical models of the induction machine were reviewed, which made it possible to reproduce its steady-state and dynamic processes with the same accuracy as models in Cartesian coordinates.

The use of phase shifts of the resulting vectors relative to each other as the state variables of the induction machine allowed for the creation of mathematical models in which all variables are limited in magnitude and have constant values in the steady-state mode, regardless of the coordinate system's rotational speed.

The operability of the presented mathematical models, when organizing the computational process in digital form, is ensured by introducing negligibly small initial values for the magnitudes of the vector variables.

Studies performed using the proposed models indicate that the vector and circular diagrams, traditionally used for analyzing the steady-state modes of the induction machine, characterize the angular position of certain vector variables with an accuracy of a multiple of $2\pi K$, where K is an integer.

The proposed mathematical models make it possible to obtain the amplitude values of the vector variables, their angular position relative to each other, the instantaneous values of $\cos\phi$, etc., without additional

calculations.

REFERENCE

- [1] Wang, W., & Xu, Z. (2021). Real-Time Parameter Identification of Induction Motor Based on Particle Swarm Optimization Algorithm. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 68(3), 1957–1967.
- [2] Messaoudi, M., Kherraz, M., & Benamrouche, N. (2023). Genetic Algorithm-Based Induction Motor Parameter Identification for Enhanced Sensorless Control. *Electric Power Components and Systems*, 51(4), 512–524.
- [3] Hassan, F., & Al-Tameemi, I. M. (2018). Online Parameter Estimation of Induction Motors Using Recursive Least Squares with Temperature Compensation. *IET Electric Power Applications*, 12(6), 756–764.
- [4] Novikov, A. S., & Cherkasov, A. V. (2020). A Nonlinear d-q Model of Induction Machine Including Cross-Saturation for High Dynamic Accuracy Control. *Journal of Electrical Engineering*, 71(5), 329–338.
- [5] Neacsu, D. O. (2025). AC/DC and DC/AC Current Source Converters. In *Switching Power Converters* (3rd ed.). CRC Press. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003592020-21>
- [6] Levi, E., Vuckovic, A., & Cvetkovic, I. (2017). Analysis of Induction Motor Dynamic Performance Using Vector Control and d-q Models with Saturation. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 32(1), 16–25.
- [7] Zhong, L., & Rahman, M. A. (2015). Direct Torque Control (DTC) of Induction Motor Using Space Vector Modulation and Saturation Compensation. *Electric Power Systems Research*, 122, 1–9.
- [8] Nouri, B., Kocewiak, L. H., Shah, S., Koralewicz, P., Gevorgian, V., & Sørensen, P. (2022). Generic Multi-Frequency Modelling of Converter-Connected Renewable Energy Generators Considering Frequency and Sequence Couplings. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 37(1), 547–559. <https://doi.org/10.1109/TEC.2021.3101041>
- [9] Toma, R., Popescu, M., & Boicea, V. A. (2021). Hybrid Modeling of Induction Motors: Integrating FEM-Derived Saturation Characteristics into d-q Model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 57(11), 1–9.
- [10] Renneboog, J., Hameyer, K., & Belmans, R. (2019). Accurate Iron Loss Prediction in Induction Machines Using Finite Element Analysis and Loss Separation. *IET Electric Power Applications*, 13(2), 273–281.
- [11] Choi, H. S., & Kim, Y. H. (2023). Improved Accuracy of Transient Analysis in Induction Motor using Tabular Representation of Non-Linear Inductances from FEM. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, 38(5), 450–459.
- [12] Milano, F. (2010). *AC/DC Devices. In Power System Modelling and Scripting*. Springer Berlin Heidelberg. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-13669-6_18.
- [13] Bortolotto, M., Sadowski, N., & Bastos, J. P. (2016). Thermal Model for Prediction of Winding Resistance and Temperature in Induction Motors for Protection Purposes. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 52(5), 3687–3695.
- [14] Mohamadian, M., & Varma, R. K. (2018). Application of Polar Coordinate Equations for Dynamic Simulation of Unsaturated Induction Machines. *International Journal of Electrical Engineering & Technology*, 9(3), 20–30.
- [15] Chaudhary, P., & Singh, Y. P. (2024). Modeling of Solid Rotor Induction Motors Incorporating Eddy Current Effects and Non-Linear Magnetization. *Energy Conversion and Management*, 303, 118123.
- [16] Ruiz Florez, H. A., López, G. P., Jaramillo-Duque, Á., López-Lezama, J. M., & Muñoz-Galeano, N. (2022). A Mathematical Modeling Approach for Power Flow and State Estimation Analysis in Electric Power Systems through AMPL. *Electronics*, 11(21), Article 3566. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics11213566>

Received 09.10.2025;

Accepted 17.11.2025;

Published 26.12.2025;

ВДОСКОНАЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ЗМІННОГО СТРУМУ

ГІЗЕНКО М.Д.

аспірант кафедри електричних та електронних апаратів, Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8584-6022>, e-mail: nhizenko.freshcode@gmail.com;

ЛУКАШ Д.В.

аспірант кафедри електричних та електронних апаратів, Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9191-5179>, e-mail: lukash.dmitry.v@gmail.com;

ШВЕД А.С.

аспірант кафедри електричних та електронних апаратів, Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6822-1190>, e-mail: gemix555@gmail.com;

Мета роботи. Розробка математичних моделей електромеханічних перетворювачів змінного струму інваріантних до швидкості повороту системи координат з використанням в якості змінних стану електромеханічних перетворювачів модулів результуючих векторів трифазних змінних та їх фазових зрушень відносно один одного для розробки нових структур автоматизованих асинхронних електроприводів.

Методи дослідження. методи математичного моделювання електромеханічних систем, чисельні методи щодо вирішення системи диференціальних рівнянь першого порядку для розробки математичних моделей електромеханічних перетворювачів змінного струму інваріантних до швидкості повороту системи координат.

Отримані результати. Розглянуті математичні моделі електромеханічних перетворювачів, які дозволили відтворювати усталені та динамічні процеси з тією ж точністю, що й моделі в декартових координатах. Використання в якості змінних стану електромеханічного перетворювача фазових зрушень результуючих векторів щодо один до одного дозволило отримати математичні моделі, в яких всі змінні обмежені за величиною і в усталеному режимі мають постійні значення незалежно від швидкості обертання координатної системи. Виконані за допомогою запропонованих моделей дослідження свідчать про те, що векторні та кругові діаграми, які використовуються для аналізу встановлених режимів електромеханічних перетворювачів, характеризують кутове положення деяких векторних змінних з точністю кратної $2\pi K$.

Наукова новизна. Запропонована математична модель електромеханічних перетворювачів змінного струму інваріантних до швидкості повороту системи координат, яка дозволяє застосувати модулі результуючих векторів трифазних змінних та їх фазових зрушень відносно один одного в якості змінних стану електромеханічних перетворювачів.

Практична цінність. Запропоновані математичні моделі дозволяють без додаткових обчислень отримувати амплітудні значення векторних змінних, їх кутове положення щодо один одного, миттєві значення $\cos\varphi$, тощо.

Ключові слова: асинхронний двигун, результуючий вектор, математичні моделі, полярні координати, швидкість обертання

УДК 621.316.3

СИСТЕМАТИЧНА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ КЛАСИЧНИМ МЕТОДОМ

- БУТ Д.Р. аспірант кафедри електричних машин Національного університету "Запорізька політехніка", Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5918-0337>, e-mail: but.danil@gmail.com;
- КЛИМОВ О.Ф. аспірант кафедри електричних машин Національного університету "Запорізька політехніка", Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-4126-7534>, e-mail: afklymov@gmail.com;
- ТИХОВОД С.М. д-р техн. наук, професор, професор кафедри електричних машин Національного університету "Запорізька політехніка", Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0748-1735>, e-mail: stikhovod@gmail.com;
- КОЗЛОВ В.В. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електроприводу та автоматизації промислових установок Національного університету "Запорізька політехніка", Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0048-2535>, e-mail: vvkozlov@zp.edu.ua.

Мета роботи. Традиційно розрахунки перехідних процесів класичним методом виконувались тільки у лінійних електричних колах які, містять не більше двох реактивних елементів. Якщо кількість реактивних елементів становила три, то задача значно ускладнялася, а при більшій кількості задача взагалі не могла бути розв'язаною. Пропонується систематична методика розрахунку перехідного процесу класичним методом у лінійних електричних колах, що містять декілька реактивних елементів.

Методи дослідження. Методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, матричні методи, комп'ютерне програмування, теорія електричних кіл.

Отримані результати. У роботі запропоновано систематичну методику розрахунку перехідного процесу класичним методом у лінійних електричних колах, що містять більше двох реактивних елементів. Це досягнуто тим, що усі змінні поділено на групи: похідні змінних стану, змінні стану та залежні змінні. Кожна група змінних складає окремий вектор. Матричними перетвореннями диференціально-алгебраїчні рівняння стану переведені у нормальну форму. Це дало можливість знайти корні диференціальних рівнянь. Матричними перетвореннями також знайдені постійні інтегрування.

Наукова новизна. У існуючих підручниках класичний метод розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах обмежується розглядом кіл, що містять не більше двох незалежних реактивних елементів, тому що при більшій кількості реактивних елементів задача різко ускладнюється. У цій роботі знімається таке обмеження.

Практична цінність. Розроблено комп'ютерну програму розрахунку перехідного процесу в лінійному електричному колі, що містить три незалежні реактивні елементи. Програма може бути модифікована для моделювання складніших кіл з більшою кількістю реактивних елементів. Аналітичні методи розрахунку перехідних процесів можуть бути використані для оцінки похибки розрахунків наближеними методами, наприклад числовими методами. Аналітичні методи дозволяють отримати точне розв'язання в аналітичній формі, що описані математичними виразами. Отримані математичні вирази результатів розв'язку дозволяють краще проводити їхнє дослідження.

Ключові слова: перехідні процеси; класичний метод; лінійні електричні кола; диференціальні рівняння; реактивні елементи.

I. ВСТУП

Різка зміна режиму роботи силового обладнання (наприклад, увімкнення його під номінальну напругу) призводить до перехідного процесу в електричній системі. Під час перехідного процесу стрибок струму може значно перевищити його номінальне значення.

Тому задача оцінки перехідного струму при різкій зміні режиму роботи силового обладнання є актуальним.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах, переважно, виконується аналітичними

та числовими методами.

Числові методи розрахунку стають все більш популярними останнім часом. Для моделювання перехідних процесів в електричних колах в даний час використовується низка відомих комерційних програмних комплексів, таких як ЕМТР [1] - [3], Electronics Workbench [4], Simulink [5] - [6] та інші [7] - [8]. Це пов'язано з прогресом цифрової обчислювальної техніки та з розвитком числових методів, що використовуються під час розрахунку перехідних процесів у електричних колах. Числові методи розрахунку дозволяють врахувати складну конфігурацію досліджуваних кіл і навіть нелінійні властивості матеріалів. Числові методи моделювання дозволяють швидко поставити і розв'язати дуже складні задачі, що мають практичне значення. Одним з недоліків числових методів моделювання електричних кіл є необхідність застосування комп'ютера з великою оперативною пам'яттю та з великою швидкістю розрахунків, а час моделювання буває значним. Іншим недоліком числових методів є те, що при зміні хоча б одного параметра моделі необхідно виконувати новий розрахунок.

Аналітичні методи дозволяють отримати точне розв'язання в аналітичній формі, відповідне до фізичних умов, що описані математичними виразами. Як правило, аналітичними методами вирішуються задача, сформульовані за допомогою рівнянь, які складені за законами Кірхгофа. Головною перевагою аналітичних методів перед іншими є можливість одержати точний розв'язок в аналітичній формі, зручної для подальшого дослідження. Недоліком є те, що аналітичний розв'язок можна одержати тільки для досить простих лінійних електричних кіл і для деяких нелінійних електричних кіл. Тому аналітичні методи застосовують тільки для попередніх розрахунків або для розрахунків, що дозволяють тестувати інші методи.

Звичайно студентам викладають класичний метод розрахунків перехідних процесів у лінійних електричних колах [9] - [11]. При цьому обмежуються розглядом електричних кіл, що містять не більш двох незалежних реактивних елементів, тому що при більшій кількості реактивних елементів задача різко ускладнюється або взагалі не має аналітичного розв'язання.

При використанні будь якого методу аналізу перехідних процесів на першому етапі необхідно визначити незалежні початкові умови. Цей етап здебільше виконують з використанням методів розрахунку установлених режимів лінійних електричних кіл [11] - [14].

III. МЕТА РОБОТИ

Традиційно розрахунки перехідних процесів класичним методом виконувались тільки у лінійних електричних колах які, містять не більше двох реактивних елементів. Якщо кількість реактивних елементів становила три, то задача значно ускладнялася, а при більшій кількості задача взагалі не могла бути розв'я-

заної. У даній роботі пропонується систематична методика розрахунку перехідного процесу класичним методом у лінійних електричних колах, що містять декілька (три та більше) реактивних елементів.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГУ МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Викладемо пропоновану методику на прикладі електричного кола (рис. 1), що містить три реактивні елементи.

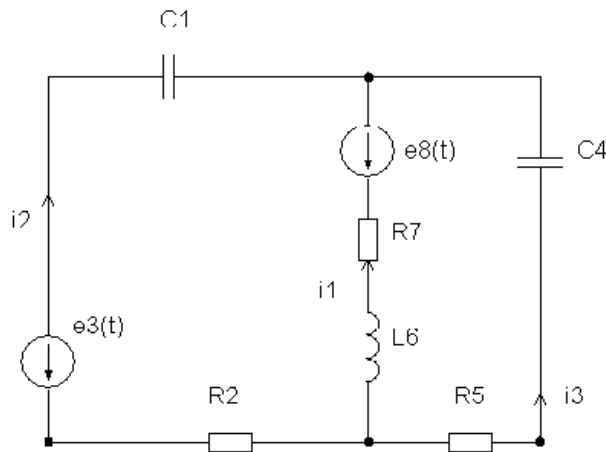


Рисунок 1. Модельне електричне коло

Вважаємо, що до моменту часу $t = 0$ усі джерела ЕРС були відключені, а включаються вони при $t = 0$.

Складемо рівняння стану для миттєвих значень за законами Кірхгофа (1):

$$\begin{cases} L_6 \cdot i_1' + R_7 \cdot i_1 - R_2 \cdot i_2 - u_{C1} = e_3(t) - e_8(t) \\ C_1 \cdot u_{C1}' - i_2 = 0 \\ C_4 \cdot u_{C4}' - i_3 = 0 \\ -i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ u_{C4} - R_2 \cdot i_2 + R_5 \cdot i_3 - u_{C1} = e_3(t) \end{cases}, \quad (1)$$

де i_1, i_2, i_3 - струми віток; u_{C1}, u_{C4} - напруги на затисках конденсаторів; L_6 - індуктивність котушки; R_2, R_5, R_7 - опори резистивних елементів; $e_3(t) = E_{3m} \cdot \sin(\omega t + \psi_3)$, $e_8(t) = E_{8m} \cdot \sin(\omega t + \psi_8)$ - функції зміни в часі ЕРС джерел.

Розрахунок перехідного процесу класичним методом починається з розрахунків примушеного (установленого) режиму електричного кола символічним методом. Для цього переходимо до схеми заміщення згідно зі схемою рис. 2

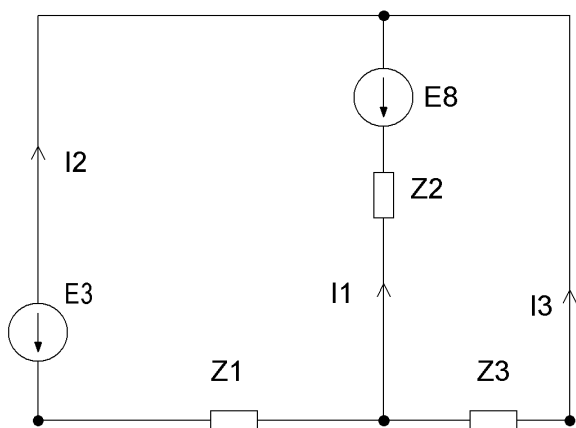


Рисунок 2. Модельне електричне коло в символічній формі

Складемо рівняння стану за законами Кірхгофа у символічній формі:

$$\begin{cases} \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = \underline{E}_3 - \underline{E}_8 \\ \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 = -\underline{E}_3 \\ \underline{I}_3 - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

де $\underline{E}_3 = E_{m3} \cdot \exp(\psi_3 \cdot j)$; $\underline{E}_8 = E_{m8} \cdot \exp(\psi_8 \cdot j)$ - ЕРС джерел напруги у символічній формі; $\underline{Z}_1 = R_7 + j \cdot \omega \cdot L_6$; $\underline{Z}_2 = R_2 - \frac{j}{\omega \cdot C_6}$; $\underline{Z}_3 = R_5 - \frac{j}{\omega \cdot C_4}$ - повні опори віток у символічній формі.

У матричній формі система (2) має вигляд:

$$\underline{M}_c \cdot \underline{Y} = \underline{F}, \quad (3)$$

де $\underline{M}_c = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ - квадратна матриця кое-

фіцієнтів при невідомих системи, $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$ - матриця-

стовбець невідомих, $\underline{F} = \begin{bmatrix} E_3 - E_8 \\ -E_3 \\ 0 \end{bmatrix}$ - матриця-

стовбець вільних членів рівняння.

Розв'язок системи матричним методом:

$$\underline{Y} = \underline{M}_c^{-1} \cdot \underline{F}.$$

Значення струму крізь індуктивний елемент та напруг на затискачах ємнісних елементів у символічному вигляді:

$$I_1 = Y_1;$$

$$U_{C1} = Y_2 \cdot (-j / (\omega \cdot C_1));$$

$$U_{C4} = Y_2 \cdot (-j / (\omega \cdot C_4)).$$

Значення миттєвих значень струму крізь індуктивний елемент та напруг на затискачах ємнісних елементів:

$$i_{1p} = \text{Im}\{I_1 \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t)\};$$

$$u_{C1p} = \text{Im}\{u_{C1} \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t)\};$$

$$u_{C4p} = \text{Im}\{u_{C4} \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t)\}.$$

Змінними стану кола є струм у котушці індуктивності i_1 , напруги на конденсаторах u_{C1} , u_{C4} .

Усі змінні розділимо на типи: похідні змінних стану (вектор X_S'), змінні стану (вектор X_S) і залежні змінні (вектор X_Z). Введемо єдиний вектор усіх змінних (4):

$$\underline{X} = [\underline{X}_S' \quad \underline{X}_S \quad \underline{X}_Z]^T. \quad (4)$$

Система рівнянь (1) у матричній формі має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \underline{D}_d \cdot \underline{X}_S' + \underline{D}_S \cdot \underline{X}_S + \underline{D}_Z \cdot \underline{X}_Z = \underline{F}_d \\ \underline{A}_S \cdot \underline{X}_S + \underline{A}_Z \cdot \underline{X}_Z = \underline{F}_a \end{cases}, \quad (5)$$

де використані підвектори: $\underline{X}_S'$ - містить значення похідних змінних стану; $\underline{X}_S$ - містить значення змінних стану; $\underline{X}_Z$ - містить значення залежних змінних, $\underline{D}_d$ - підматриця коефіцієнтів перед похідними змінних стану в диференціальних рівняннях; $\underline{D}_S$ - підматриця коефіцієнтів перед змінними стану в диференціальних рівняннях; $\underline{D}_Z$ - підматриця коефіцієнтів перед залежними змінними в диференціальних рівняннях; $\underline{A}_S$ - підматриця коефіцієнтів перед змінними стану в алгебраїчних рівняннях; $\underline{A}_Z$ - підматриця коефіцієнтів перед залежними змінними в алгебраїчних рівняннях.

Система рівнянь (5) у компактній матричній формі має вигляд:

$$\underline{M} \cdot \underline{X} = \underline{F}, \quad (6)$$

де підматриці системи (6) мають наступний вигляд:

$$\underline{D}_d = \begin{bmatrix} L_6 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}; \quad \underline{D}_S = \begin{bmatrix} R_7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\underline{D}_Z = \begin{bmatrix} -R_2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \underline{A}_S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\underline{A}_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R_2 & R_5 \end{bmatrix}.$$

Матриця M системи (6) має вигляд:

$$M = \begin{bmatrix} D_d & D_S & D_Z \\ 0 & A_S & A_Z \\ 0 & E & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де E - одинична матриця: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Вектор-стовпець правих частин:

$$F = \begin{bmatrix} F_d \\ F_S \\ F_0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де підматриці вектору-стовпця (8) мають вигляд:

$$F_d = \begin{bmatrix} e_3 - e_8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; F_S = \begin{bmatrix} 0 \\ e_3 \end{bmatrix}; F_0 = \begin{bmatrix} i_{10} \\ u_{C10} \\ u_{C40} \end{bmatrix}.$$

Розглянемо систему рівнянь (6) для моменту часу $t = 0$:

$$\begin{bmatrix} D_d & D_S & D_Z \\ A_d & A_S & A_Z \\ 0 & E & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X'_S(t=0) \\ X_S(t=0) \\ X_Z(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d(t=0) \\ F_S(t=0) \\ F_0(t=0) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Розв'язок шукаємо з використанням матричного методу:

$$X_I = M^{-1} F. \quad (10)$$

У результаті розв'язку рівняння (10) одержимо початкові значення всіх змінних рівняння (4):

$$\frac{di_{10}}{dt} = X_I(1); \quad \frac{du_{C10}}{dt} = X_I(2); \quad \frac{du_{C40}}{dt} = X_I(3);$$

$$i_{10} = X_I(4); u_{C10} = X_I(5).$$

Продиференціюємо рівняння (6):

$$M \cdot X' = F' \quad (11)$$

або

$$M \cdot \begin{bmatrix} X''_S \\ X'_S \\ X'_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_d \\ F'_S \\ F'_0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

де $F'_d = \begin{bmatrix} e'_3 - e'_8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; F'_S = \begin{bmatrix} 0 \\ e'_3 \end{bmatrix}; F'_0 = \begin{bmatrix} i'_{10} \\ u'_{C10} \\ u'_{C40} \end{bmatrix}$.

Розглянемо систему рівняння (11) для моменту часу $t = 0$ та розв'яжемо її скориставшись матричним методом:

$$X_2 = M^{-1} \cdot F'. \quad (13)$$

У результаті розв'язку рівняння (11) отримаємо початкові значення других похідних змінних стану:

$$\frac{d^2 i_{10}}{dt^2} = X_2(1); \quad \frac{d^2 u_{C10}}{dt^2} = X_2(2); \quad \frac{d^2 u_{C40}}{dt^2} = X_2(3).$$

Для обчислення коренів характеристичного рівняння праву частину рівнянь системи (5) замінюємо 0:

$$\begin{cases} D_d \cdot X'_S + D_S \cdot X_S + D_Z \cdot X_Z = 0 \\ A_S \cdot X_S + A_Z \cdot X_Z = 0 \end{cases}. \quad (14)$$

Система рівнянь (14) з нульовою правою частиною описує вільні складові. Виконаємо наступні перетворення. Із другого рівняння виразимо X_Z :

$$X_Z = -A_S^{-1} A_Z \cdot X_S. \quad (15)$$

і підставимо в перше рівняння. У результаті одержимо:

$$D_d \cdot X'_S + D_S \cdot X_S + D_Z \cdot (-A_S^{-1} \cdot A_Z \cdot X_S) = 0. \quad (16)$$

Звідси отримаємо:

$$X'_S = D^{-1}_d \cdot (D_Z \cdot A_S^{-1} \cdot A_S - D_S) \cdot X_S. \quad (17)$$

Це є матричне рівняння щодо змінних стану в нормальній формі. Отже, власні значення матриці

$$D^{-1}_d \cdot (D_Z \cdot A_S^{-1} \cdot A_S - D_S) \quad (18)$$

є коріннями характеристичного рівняння. Їхні значення можуть бути використані для обчислення вільних складових перехідного процесу. Для знаходження власних значень матриць у системах Matlab [5] і GNU Octave [15] є функція eig.

Власні значення позначимо p_1, p_2, p_3 .

Загальний розв'язок має вигляд:

$$i_1(t) = A_1 \cdot \exp(p_1 t) + A_2 \cdot \exp(p_2 t) + A_3 \cdot \exp(p_3 t) + i_{1p}(t). \quad (19)$$

Скористаємося знайденими початковими умовами для знаходження постійних інтегрування. Для цього розглянемо наш загальний розв'язок для i_1 (25) і двічі продиференціюємо його:

$$i'_1(t) = p_1 \cdot A_1 \cdot \exp(p_1 t) + p_2 \cdot A_2 \cdot \exp(p_2 t) + p_3 \cdot A_3 \cdot \exp(p_3 t) + i_{1p}'(t), \quad (20)$$

$$i''_1(t) = p_1^2 \cdot A_1 \cdot \exp(p_1 t) + p_2^2 \cdot A_2 \cdot \exp(p_2 t) + p_3^2 \cdot A_3 \cdot \exp(p_3 t) + i_{1p}''(t). \quad (21)$$

Покладемо в рівняннях (19-21) $t = 0$ і одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = i_l(0) - i_{lp}(0) \\ p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 + p_3 \cdot A_3 = i_l'(0) - i_{lp}'(0) \\ p_1^2 \cdot A_1 + p_2^2 \cdot A_2 + p_3^2 \cdot A_3 = i_l''(0) - i_{lp}''(0) \end{cases} \quad (22)$$

Запишемо систему рівнянь (22) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (i_l - i_{lp})(t=0) \\ (i_l - i_{lp})'(t=0) \\ (i_l - i_{lp})''(t=0) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь стосовно A_1 , A_2 , A_3 і одержимо функцію розв'язку для струму (19).

Аналогічним чином можна отримати функції для напруг u_{C1} і u_{C4} .

Що стосується обчислення залежних змінних, то рівняння (15) показує, що всі залежні змінні можуть бути обчислені через змінні стани.

Згідно із запропонованою методикою розроблена комп'ютерна програма. Із програмою можна ознайомитися по посиланню [16].

На рис. 3-5 наведені результати розрахунків.

Перевірка виконувалась за законами Кірхгофа. На рис. 6 наведений графік зміни погрішності виконання першого закону Кірхгофа, тобто $esp = i_l(t) + i_2(t) - i_3(t)$. Перевірка показала, що погрішність не перевищує значення $3 \cdot 10^{-14}$, що свідчить про вірність розрахунків.

Виконані перевірки за другим законом Кірхгофа також свідчать про вірність розрахунків.

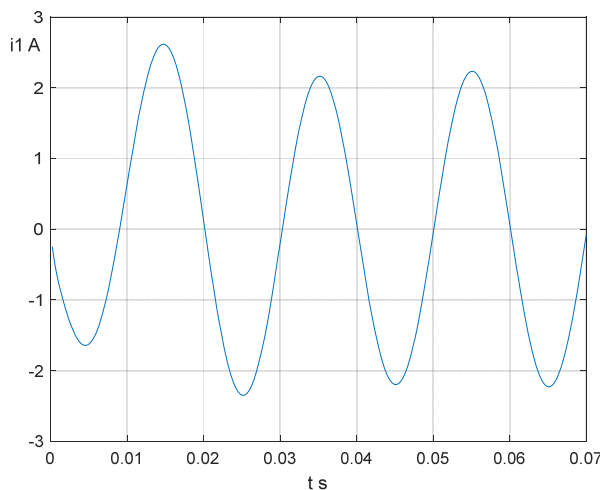


Рисунок 3. Залежність струму i_l від часу

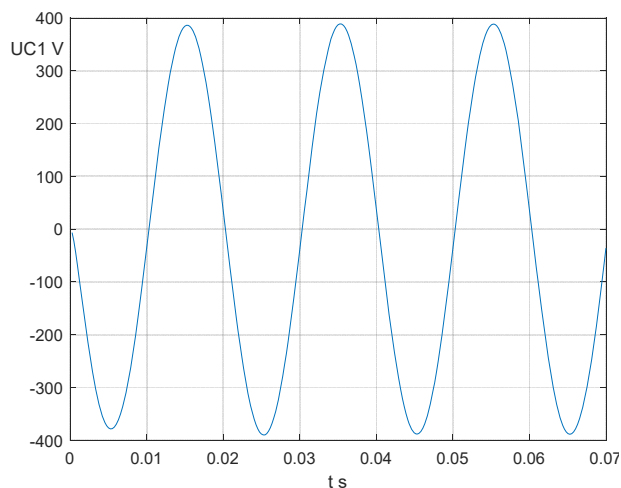


Рисунок 4. Залежність напруги u_{C1} від часу

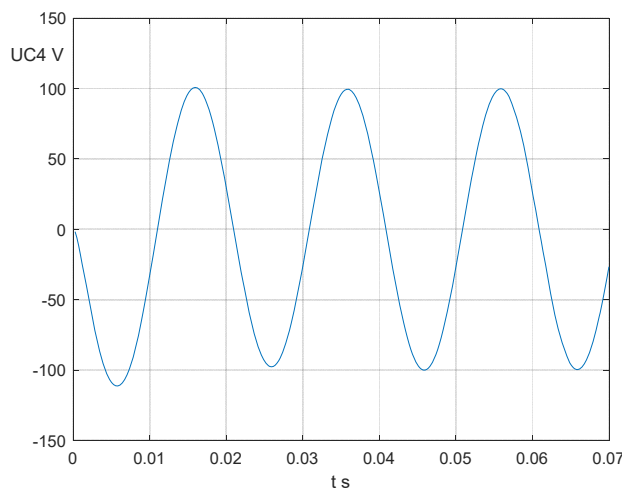


Рисунок 5. Залежність напруги u_{C4} від часу

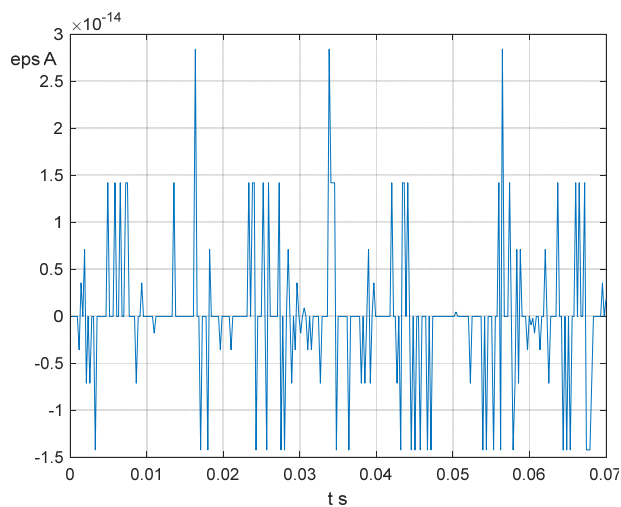


Рисунок 6. Графік зміни погрішності виконання першого закону Кірхгофа

V. ВИСНОВКИ

1. Розроблена систематична методика розрахунків перехідних процесів у лінійних електричних колах класичним методом дозволяє виконувати розрахунки перехідних процесів у складних лінійних електричних колах, що значно прискорює моделювання в порівнянні з розрахунками чисельними методами.

2. Запропонована методика може бути використана й для розрахунків перехідних процесів в електричних колах, що містять ключові елементи. У цьому випадку після кожної комутації необхідний новий розрахунок класичним методом.

3. Запропонована методика може бути використана для студентів при вивченні курсу теоретичних основ електротехніки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] 1. Eiichi, H., Tadashi K., Junichi, A., Hisatochi, I. (2016). Power System Transient Analysis: Theory and Practice using Simulation Programs (ATP-EMTP). ISBN: 9781118737491 |DOI: 10.1002/9781118737491.
- [2] 2. Electromagnetic Transient Program (EMTP) Application Guide // EPRI Report No: EL – 4650, Project 2149-1, Westinghouse Electric Corp., Pittsburgh, PA. - 1986.
- [3] EMTP Rule book and EMTP Theory book. Bonneville Power Administration, Branch of System Engineering. Portland, Oregon 97208-3621, United States of America. – [Електронний ресурс]. – [режим доступу]: (www.emtp.org).
- [4] Методичні вказівки до лабораторних робіт у віртуальній лабораторії з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" для студентів спеціальностей: 141 всіх форм навчання. Частина 1. /Укл.: С.М. Тиховод, В.В. Козлов, О.В. Набокова. - Запоріжжя: НУЗП, 2021. - 46 с. <http://eir.zntu.edu.ua/handle/123456789/7988>.
- [5] The Matwork. Accelerating the pace of engineering and science. Support. <http://www.mathworks.com/support/>.
- [6] Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" для студентів спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" всіх форм навчання з використанням програми "Electronics Workbench". Частина 2 / уклад. : С.М. Тиховод, В.В. Козлов, В.О. Волков, О.В. Набокова,
- І.О.Афанасьєва, Г.М. Романіченко, А.І. Кравець. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 62 с. <https://eir.zp.edu.ua/items/a963fac5-3829-4aa9-873e-e55721f2a417>.
- [7] Тиховод, С.М. Моделювання перехідних електромагнітних процесів у трансформаторах на основі магнітоелектричних схем заміщення: Підручник / С.М. Тиховод. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. - 94 с. <http://eir.zntu.edu.ua/handle/123456789/2304>.
- [8] Сегеда, М.С. Математичне моделювання в електроенергетиці / М.С. Сегеда. - Львів: "Львівська політехніка", 2002. - 300 с.
- [9] Качан, Ю.Г. Лінійна електротехніка (теоретичні основи) [Текст]: навч. посібник для студ. електротехн. та електроенергет. спец. технолог. вузів / Ю.Г. Качан. - ІСІО, Запорізька держ. інженерна академія. – Запоріжжя, 1995. - 211 с.
- [10] Перхач, В.С. Математичні задачі електроенергетики / В.С. Перхач; 3-є вид. перероб. і доп. - Львів: Вища школа, 1989. - 464 с.
- [11] Kundur, P. Power system stability and control / P. Kundur, N.J. Balu, M.G. Lauby, New York: McGraw-Hill, 1994. – 1176 p.
- [12] Nabokova, O.V. Theoretical electrical engineering [Текст]: навчальний посібник для електротехн. спец. ВНЗів / O.V. Nabokova. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2015. – 477 p.
- [13] Козлов, В. В. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл [Текст]: навчальний посібник / В.В. Козлов, О.В. Набокова. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016. – 428 с.
- [14] Hayt, W.H. Engineering circuit analysis / W.H. Hayt, J.E. Kemmerly, S.M. Durbin., New York, McGraw-Hill, 2012, 854 p.
- [15] GNU Octave [Електронний ресурс]. – режим доступу: <http://www.gnu.org/software/octave/index.html>.
- [16] Програма для розрахунків перехідного процесу в модельній схемі. – [Електронний ресурс] . – режим доступу: https://drive.google.com/file/d/1acibOQ_Q8kIN8cumDGgBHS8EschXMQ9S/view?usp=sharing.

Надійшла (Received) 19.10.2025;

Прийнята (Accepted) 05.12.2025;

Опублікована (Published) 26.12.2025;

SYSTEMATIC METHODOLOGY FOR CALCULATING TRANSIENT PROCESSES IN LINEAR ELECTRIC CIRCUITS BY THE CLASSICAL METHOD

BUT D.R.

postgraduate student of the department of Electrical Machines, National University "Zaporizhzhia Polytechnic", Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009->

- 5918-0337, e-mail: but.danil@gmail.com;
- KLYMOV A.F. postgraduate student of the department of Electrical Machines, National University "Zaporizhzhia Polytechnic", Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-4126-7534>, e-mail: afklymov@gmail.com;
- TIKHOVOD S.M. Sci.D., Professor, Professor of the Department of Electrical Machines, National University "Zaporizhzhia Polytechnic", Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0748-1735>, e-mail: stikhovod@gmail.com;
- KOZLOV V.V. Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of "Electric Drive and Automation of Industrial Plants", National University "Zaporizhzhia Polytechnic", Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0048-2535>, e-mail: vvkozlov@zp.edu.ua.

Purpose. Traditionally, transient calculations by classical method were performed only in linear electrical circuits containing no more than two reactive elements. If the number of reactive elements was three, the problem became significantly more complicated, and with a larger number, the problem could not be solved at all. A systematic methodology for calculating the transient process by the classical method in linear electrical circuits containing several reactive elements is proposed.

Methodology. Methods of integrating ordinary differential equations, matrix methods, computer programming, theory of electrical circuits.

Findings. The paper proposes a systematic method for calculating the transient process in linear electrical circuits containing more than two reactive elements using the classical method. This is achieved by dividing all variables into groups: derivatives of state variables, state variables, and dependent variables. Each group of variables constitutes a separate vector. By matrix transformations, The differential-algebraic equations of state are converted into normal form by matrix transformations. This made it possible to find the roots of differential equations. The constants of integration were also found by matrix transformations.

Originality. In existing textbooks, the classical method of calculating transients in linear electrical circuits is limited to considering circuits containing no more than two independent reactive elements, because with a larger number of reactive elements, the problem becomes dramatically more complicated. This work removes this limitation.

Practical value. A computer program has been developed to calculate the transient process in a linear electrical circuit containing three independent reactive elements. The program can be modified to simulate more complex circuits with more reactive elements. Analytical methods for calculating transients can be used to estimate the error of calculations using approximate methods, such as numerical methods. Analytical methods allow obtaining an exact solution in analytical form, which is described by mathematical expressions. The obtained mathematical expressions of the solution results allow better perform their research.

Keywords: transient processes; classical method; linear electrical circuits; differential equations; reactive elements.

REFERENCES

- [1] Eiichi, H., Tadashi K., Junichi, A., Hisatochi, I. (2016). Power System Transient Analysis: Theory and Practice using Simulation Programs (ATP-EMTP). ISBN: 9781118737491 |DOI: 10.1002/9781118737491.
- [2] Electromagnetic Transient Program (EMTP) (1986) Application Guide // EPRI Report No: EL – 4650, Project 2149-1, Westinghouse Electric Corp., Pittsburgh, PA.
- [3] EMTP Rule book and EMTP Theory book. Bonneville Power Administration, Branch of System Engineering. Portland, Oregon 97208-3621, United States of America. – [Electronic resource]. – access mode: (www.emtp.org).
- [4] Methodical instructions for laboratory work in a virtual laboratory on the discipline "Theoretical Fundamentals of Electrical Engineering" for students of specialties: 141 all forms of learning. Part 1. /Comp.: S.M. Tikhovod, V.V. Kozlov, O.V. Nabokova. - Zaporizhzhia: NUZP, 2021. - 46 p. <http://eir.zntu.edu.ua/handle/123456789/7988>.
- [5] The Matwork. Accelerating the pace of engineering and science. Support. <http://www.mathworks.com/support/>.
- [6] Methodical reference for laboratory work in the discipline "Theoretical foundations of electrical engineering" for students majoring in 141 "Electrical power, electrical engineering and electromechanics" of all forms of education using the program "Electronics Workbench" Part 2/ Comp.: S.M. Tihovod, V.V. Kozlov, V.O Volkov, O.V. Nabokova, I.A. Afanasyeva, G.M.; Romanichenko, A.I. Kravez - Zaporizhzhia: NUZP, 2021. - 62 p.
- [7] Tikhovod, S.M. Modeling of transient electromagnetic processes in transformers based on magnetoelectric equivalent circuits: Textbook / S.M. Tykhovod. - Zaporizhzhia: ZNTU, 2017. - 94 p. <http://eir.zntu.edu.ua/handle/123456789/2304>.

- [8] Szegeda, M.S. Mathematical modeling in electric power engineering / M.S. Szegeda. - Lviv: "Lviv Polytechnic", 2002. - 300 p.
- [9] Kachan, Yu.G. (1995). Linear electrical engineering (theoretical foundations) [Text]: textbook for students of electrical engineering and power engineering special specialties of technological universities / Yu.G. Kachan; ISIO, Zaporizhia state Engineering Academy. Zaporizhzhya, 211.
- [10]Perkhach, V.S. (1989). Mathematical problems of electric power engineering / V.S. Perkhach; 3rd edition revised and supplemented. Lviv: Higher School, 464 p.
- [11]Kundur, P. (1994). Power system stability and control / P. Kundur, N.J. Balu, M.G. Lauby, New York: McGraw-Hill, 1176.
- [12]Nabokova, O.V. Theoretical electrical engineering [Text]: a textbook for electrical engineering. specialties of higher educational institutions / O.V. Nabokova. – Zaporizhzhia: ZNTU, 2015. – 477 p.
- [13]Kozlov, V. V. (2016). Theoretical foundations of electrical engineering. Steady-state modes of linear electrical circuits [Text]: textbook / V. V. Kozlov, O. V. Nabokova, Zaporizhzhia: ZNTU, 42.
- [14]Hayt, W.H. (2012). Engineering circuit analysis / W.H. Hayt, J.E. Kemmerly, S.M. Durbin., New York, McGraw-Hill, , 854 p.
- [15]GNU Octave [Electronic resource]. – access mode: <http://www.gnu.org/software/octave/index.html>.
- [16]The program for calculating the transient process in a model scheme. – [Electronic resource]. – access mode: https://drive.google.com/file/d/1acibOO_Q8kIN8cumDGgBHS8EschXMQ9S/view?usp=sharing.

УДК 621.314.1

АНАЛІЗ ОБМЕЖЕНЬ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ТА АВТОМАТИЗОВАНИЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ВИХІДНОЇ НАПРУГИ ПОНИЖУЮЧОГО ІМПУЛЬСНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА З ШІМ В MATLAB/SIMULINK

ПЛАХТІЙ О.А.

д-р. техн. наук, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1535-8991>, e-mail: a.plakhtiy1989@gmail.com;

ДОМНІН І.Ф.

д-р техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту іоносфери Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9824-4403>, e-mail: domninpro@ukr.net;

БАГАЧ Р.В.

канд. техн. наук, доцент кафедри автомобільної електроніки Харківського національного автомобільно-дорожнього університету, Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0157-5933>, e-mail: bagach.ruslan@gmail.com

ЛАТВИНСЬКИЙ
В.Д.

асистент кафедри автомобільної електроніки Харківського національного автомобільно-дорожнього університету, Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-4891-2925>, e-mail: latvin2000@gmail.com

Мета роботи. Визначення передавальної функції регулювання вихідної напруги биск-перетворювачів в функції коефіцієнта заповнення ШІМ, визначення обмежень та умов збіжності перехідних процесів в лінеаризованій та імпульсній моделі биск-перетворювача, а також представлення методу автоматизованого розрахунку параметрів ПІ та ПД регулятора шляхом використання інструменту Matlab/Simulink.

Методи дослідження. Теорія електричних, теорія автоматичного керування, аналітичні розрахунки в програмі MathCad, імітаційне моделювання в програмі Matlab.

Отримані результати. Представлено результати дослідження лінеаризації та визначення передавальної функції регулювання вихідної напруги понижуючого імпульсного перетворювача (биск-перетворювача) в функції коефіцієнта заповнення імпульсів в широтно-імпульсній модуляції. Визначено передавальну функцію биск-перетворювача з ШІМ та визначено обмеження даної лінеаризації, а саме умовою адекватності лінеаризованої моделі биск-перетворювача є обмеження значення вхідного сигналу, тобто коефіцієнта заповнення імпульсів в ШІМ, менше 1. Представлено методику автоматичного розрахунку параметрів ПІ, ПІ, ПД та ПД регуляторів за критерієм формування перехідного процесу задовільної форми шляхом використання блоку «PID controller» в Matlab/Simulink. Представлена методика автоматичного розрахунку коефіцієнтів регуляторів в структурах системи автоматичного регулювання (САР) працює виключно з лінеаризованими моделями, і не дозволяє виконати розрахунки для імпульсних і нелінійних моделей. Для визначеної лінеаризованої моделі і відповідної передавальної функції биск-перетворювача визначено коефіцієнти ПІ регулятора вихідної напруги. Представлено результати аналітичного розрахунку миттєвої функції вихідної напруги биск-перетворювача в складі системи автоматизованого регулювання вихідної напруги, яка отримана шляхом зворотного перетворення Лапласа зверненої функції системи автоматичного регулювання. Також представлено результати моделювання вихідної напруги биск-перетворювача, на лінеаризованій моделі (передавальній функції) та імітаційній моделі в Matlab/Simulink. Результати аналітичного розрахунку та двох методів комп'ютерного моделювання дали ідентичні результати, що свідчить про адекватність проведеної лінеаризації та задовільність методу автоматичного розрахунку параметрів регулятора за критерієм формування перехідного процесу задовільної форми за параметрами часу перехідного процесу та значення перерегулювання.

Наукова новизна. Визначено умови збіжності перехідних процесів регулювання вихідної напруги биск-перетворювача в структурах систем автоматичного регулювання для лінеаризованих та імпульсних моделей, що дозволяє отримати реальний перехідний процес бажаної форми, який відповідає попередньому аналітичному розрахунку.

Практична цінність. Представлені передавальні функції та метод автоматичного синтезу параметрів ПД регулятора вихідної напруги биск-перетворювача в Matlab/Simulink може бути використаний при розробці силових напівпровідникових перетворювачів та дозволяє спростити процес синтезу регуляторів в системах автоматичного керування.

© Плахтій О.А., Домнін І.Ф., Багач Р.В., Латвинський В.Д. 2025

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (CC-BY-SA 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2025-4-6>

Ключові слова: *buck converter; перетворювачі сонячних електростанцій; автоматизований синтез регулятора; передавальні функції перетворювача; MATLAB/Simulink.*

I. ВСТУП

Понижуючі імпульсні перетворювачі постійної напруги, відомі як buck-перетворювачі, силова схема яких наведена на рис.1, відіграють суттєву роль в сучасній перетворювальній техніці і широко застосовуються в сонячній енергетиці [1]-[3], як перетворювачі, що забезпечують відбір максимальної потужності сонячних панелей, в системах заряду/розряду акумуляторів [4], [5], системах керування двигунами постійного струму [6], [7] та багатьох інших застосуваннях [8]-[10].

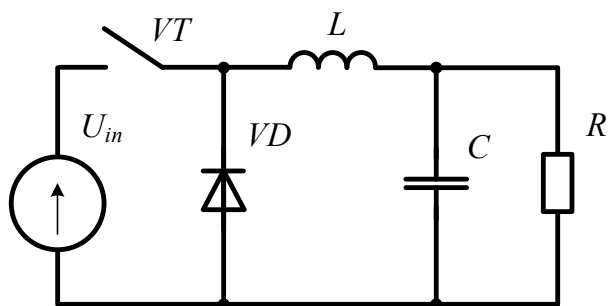


Рисунок 1. Схема понижуючого імпульсного перетворювача

При розробці buck-перетворювачів важливою задачею є синтез регуляторів вихідної напруги від яких залежить час перехідного процесу, величина перерегулювання вихідної напруги та загальна стійкість структури системи автоматичного регулювання (САР).

Одним з методів регулювання вихідної напруги buck-перетворювачів є застосування ковзних режимів комутації (sliding-mode-control) струму дроселя. Проте даний режим модуляції зумовлює змінну частоту комутації і в даній роботі не розглядається [11], [12].

В даній роботі розглянуто режим регулювання вихідної напруги buck-перетворювачів з широтно-імпульсною модуляцією [8]. При цьому регулювання вихідної напруги перетворювача забезпечується зміною коефіцієнта заповнення ШІМ γ , який приймає значення від 0 до 1 згідно виразу

$$\gamma = \frac{t_{on}}{T_{pwm}}, \quad (1)$$

де t_{on} – час увімкненого стану ключа; T_{pwm} – період слідування імпульсів ШІМ.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

В літературі представлено досить багато методик розрахунку параметрів елементів силової схеми buck-перетворювачів [13], [14], крім того існує багато он-

лайн калькуляторів, що дозволяють автоматизовано провести розрахунок силових елементів схеми [15], [16]. В роботах [17]-[19] представлено результати досліджень заходів щодо підвищення енергетичної ефективності понижуючих імпульсних перетворювачів в усталених режимах роботи, проте вони не містять даних щодо динамічних властивостей та рекомендацій щодо синтезу систем автоматичного регулювання. У той же час питання синтезу регуляторів вихідної напруги, оцінки якості перехідного процесу та стійкості САР з імпульсними перетворювачами представлено суттєво менше уваги.

В роботах [20], [21] наведено результати дослідження перехідного процесу регулювання вихідної напруги buck-перетворювача при використанні ПІ регулятора. Задовільний перехідний процес отримано експериментальним шляхом, а саме ітеративним методом підбору параметрів регулятора, що не є задовільним методом. Недоліком даних робіт є відсутність опису методу визначення коефіцієнтів регулятора та відсутність опису buck-перетворювача, як об'єкта системи автоматичного керування з визначеною передавальною функцією.

Одним з методів є побудова системи автоматичного регулювання вихідної напруги buck-перетворювачів за умовами реалізації процесу кінцевої тривалості (ПКТ) при якому перехідний процес регулювання триває час, що відповідає добутку порядку системи на період ШІМ модуляції [22], [23]. В роботі [24] представлено аналіз дослідження синтезу регулятора вихідної напруги понижуючого імпульсного перетворювача за умовою реалізації процесу кінцевої тривалості. Недоліком роботи є те, що аналіз роботи схеми та синтез регулятора виконано при частоті ШІМ 1кГц, хоча в сучасних buck-перетворювачах застосовуються частоти комутації порядку декількох сотень кілогерц і вище, що робить синтез регулятора за умовами ПКТ практично неможливим.

В роботі [25] представлено результати дослідження робастного регулятора вихідної напруги понижуючого імпульсного перетворювача. Проте в роботі не визначено обмеження даної лінеаризації, не представлено аналізу збіжності лінеаризованої та імітаційної моделі перетворювача та не представлено методу синтезу регулятора. Крім цього недоліком представленого регулювання можна вважати досить суттєве перерегулювання, яке складає більше 30%, що для багатьох застосувань може бути критичним.

III. МЕТА РОБОТИ

Метою роботи є визначення передавальної функції регулювання вихідної напруги buck-перетворювачів в функції коефіцієнта заповнення ШІМ, визначення обмежень та умов збіжності перехідних процесів в лінеаризованій та імпульсній моделі

busk-перетворювача, а також представлення методу автоматизованого розрахунку параметрів ПІ та ПІД регулятора шляхом використання інструменту Matlab/Simulink

IV. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАВАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ РЕГУЛЮВАННЯ ВИХІДНОЇ НАПРУГИ ПОНИЖУЮЧОГО ІМПУЛЬСНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА

Аналіз передавальної функції понижуючого імпульсного перетворювача можна реалізувати шляхом побудови еквівалентної схеми заміщення, яка наведена на рис.2.

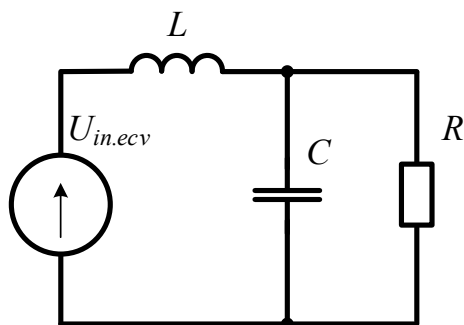


Рисунок 2. Схема заміщення понижуючого імпульсного перетворювача

В режимі ШІМ модуляції вхідна напруга LC фільтра понижуючого dc/dc перетворювача є імпульсною напругою, яка містить постійну складову $U_{in.ecv}$, яка залежить від коефіцієнта модуляції γ , та змінну складову, яка відповідає частоті ШІМ модуляції, а змінна складову містить гармоніки кратні частоті ШІМ. При цьому значення постійної складової можна представити як

$$U_{in.ecv} = U_{in} \cdot \gamma \quad (2)$$

де U_{in} – вхідна напруга реальної схеми.

Як було сказано раніше, вхідним сигналом при керуванні вихідної напруги є γ . Таким чином передавальна функція регулювання вихідної напруги визначається як

$$H_{dc}(p) = \frac{U_{out}(p)}{\gamma(p)} \quad (3)$$

де U_{out} – вихідна напруга понижуючого імпульсного перетворювача.

Для визначення передавальної функції визначимо змінні комплексних опорів

$$z_1(p) = pL \quad (4)$$

$$z_2(p) = 1/pC \quad (5)$$

$$z_3(p) = R \quad (6)$$

При цьому вихідну напругу можна визначити за виразом

$$U_{out}(p) = \frac{U_{in} \cdot \gamma}{z_1(p) + \frac{z_2(p) \cdot z_3(p)}{z_2(p) + z_3(p)}} \cdot \frac{z_2(p)}{z_2(p) + z_3(p)} \cdot z_3(p) \quad (7)$$

Таким чином передавальна функція понижуючого імпульсного перетворювача при регулюванні вихідної напруги буде визначатись як

$$H_{dc}(p) = \frac{U_{out}}{\gamma} = \frac{U_{in} \cdot z_3(p)}{z_1(p) + \frac{z_2(p) \cdot z_3(p)}{z_2(p) + z_3(p)}} \cdot \frac{z_2(p)}{z_2(p) + z_3(p)} \quad (8)$$

Виконавши остаточні перетворення отримаємо передавальну функцію понижуючого dc/dc перетворювача

$$H_{dc}(p) = \frac{U_{in} \cdot R}{LCRp^2 + Lp + R} \quad (9)$$

або

$$H_{dc}(p) = \frac{U_{in}}{LCp^2 + \frac{L}{R}p + 1} \quad (10)$$

Таким чином при резистивному навантаженні передавальна функція $busk$ -перетворювача визначається як коливальна ланка другого порядку. Частота зрізу даної передавальної функції визначається як

$$f_{zp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (11)$$

При цьому для зменшення пульсаційної складової у вихідній напрузі $busk$ -перетворювача має бути виконана умова

$$f_{zp} \ll f_{pwm} \quad (12)$$

Умовою аперіодичного перехідного процесу і відсутності коливальних в регулюванні вихідної напруги лінеаризованої моделі $busk$ -перетворювача при $\gamma = const$ є умова

$$R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (13)$$

При визначенні параметрах передавальної функції $busk$ -перетворювача можливим є синтез регулятора вихідної напруги шляхом частотних методів теорії автоматичного керування, таких як модальний, або симетричний оптимум.

Проте суттєве спрощення процесу синтезу регулятора вихідної напруги може бути виконано шляхом застосування інструменту автоматизованого розрахунку параметрів ПІ чи ПІД регулятора блоку “PID Controller” в Matlab Simulink.

V. АВТОМАТИЗОВАНІЙ СИНТЕЗ КОЕФІЦІЄНТІВ ПІД РЕГУЛЯТОРА ВИХІДНОЇ НАПРУГИ BUCK- ПЕРЕТВОРЮВАЧА В MATLAB/SIMULINK

Для автоматичного визначення коефіцієнтів П, І, Д, чи ПІД регулятора у необхідно створити модель замкненої лінеаризованої системи автоматичного регулювання зі зворотнім зв'язком та додання в канал зворотного зв'язку блоку "PID Controller" в системі Matlab/Simulink. На рис.3 представлено САР вихідної напруги понижуючого імпульсного перетворювача, а саме лінеаризовану та імітаційну моделі понижуючого імпульсного перетворювача.

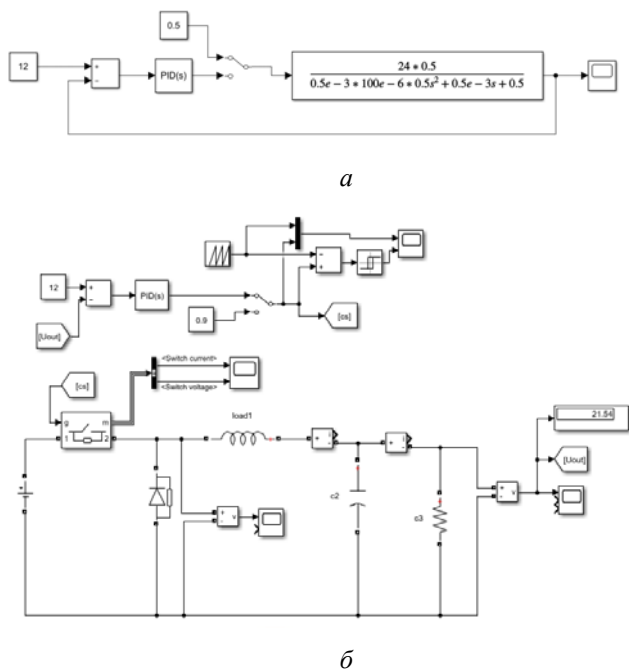


Рисунок 3. Моделі понижуючого імпульсного перетворювача: а – лінеаризована передавальна функція; б – імітаційна імпульсна модель.

Параметри моделі buck-перетворювача представлені в таблиці 1.

Таблиця 1. Параметри buck-перетворювача

Параметр	Значення
Вхідна напруга	24В
Індуктивність	2мГн
Ємність	20 мкФ
Опір навантаження	0,5 Ом
Частота ШІМ, кГц	10

Амплітудно - частотна характеристика лінеаризованої моделі понижуючого імпульсного dc-dc перетворювача з представленими параметрами представлена на рис.4.

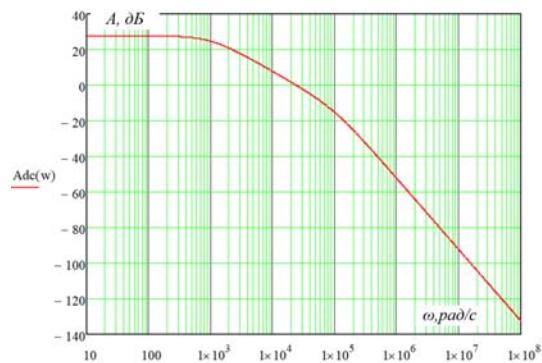


Рисунок 4. АЧХ лінеаризованої моделі buck-перетворювача

При роботі з лінеаризованими передавальними функціями об'єктів керування в Simulink блок "PID Controller" дозволяє автоматизовано визначати параметри коефіцієнтів П, І, ПІ, ПД та ПІД регуляторів на основі бажаної форми вихідного процесу. Зовнішній вигляд блоку та інтерфейс його налаштування представлено на рис.6.

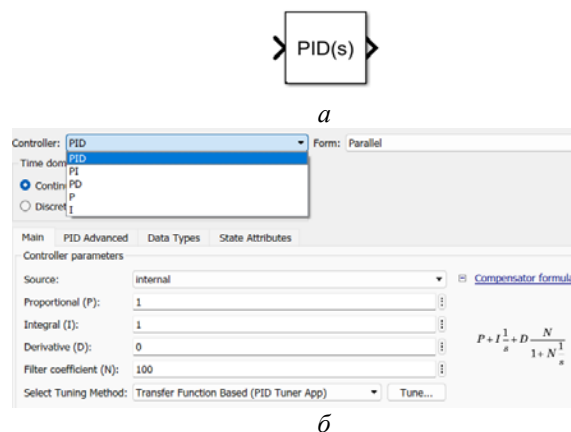


Рисунок 5. Інтерфейс параметрів блоку "PID Controller" в Matlab/Simulink: а – вигляд блоку в Simulink; б – інтерфейс налаштування блоку

Для запуску автоматичного налаштування, а саме визначення коефіцієнтів регулятора блок "PID Controller" має бути підключений в замкнену систему автоматичного регулювання з негативним зворотнім зв'язком, як це наведено на рис.4, а. Після підключення необхідно відкрити блок "PID Controller" та обрати тип регулятора: PID, PI, PD, P, I. Для початку автоматичного розрахунку коефіцієнтів обраного типу регулятора для отримання бажаної форми перехідного процесу необхідно натиснути на віртуальну кнопку «Tune...» в інтерфейсі його налаштування (рис.6, б). Після цього блок "PID Controller" виконує аналіз динамічних властивостей лінійної замкненої системи. Інтерфейс налаштування бажаної форми перехідного процесу регулювання вихідного параметру САР представлена на рис.6.

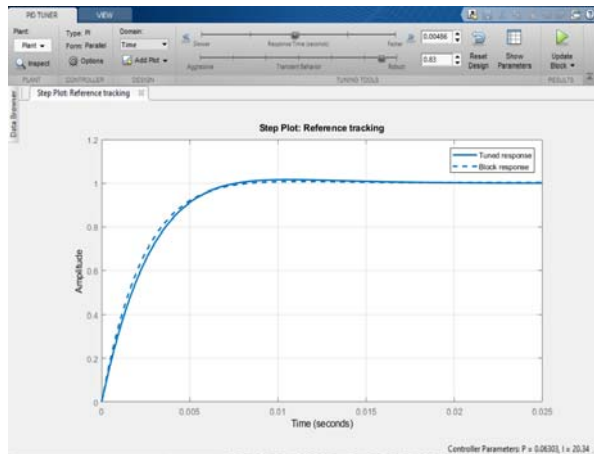


Рисунок 6. Інтерфейс налаштування бажаного перехідного процесу в блоку “PID Controller”

Інтерфейс налаштування бажаного перехідного процесу в блоку “PID Controller” дозволяє регулювати час перехідного процесу шляхом регулювання параметру «Response time» та величини перерегулювання вихідного параметру САР за параметром «Transient behavior».

При підключенні блоку “PID Controller” до імпульсної імітаційної моделі (рис.3, б) функція автоматичного налаштування коефіцієнтів регулятора не працює, оскільки даний блок призначено для аналізу виключно лінеаризованих моделей.

Після налаштування бажаної форми перехідного процесу при натисканні кнопки «Show parameters» в інтерфейсі налаштування блоку “PID Controller” отримуємо чисельне визначення необхідні значення коефіцієнтів регулятора, що забезпечують задану форму перехідного процесу та результати розрахунку параметрів стабільності САР, значення запасу по амплітуді, запасу по фазі та значення максимального перерегулювання, як це наведено на рис.7.

Controller Parameters		
	Tuned	Block
P	0.063034	0.07214
I	20.3441	20.9703
D	n/a	n/a
N	n/a	n/a
Performance and Robustness		
	Tuned	Block
Rise time	0.00454 seconds	0.00439 seconds
Settling time	0.00667 seconds	0.00684 seconds
Overshoot	1.67 %	0.782 %
Peak	1.02	1.01
Gain margin	Inf dB @ Inf rad/s	Inf dB @ Inf rad/s
Phase margin	83 deg @ 412 rad/s	86 deg @ 451 rad/s
Closed-loop stability	Stable	Stable

Рисунок 7. Інтерфейс чисельної оцінки якості перехідного процесу в блоку “PID Controller”

VI. УМОВА ЗБІЖНОСТІ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ РЕГУЛЮВАННЯ ВИХІДНОЇ НАПРУГИ В ЛІНЕАРИЗОВАНІЙ ТА ІМПУЛЬСНІ МОДЕЛІ ТА

В розглянутій САР вихідним параметром регулятора є коефіцієнт заповнення ШІМ γ , яка в реальній системі змінюється від 0 до 1.

При цьому для забезпечення збіжності перехідних процесів регулюванні вихідної напруги лінеаризованій моделі та імітаційній моделі необхідно пересвідчитись, що налаштований перехідний процес реалізується при значенні вихідного параметру регулятора менше 1. Блок “PID Controller” дозволяє визначити миттєве значення вихідного параметру регулятора шляхом натискання на інтерфейсі налаштування бажаного перехідного процесу кнопок “Add Plot” та «Controller Effort».

Інтерфейс блоку “PID Controller” визначення вихідного сигналу регулятора у часі представлено на рис.8.

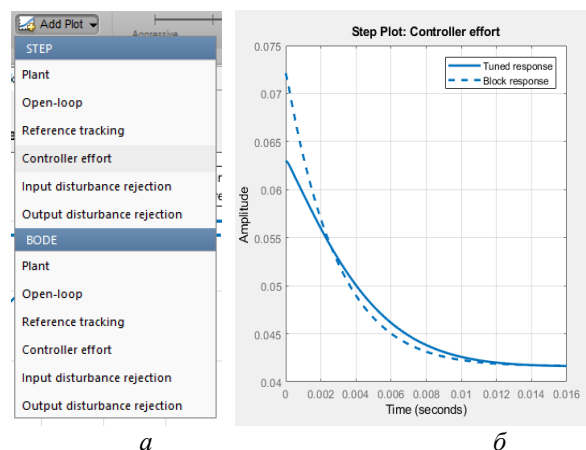


Рисунок 8. Інтерфейс “PID Controller” визначення вихідного сигналу регулятора у часі

Пересвідчившись, що перехідний процес має задовільну форму і тривалість, а також що вихідна дія регулятора, а саме коефіцієнт заповнення γ не перевищує максимальне можливе значення 1, необхідно зберегти налаштовані зміни в блоку “PID Controller” шляхом натискання кнопки «Update block» в інтерфейсі налаштування (рис.7). Після чого даний блок може бути скопійований та доданий за замкненої САР в імітаційній моделі (рис.3, а).

Умовою адекватної лінеаризації перетворювача є збіжність перехідних процесів регулювання вихідної напруги при аналітичному розрахунку, в лінеаризованій моделі Matlab (рис.3, а) та імітаційній моделі (рис.3, б) при застосуванні одного типу регулятора з тими самими параметрами.

Подальший розрахунок виконано для параметрів понижуючого імпульсного перетворювача параметри якого наведено в таблиці 1, та при використанні ПІ регулятора параметри якого отримано в Matlab

(рис.7), а саме $K_n=0,063034$ та $K_i=20,344$. Дані коефіцієнти отримані при налаштуванні бажаної форми перехідного процесу, як це наведено на рис.7.

Передавальна функція ПІ регулятора вихідної напруги визначається як

$$H_{reg}(p) = K_{II} + \frac{K_I}{p} \quad (14)$$

Таким чином передавальна функція замкнутого контуру автоматичного регулювання визначається як

$$H_{total}(p) = \frac{H_{reg}(p) \cdot H_{dc}(p)}{H_{reg}(p) \cdot H_{dc}(p) + 1} \quad (15)$$

При подачі на систему автоматичного регулювання сигналу завдання вихідної напруги 12 В, який відповідає значенню в операторній формі виразу

$$Step(p) = \frac{12}{p} \quad (16)$$

аналітичне визначення миттєвої функції вихідної напруги в розглянутій системі автоматичного регулювання може бути отримано шляхом зворотнього перетворення Лапласа функції замкненої системи автоматичного регулювання системи $F(s)$, яка визначається виразом

$$F(p) = Step(p) \cdot \frac{H_{reg}(p) \cdot H_{dc}(p)}{H_{reg}(p) \cdot H_{dc}(p) + 1} \quad (17)$$

Таким чином, аналітична функція перехідного процесу буде визначатись як

$$U_{out}(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} e^{px} [F(p)] \cdot dp \quad (18)$$

Виконавши відповідне зворотнє перетворення Лапласу виразу (17) отримуємо аналітичний вираз функції вихідної напруги понижуючого імпульсного перетворювача у часі

$$U_{out}(t) = 0.052841 \cdot e^{-99313.96 \cdot 0.4 \cdot t} - 2.88615 \cdot e^{-99749.318 \cdot t} - 4.2852 \cdot e^{-250.62814 \cdot t} - 12.0528 \cdot \cos(95.017 \cdot t) \cdot e^{-343.1979 \cdot t} + 11.7197 \cdot \sin(95.017 \cdot t) \cdot e^{-343.1979 \cdot t} + 12 \quad (19)$$

Результат аналітичного розрахунку та результати імітаційного моделювання вихідної напруги понижуючого імпульсного перетворювача в системі

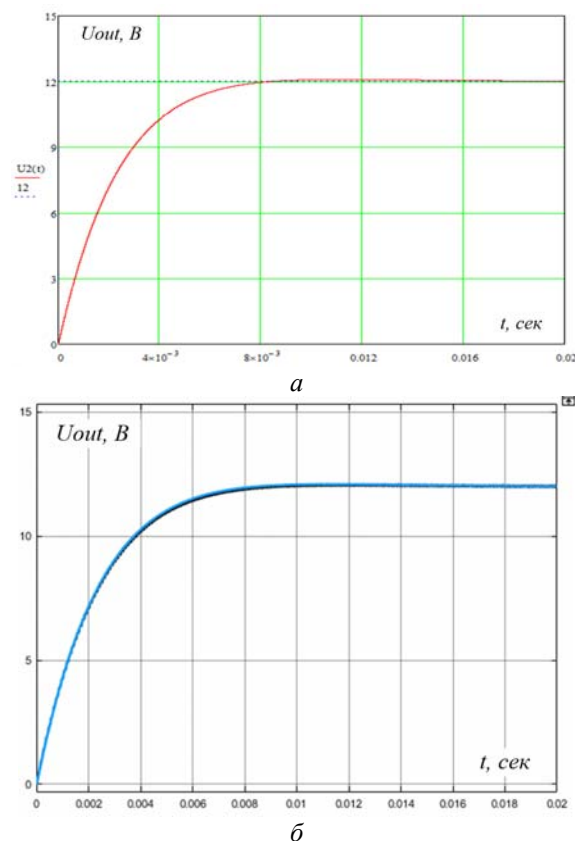


Рисунок 9. Перехідні процеси регулювання вихідної напруги : а – аналітичний розрахунок; б – результат імітаційної моделі

Як видно з рис.9 результати аналітичного розрахунку перехідного процесу (19) та результати моделювання лінеаризованої та імітаційної моделі дали ідентичні результати, що свідчить про адекватність проведеної лінеаризації, визначеної передавальної функції понижуючого імпульсного перетворювача та розглянутого методу автоматизованого розрахунку параметрів регуляторів за критерієм задовільної форми перехідного процесу.

ВІСНОВКИ

У статті представлено результати лінеаризації та визначено передавальну функцію регулювання вихідної напруги понижуючого імпульсного перетворювача (buck-перетворювача) в функції коефіцієнта заповнення імпульсів в широтно-імпульсній модуляції. Визначено, що умовою адекватності лінеаризації buck-перетворювача, тобто перехід від імпульсної системи до безперервної, є обмеження значення вхідного сигналу, тобто коефіцієнта заповнення імпульсів в ШІМ, яка має бути менше 1.

Представлено методику автоматичного розрахунку параметрів П, ПІ, ПД та ПІД регуляторів за критерієм формування перехідного процесу задовільної форми шляхом використання блоку «PID controller» в Matlab/Simulink. Показано, що представлена методика

автоматичного розрахунку коефіцієнтів регуляторів в структурах системи автоматичного регулювання (САР) працює виключно з лінеаризованими моделями, і не дозволяє виконати розрахунки коефіцієнтів регуляторів для імпульсних і нелінійних моделей. Для визначеної лінеаризованої моделі і відповідної передавальної функції buck-перетворювача визначено коефіцієнти ПІ регулятора вихідної напруги.

Представлено результати аналітичного розрахунку миттєвої функції вихідної напруги buck-перетворювача в складі системи автоматизованого регулювання вихідної напруги, яка отримана шляхом зворотного перетворення Лапласа зверненої функції системи автоматичного регулювання. Також представлено результати моделювання вихідної напруги buck-перетворювача на лінеаризованій моделі (передавальної функції) та імітаційній моделі в Matlab/Simulink.

Результати аналітичного розрахунку функції вихідної напруги понижуючого імпульсного перетворювача та двох методів комп'ютерного моделювання дали ідентичні результати, що свідчить про адекватність проведеної лінеаризації та задовільність методики автоматичного розрахунку параметрів регулятора за критерієм формування перехідного процесу задовільної форми за параметрами часу перехідного процесу та значення величини перерегулювання.

Даний метод визначення коефіцієнтів регуляторів на основі критерію бажаної форми перехідного процесу може бути застосований для створення будь-яких лінеаризованих систем автоматичного регулювання. Проте, для його застосування необхідно розуміти, які обмеження мають лінеаризовані моделі, такі як: обмеження значення вхідного сигналу об'єкту керування - коефіцієнту заповнення ШІМ, обмеження реальної потужності мережі, реальний діапазон струмів навантаження та інші.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] S. Potturi, B. Bairwa, M. K and M. C, "Development of Solar Coupled Synchronous Buck Converter," 2022 Fourth International Conference on Emerging Research in Electronics, Computer Science and Technology (ICERECT), Mandya, India, 2022, pp. 1-5, doi: 10.1109/ICERECT56837.2022.10060197.
- [2] L. Vite, "Stabilization of a DC-DC buck converter for photovoltaic MPPT applications," 2023 20th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), Mexico City, Mexico, 2023, pp. 1-5, doi: 10.1109/CCE60043.2023.10332856.
- [3] Blinov A., Vinnikov D., Ivakhno V. "Full soft-switching high step-up dc-dc converter for photovoltaic applications" Proceedings of the 16th Conference on Power Electronics and Applications, EPE'14-ECCE Europe, 26-28.08.2014, Lappeenranta, Finland. — Lappeenranta, 2014. — P. 1–7.
- [4] E. N. Mammeri, O. Lopez-Santos, A. El Aroudi and L. Martinez-Salamero, "Constant-Power Constant-Voltage Charging Protocol Based on a Four-Phase Interleaved Buck Converter for Electric Vehicle Batteries," 2025 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), London, United Kingdom, 2025, pp. 1-5, doi: 10.1109/ISCAS56072.2025.11043167.
- [5] K. K. Patel, L. K. Sahu and A. K. Sahu, "Integrated Design of MPPT and DC-DC Buck Converter for Efficient Battery Charging," 2025 Fourth International Conference on Power, Control and Computing Technologies (ICPC2T), Raipur, India, 2025, pp. 1-6, doi: 10.1109/ICPC2T63847.2025.10958676.
- [6] R. Dhanasekar, S. G. Kumar and M. Rivera, "Third Order Sliding Mode Control of Buck Converter Fed Permanent Magnet DC Motor," 2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA), Concepcion, Chile, 2018, pp. 1-4, doi: 10.1109/ICA-ACCA.2018.8609812.
- [7] J. M. Alba-Martínez, R. Silva-Ortigoza, H. Taud, J. Alvarez-Cedillo, I. Rivera-Zárate and R. Bautista-Quintero, "DC Motor Speed Control via a DC to DC Buck Power Converter," 2012 IEEE Ninth Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference, Cuernavaca, Mexico, 2012, pp. 288-293, doi: 10.1109/CERMA.2012.54.
- [8] V. Nerubatskyi, O. Plakhtii and D. Hordiienko, "Efficiency Analysis of DC-DC Converter with Pulse-Width and Pulse-Frequency Modulation," 2022 IEEE 41st International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO), Kyiv, Ukraine, 2022, pp. 571-575, doi: 10.1109/ELNANO54667.2022.9926762.
- [9] V. Nerubatskyi, O. Plakhtii, D. Hordiienko, H. Khoruzhevskiy. Study of energy parameters in alternative power source microgrid systems with multilevel inverters. INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL "INDUSTRY 4.0". 2020. P.118-121.
- [10] Nerubatskyi V. P., Plakhtii O. A., Hordiienko D. A., Syniavskiy A. V., Philipjeva M. V. Use of modern technologies in the problems of automation of data collection in intellectual power supply systems. Modern engineering and innovative technologies. 2022. Issue 19. Part 1. P. 38–51. DOI: 10.30890/2567-5273.2022-19-01-058.
- [11] L. Du, P. Huang and W. Tong, "Research on full-order sliding mode control method for Buck converter," 2019 3rd International Conference on Electronic Information Technology and Computer Engineering (EITCE), Xiamen, China, 2019, pp. 1171-1175, doi: 10.1109/EITCE47263.2019.9094884.

- [12] C. Kumar and A. K. Ray, "Adaptive Sliding Mode Control for DC-DC Buck Converter," 2025 International Conference on Power Electronics Converters for Transportation and Energy Applications (PECTEA), Jatni, India, 2025, pp. 1-6, doi: 10.1109/PECTEA61788.2025.11076305.
- [13] Power electronics handbook: devices, circuits, and applications handbook / edited by. Muhammad H. Rashid. – 3rd ed. p. cm. ISBN 978-0-12-382036-5. 1.
- [14] Abraham I. Pressman, Keith Billings, Taylor Morey. Switching Power Supply Design, Third Edition. ISBN 978-0-07-148272-1. P.1-831
- [15] Texas instruments, buck convertor on-line calculator: <https://www.ti.com/tool/BUCK-CONVCALC>
- [16] Schmidt buck convertor on-line calculator: http://schmidt-walter-schaltzetteile.de/smps_e/abw_smps_e.html
- [17] A. Singh, K. Bharti and N. Kumar, "Comparative study between DC-DC buck converter and Zero Voltage switching buck converter," 2024 IEEE International Students' Conference on Electrical, Electronics and Computer Science (SCEECS), Bhopal, India, 2024, pp. 1-6, doi: 10.1109/SCEECS61402.2024.10482318.
- [18] M. M. Kareem, F. A. Harbi, A. B. Ibrahim, A. S. Al-Hiti and Y. A. Mashhadany, "Design and Analysis of Synchronous and Asynchronous Buck Converters in Electrical Applications," 2024 17th International Conference on Development in eSystem Engineering (DeSE), Khorfakkan, United Arab Emirates, 2024, pp. 462-467, doi: 10.1109/DeSE63988.2024.10912037.
- [19] S. Wu, Z. Ran, Z. Tong, T. Liu and Y. Lu, "A Monolithic Integrated E-Mode GaN 48V-to-1V DC-DC Buck Converter with PWM Control," 2023 IEEE International Conference on Integrated Circuits, Technologies and Applications (ICTA), Hefei, China, 2023, pp. 130-131, doi: 10.1109/ICTA60488.2023.10364290.
- [20] Abhijeet Bhattacharya, Sandeep Banerjee, Saksham Girotra, Hridesh Shukla, Gaurang Bhardwaj, Sidharth Talia. Simulation and Design of PI-Controller for the Control of Buck Converter. Journal of Microelectronics and Solid State Devices ISSN: 2455-3336 Volume 7, Issue 1. P.26-32. DOI: 10.37591/jomds.v7i1.3979
- [21] S. Kumari, M. M. Rayguru and S. Upadhyaya, "Analysis of Model Predictive Controller versus Linear Quadratic Regulator for DC-DC Buck Converter Systems," 2023 7th International Conference on Intelligent Computing and Control Systems (ICICCS), Madurai, India, 2023, pp. 1764-1768, doi: 10.1109/ICICCS56967.2023.10142519.
- [22] M. Saoudi, A. El-Sayed and H. Metwally, "Design and implementation of closed-loop control system for buck converter using different techniques," in IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, vol. 32, no. 3, pp. 30-39, March 2017, doi: 10.1109/MAES.2017.150261
- [23] Y. Liu, H. Li, R. Lu, Z. Zuo and X. Li, "An Overview of Finite/Fixed-Time Control and Its Application in Engineering Systems," in IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, vol. 9, no. 12, pp. 2106-2120, December 2022, doi: 10.1109/JAS.2022.105413
- [24] Shcherbak Y. V. Dynamics of a pulse-width converter using the theory of generalized functions / Y. V. Shcherbak, K. Y. Ivakina, V. P. Nerubatskyi // Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту. – 2025. – Вип. 212. – С. 315-330.
- [25] K. Han, P. Jiang, S. Huang, Y. Jiang, and X. Wang, "Estimator based robust dual-mode predictive output regulation in DC-DC Buck converters," in 2019 IEEE 28th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE), IEEE, Jun. 2019, pp. 2158–2163. doi: 10.1109/isie.2019.8781172.

Надійшла (Received) 14.10.2025;

Прийнята (Accepted) 08.11.2025;

Опублікована (Published) 26.12.2025;

ANALYSIS OF LINEARIZATION LIMIT CONDITIONS AND AUTOMATED SYNTHESIS OF THE OUTPUT VOLTAGE REGULATOR OF A PWM-BUCK CONVERTER IN MATLAB/SIMULINK

PLAKHTII O.A.

Doctor of technical sciences, associate professor of the electrical power engineering, electrical engineering and electromechanics department, Ukrainian state university of railway transport, Kharkiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1535-8991>, e-mail: a.plakhtiy1989@gmail.com;

DOMNIN I.F.

Doctor of technical sciences, professor, leading researcher, Institute of Ionosphere, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9824-4403>, e-mail: domninpro@ukr.net

BAHACH R.V.

PhD, associate professor of the automotive electronics department, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000->

0003-0157-5933, e-mail: bagach.ruslan@gmail.com

LATVYNSKYI
V.D.

assistant of the automotive electronics department, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-4891-2925>,
e-mail: latvin2000@gmail.com

Purpose. Determination of the transfer function of the output voltage regulation of buck converters as a function of the PWM duty cycle, determination of the constraints and conditions for convergence of transient processes in the linearized and pulsed model of the buck converter, as well as presentation of a method for automated calculation of PI and PID controller parameters using the Matlab/Simulink tool.

Methodology. Electrical theory, automatic control theory, analytical calculations in MathCad and simulation modeling in Matlab.

Findings. The results of the study of linearization and determination of the transfer function of the output voltage regulation of a step-down pulse converter (buck converter) as a function of the pulse duty cycle in pulse-width modulation are presented. The transfer function of a buck converter with PWM is determined and the limitations of this linearization are determined, namely, the condition for the adequacy of the linearized model of the buck converter is the limitation of the input signal value, i.e. the pulse duty cycle in PWM, less than 1. The method of automatic calculation of the parameters of P, PI, PD and PID controllers is presented according to the criterion of forming a transient process of a satisfactory form by using the "PID controller" block in Matlab/Simulink. The presented method of automatic calculation of the coefficients of controllers in the automatic control system (ACS) structures works exclusively with linearized models, and does not allow calculations for pulse and nonlinear models. For the defined linearized model and the corresponding transfer function of the buck converter, the PI coefficients of the output voltage regulator are determined. The results of the analytical calculation of the instantaneous function of the buck converter output voltage as part of the automated output voltage control system, which is obtained by inverse Laplace transformation of the inverse function of the automatic control system, are presented. The results of the modeling of the buck converter output voltage on the linearized model (transfer function) and the simulation model in Matlab/Simulink are also presented. The results of the analytical calculation and the two methods of computer modeling gave identical results, which indicates the adequacy of the linearization performed and the satisfaction of the method of automatic calculation of the regulator parameters according to the criterion of forming a transient process of a satisfactory form according to the parameters of the transient process time and the value of overshoot.

Originality The conditions for convergence of transient processes of the buck converter output voltage regulation in the structures of automatic control systems for linearized and pulsed models have been determined, which allows obtaining a real transient process of the desired form, which corresponds to the previous analytical calculation.

Practical value. The presented transfer functions and the method of automatic synthesis of PID parameters of the output voltage regulator of the buck converter in Matlab/Simulink can be used in the development of power semiconductor converters and allows to simplify the synthesis process of regulators in automatic control systems.

Keywords: buck converter; solar power plant converters; automated controller synthesis; converter transfer functions; MATLAB/Simulink.

REFERENCES

- [1] S. Potturi, B. Bairwa, M. K and M. C, "Development of Solar Coupled Synchronous Buck Converter," 2022 Fourth International Conference on Emerging Research in Electronics, Computer Science and Technology (ICERECT), Mandya, India, 2022, pp. 1-5, doi: 10.1109/ICERECT56837.2022.10060197.
- [2] L. Vite, "Stabilization of a DC-DC buck converter for photovoltaic MPPT applications," 2023 20th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), Mexico City, Mexico, 2023, pp. 1-5, doi: 10.1109/CCE60043.2023.10332856.
- [3] Blinov A., Vinnikov D., Ivakhno V. "Full soft-switching high step-up dc-dc converter for photovoltaic applications" Proceedings of the 16th Conference on Power Electronics and Applications, EPE'14-ECCE Europe, 26-28.08.2014,
- Lappeenranta, Finland. — Lappeenranta, 2014. — P. 1–7.
- [4] E. N. Mammeri, O. Lopez-Santos, A. El Aroudi and L. Martinez-Salamero, "Constant-Power Constant-Voltage Charging Protocol Based on a Four-Phase Interleaved Buck Converter for Electric Vehicle Batteries," 2025 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), London, United Kingdom, 2025, pp. 1-5, doi: 10.1109/ISCAS56072.2025.11043167.
- [5] K. K. Patel, L. K. Sahu and A. K. Sahu, "Integrated Design of MPPT and DC-DC Buck Converter for Efficient Battery Charging," 2025 Fourth International Conference on Power, Control and Computing Technologies (ICPC2T), Raipur, India, 2025, pp. 1-6, doi: 10.1109/ICPC2T63847.2025.10958676.
- [6] R. Dhanasekar, S. G. Kumar and M. Rivera, "Third

- Order Sliding Mode Control of Buck Converter Fed Permanent Magnet DC Motor," 2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA), Concepcion, Chile, 2018, pp. 1-4, doi: 10.1109/ICA-ACCA.2018.8609812.
- [7] J. M. Alba-Martínez, R. Silva-Ortigoza, H. Taud, J. Alvarez-Cedillo, I. Rivera-Zárate and R. Bautista-Quintero, "DC Motor Speed Control via a DC to DC Buck Power Converter," 2012 IEEE Ninth Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference, Cuernavaca, Mexico, 2012, pp. 288-293, doi: 10.1109/CERMA.2012.54.
- [8] V. Nerubatskyi, O. Plakhtii and D. Hordiienko, "Efficiency Analysis of DC-DC Converter with Pulse-Width and Pulse-Frequency Modulation," 2022 IEEE 41st International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO), Kyiv, Ukraine, 2022, pp. 571-575, doi: 10.1109/ELNANO54667.2022.9926762.
- [9] V. Nerubatskyi, O. Plakhtii, D. Hordiienko, H. Khoruzhevskiy. Study of energy parameters in alternative power source microgrid systems with multilevel inverters. INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL "INDUSTRY 4.0". 2020. P.118-121.
- [10] Nerubatskyi V. P., Plakhtii O. A., Hordiienko D. A., Syniavskiy A. V., Philipjeva M. V. Use of modern technologies in the problems of automation of data collection in intellectual power supply systems. Modern engineering and innovative technologies. 2022. Issue 19. Part 1. P. 38–51. DOI: 10.30890/2567-5273.2022-19-01-058.
- [11] L. Du, P. Huang and W. Tong, "Research on full-order sliding mode control method for Buck converter," 2019 3rd International Conference on Electronic Information Technology and Computer Engineering (EITCE), Xiamen, China, 2019, pp. 1171-1175, doi: 10.1109/EITCE47263.2019.9094884.
- [12] C. Kumar and A. K. Ray, "Adaptive Sliding Mode Control for DC-DC Buck Converter," 2025 International Conference on Power Electronics Converters for Transportation and Energy Applications (PECTEA), Jatni, India, 2025, pp. 1-6, doi: 10.1109/PECTEA61788.2025.11076305.
- [13] Power electronics handbook: devices, circuits, and applications handbook / edited by. Muhammad H. Rashid. – 3rd ed. p. cm. ISBN 978-0-12-382036-5. 1.
- [14] Abraham I. Pressman, Keith Billings, Taylor Morey. Switching Power Supply Design, Third Edition. ISBN 978-0-07-148272-1. P.1-831
- [15] Texas instruments, buck convertor on-line calculator: <https://www.ti.com/tool/BUCK-CONVCALC>
- [16] Schmidt buck convertor on-line calculator: http://schmidt-walter-schaltnetzteile.de/smps_e/abw_smps_e.html
- [17] A. Singh, K. Bharti and N. Kumar, "Comparative study between DC-DC buck converter and Zero Voltage switching buck converter," 2024 IEEE International Students' Conference on Electrical, Electronics and Computer Science (SCEECS), Bhopal, India, 2024, pp. 1-6, doi: 10.1109/SCEECS61402.2024.10482318.
- [18] M. M. Kareem, F. A. Harbi, A. B. Ibrahim, A. S. Al-Hiti and Y. A. Mashhadany, "Design and Analysis of Synchronous and Asynchronous Buck Converters in Electrical Applications," 2024 17th International Conference on Development in eSystem Engineering (DeSE), Khorfakkan, United Arab Emirates, 2024, pp. 462-467, doi: 10.1109/DeSE63988.2024.10912037.
- [19] S. Wu, Z. Ran, Z. Tong, T. Liu and Y. Lu, "A Monolithic Integrated E-Mode GaN 48V-to-1V DC-DC Buck Converter with PWM Control," 2023 IEEE International Conference on Integrated Circuits, Technologies and Applications (ICTA), Hefei, China, 2023, pp. 130-131, doi: 10.1109/ICTA60488.2023.10364290.
- [20] Abhijeet Bhattacharya, Sandeep Banerjee, Saksham Girotra, Hridesh Shukla, Gaurang Bhardwaj, Sidharth Talia. Simulation and Design of PI-Controller for the Control of Buck Converter. Journal of Microelectronics and Solid State Devices ISSN: 2455-3336 Volume 7, Issue 1. P.26-32. DOI: 10.37591/jomsd.v7i1.3979
- [21] S. Kumari, M. M. Rayguru and S. Upadhyaya, "Analysis of Model Predictive Controller versus Linear Quadratic Regulator for DC-DC Buck Converter Systems," 2023 7th International Conference on Intelligent Computing and Control Systems (ICICCS), Madurai, India, 2023, pp. 1764-1768, doi: 10.1109/ICICCS56967.2023.10142519.
- [22] M. Saoudi, A. El-Sayed and H. Metwally, "Design and implementation of closed-loop control system for buck converter using different techniques," in IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, vol. 32, no. 3, pp. 30-39, March 2017, doi: 10.1109/MAES.2017.150261
- [23] Y. Liu, H. Li, R. Lu, Z. Zuo and X. Li, "An Overview of Finite/Fixed-Time Control and Its Application in Engineering Systems," in IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, vol. 9, no. 12, pp. 2106-2120, December 2022, doi: 10.1109/JAS.2022.105413
- [24] Shcherbak Y. V. Dynamics of a pulse-width converter using the theory of generalized functions / Y. V. Shcherbak, K. Y. Ivakina, V. P. Nerubatskyi // Zbirnyk naukovykh prats' Ukrayins'koho derzhavnoho universytetu zaliznychnoho transportu. – 2025. – Vol. 212. – p. 315-330.
- [25] K. Han, P. Jiang, S. Huang, Y. Jiang, and X. Wang, "Estimator based robust dual-mode predictive output regulation in DC-DC Buck converters," in 2019 IEEE 28th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE), IEEE, Jun. 2019, pp. 2158–2163. doi: 10.1109/isie.2019.8781172.

ESTIMATION OF THE MINIMUM LEVEL OF HIGHER HARMONICS IN THE SINGLE-PHASE-TO-GROUND FAULT CURRENT IN COMPENSATED 6–10 kV NETWORKS

SHAMRAI A. E. postgraduate student of electrical machine department, National university “Zaporizhzhia Polytechnic”, Deputy CEO “Pluton IC” LLC, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3516-1989>, e-mail: shamray_andrey@me.com;

ISAIEV I.V. postgraduate student of electrical machine department, National university “Zaporizhzhia Polytechnic”, Head of commercial department “Electra” LLC, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5686-4430>, e-mail: isaiev.ihor@gmail.com;

Purpose Development of a model for a compensated 6–10 kV network and a methodology for selecting its element parameters based on estimating the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current.

Methodology. To estimate the minimum level of higher harmonics in single-phase-to-ground fault currents, a generalized model of a compensated 6–10 kV cable network and its constituent elements, implemented in the Matlab system with the Simulink extension package, was used. The generalized model of the compensated 6–10 kV cable network and its element parameters were obtained based on a statistical analysis of data from the power supply systems of cities and industrial enterprises.

Findings. The main requirements for the equivalent calculation scheme of a 6–10 kV cable network for estimating the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current were formulated, and the ranges of variation and average values of its parameters were determined. The developed mathematical model of the 6–10 kV cable network accounts for the main factors determining the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current. Based on the results of computational experiments performed on the mathematical models of 6–10 kV cable networks, it was established that to ensure the required sensitivity, single-phase-to-ground fault protection devices based on the use of higher harmonics must have a primary pickup current of no more than 0.1A.

Originality. A model of a compensated 6–10 kV network was developed, which allows clarifying the sensitivity requirements for single-phase-to-ground fault protection systems based on the use of higher harmonics, thereby enhancing their operational efficiency.

Practical value. Based on the mathematical model, a methodology for selecting its element parameters is proposed, which utilizes the estimation of the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault currents.

Keywords: compensated network; mathematical model; transformer; higher harmonics protection.

I. INTRODUCTION

In distribution cable networks with a voltage of 6–10 kV in industrial and urban power supply, which typically operate with resonant neutral grounding via an arc-suppression reactor (capacitive current compensation), single-phase-to-ground faults are the main type of damage [1], [2]. Therefore, the reliability of such networks and the power supply to consumers depends on the technical perfection of single-phase-to-ground faults protection. In compensated 6–10 kV cable networks, the primary application for single-phase-to-ground faults protection is devices based on the use of absolute and relative measurement methods for higher harmonics in the zero-sequence currents of the protected object's connections [3]–[5]. The application of directional protection devices based on monitoring the direction of zero-sequence power of higher harmonics (for example, [6]) is also considered promising.

ing.

II. ANALYSIS OF LAST RESEARCHES

The spectrum of higher harmonics in the voltages and, consequently, in the single-phase-to-ground fault currents of the networks under consideration is unstable and depends on the composition of the higher harmonic sources and their operating modes [7]–[9].

The primary sources of higher harmonic in 6–10 kV networks are thyristor (or valve) converters [10], and in their absence in the consumer load, they are the power transformers of the receiving substations (6–10/0.4 kV) [11], [12]. The most pronounced harmonics in the spectrum of these sources are the 5th, 7th, 11th, and 13th harmonics [13], [14]. To ensure stable functioning under conditions of higher harmonics spectrum instability, protection devices are designed to respond to the total level

(typically the root-mean-square (RMS) value) of these harmonics. Therefore, when developing and designing higher harmonic -based protection, it becomes necessary to estimate the minimum possible total higher harmonics level in the single-phase-to-ground fault current for the networks under consideration at various values of the total capacitive current to determine the requirements for their sensitivity to the primary current and the scope of possible application. Estimates of the minimum higher harmonics level in the single-phase-to-ground fault current of compensated 6–10 kV cable networks were previously provided in the works [15], [16]. These estimates were conducted in the late 1960s based on simplified analytical methods and models of 6–10 kV cable networks and their elements, which limited the capabilities of researchers and developers. Operating experience does not always confirm the sensitivity and potential application scope of higher harmonics -based protection systems, as estimated by those studies (for example, [17]). Therefore, refining the sensitivity requirements for higher harmonics -based single-phase-to-ground fault protection is considered a pressing issue [18]–[20].

The emergence of modern simulation systems for electric power systems (EPS) and power engineering facilities, such as the Matlab system with the Simulink extension package, provides the opportunity to use more complex and, consequently, more accurate models of compensated 6–10 kV networks to refine the minimum higher harmonics level in SPGF currents and the resulting sensitivity requirements for the protection systems based on them.

III. FORMULATION OF THE WORK PURPOSE

Development of a model for a compensated 6–10 kV network and a methodology for selecting its element parameters based on estimating the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current.

IV. EXPOUNDING THE MAIN MATERIAL AND RESULTS ANALYSIS

The harmonic content of the fault current at the point of the single-phase-to-ground fault and the zero-sequence currents (3I₀) of the faulted and unfaulted connections is determined with sufficient accuracy by the harmonic content of the voltage of the faulted phase at the point of the ground fault [5], [8]. When determining the minimum level of higher harmonics in the phase voltages of the network and, consequently, in the single-phase-to-ground fault current, it is assumed in [5] that the EMF of the power source is purely sinusoidal (the total harmonic distortion coefficient KTHD = 0), and the main source of higher harmonics is the non-linearity of the magnetization curve of the 6–10/0.4 kV transformers installed at the receiving transformer substations (TS) or distribution transformer substations (DTS) of 6–10 kV cable networks in industrial or urban power supply. This assumption is acceptable for industrial consumers with a shift-based daily schedule, where during the night-time load drop or

on weekends, all major technological installations, and consequently, the main higher harmonics sources (primarily thyristor/valve converters), except for the transformers, can be almost completely switched off. Theoretical information must expand, and not repeat, stated in the introduction and review of literature information.

In [5], the equivalent circuit of the network shown in Fig. 1, a is used to estimate the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current.

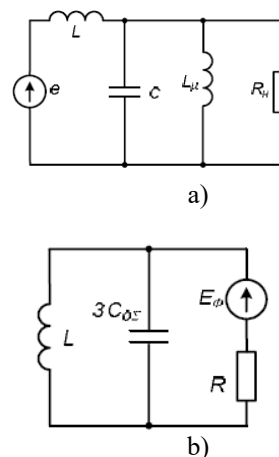


Figure 1. Calculated equivalent circuits of the 6–10 kV network for estimating the minimum higher harmonics level

In the equivalent circuit according to Fig. 1, $C = 3C_{0\Sigma}$ is the total capacitance of the three phases of the network to ground; e is the equivalent EMF of the power source; L is the total inductance of the supply transformers of the power center (PC); L_μ is the total inductance of the magnetization branches of all connected load transformers; R_n is the total load resistance of the transformers.

For the purpose of simplification, the calculated equivalent circuit (Fig. 1, a) does not take into account the influence of several factors on the voltage higher harmonics level at the point of the single-phase-to-ground fault: resistances of the lines connecting the Power Center (PC) to the receiving substations; system impedance; winding resistances of the load transformers; interphase capacitances of the network; complex nature of the load impedance; differences in magnetization currents for transformers of different ratings; the arc-suppression reactor (ASR), and others.

The minimum higher harmonics level, determined by the equivalent circuit in Fig. 1, a, is significantly influenced by the ratio of the ratings of the supply and receiving transformers,

$$S = \frac{S_{sup\Sigma}}{S_{rec\Sigma}}, \quad (1)$$

which was assumed in [5] to be $S = 1.5$ to 3. The minimum level obtained in [5] using the equivalent circuit in Fig. 1, a, for one of the most pronounced harmonics—the 5th harmonic—which primarily determines the sensitivity of higher harmonics -based protection under the conditions considered, is $\approx 2.6\%$ of $I_{c\Sigma}$ when the parameter $S = 1.5$. The corresponding current values for the 5th harmonic for networks with various $I_{c\Sigma}$ values are presented in Tab. 1.

Table 1. Calculated values of the 5th harmonic current $I_5 = 0.26I_{c\Sigma}$

Calculated values of the 5th harmonic current $I_5 = 0.26I_{c\Sigma}$ Current I_5	Value of the 5th Harmonic Current I_5 , A			
	$I_{c\Sigma} = 25\text{A}$	$I_{c\Sigma} = 50\text{A}$	$I_{c\Sigma} = 100\text{A}$	$I_{c\Sigma} = 250\text{A}$
In the single-phase-to-ground fault current	0.65	1.3	2.6	6.5
In the zero-sequence current $3I_0$ faulted connection	0.585	1.17	2.34	5.85
The pickup current (or operating current)	0.95	1.4	2.5	4.85

In [8], it is shown that the selectivity and sensitivity conditions for instantaneous overcurrent protection (maximum current protection) based on absolute measurement of higher harmonics can only be ensured on connections (feeders) with relatively small values of their own capacitive current:

$$I_{c_own}^* = \frac{I_{c_own}}{I_{c\Sigma}} \leq 0.1. \quad (2)$$

At values of $I_{c_own}^* = 0.1$, the 5th harmonic current I_5 in the faulted connection will be equal to 0.9 of the I_5 value at the point of the single-phase-to-ground fault (Tab. 1). For comparison with the 5th harmonic current in the faulted connection with $I_{c_own}^* = 0.1$, Tab. 1 also provides the pickup current values for the 5th harmonic for the USZ-2/2 type current protection device, which is the most widely used in compensated 6–10 kV networks [1], [2].

An analysis of the data in Tab. 1 shows that, given the minimum calculated level of the 5th harmonic obtained in [5], the required sensitivity (minimum sensitivity factor $K_{min} \geq 1.5$) of the USZ-2/2 type protection is not ensured (or: is not provided).

In [6], a calculation method for determining the

higher harmonics of the single-phase-to-ground fault current in 6–10 kV cable networks of industrial power supply systems are proposed. The equivalent circuit shown in Fig. 1, b is used to calculate the k -th harmonic in the single-phase-to-ground fault current. In the equivalent circuit of Fig. 1, b, as in the equivalent circuit of Fig. 1, a, several factors that can significantly influence the higher harmonics level in the single-phase-to-ground fault current are not taken into account, namely: the resistance of the lines connecting the power center (PC) to the receiving substations; interphase capacitances; the ratios between the network capacitances at the ends of the lines; the winding resistances and the load of the transformers; the arc-suppression reactor (ASR); and others.

To determine the equivalent EMF of the E_V , [6] utilizes data on the harmonics of transformer magnetization currents [9]. Calculations performed in [6] using the average values of E_V transformers and the parameters of other elements in the equivalent circuit shown in Fig. 1, b yielded the following levels for the 3rd, 5th, and 7th harmonics in the SPGF current: $I_3 \approx 0.1\text{A}$, $I_5 \approx 0.75\text{A}$, $I_{11} \approx 0.62\text{A}$ for a 6 kV network with $I_{c\Sigma} = 40\text{A}$ and a parameter value of $S = 0.75$. If it is assumed that the percentage ratio of the fundamental (1st) and higher harmonics does not change with a change in the total network capacitive current $I_{c\Sigma} = 25\text{A}$, the calculated value $I_5 \approx 0.47\text{A}$. This value is noticeably lower than the one obtained in [5] (Table 1).

The calculated data obtained in [5], [6] show that the higher harmonic level in single-phase-to-ground fault (SPGF) currents can be small. Therefore, inaccuracies (or errors) in the models of the 6–10 kV network and its constituent elements can lead to imprecise conclusions when assessing the sensitivity requirements for higher harmonics -based SPGF protection and the conditions for their applicability. The use of modern simulation systems, such as Matlab, makes it possible to create more accurate models of 6–10 kV networks for calculating higher harmonics in single-phase-to-ground fault currents and to obtain more precise estimates of the minimum higher harmonics level in single-phase-to-ground fault currents in compensated 6–10 kV cable networks, which determine the requirements for protection against this type of fault based on higher harmonics.

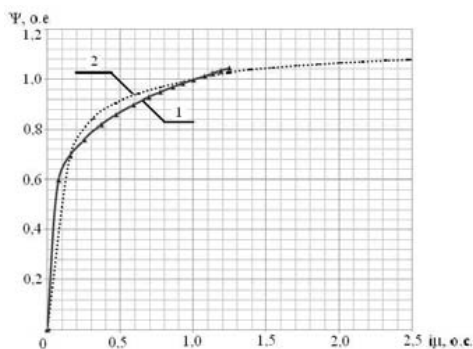
The influence of the accuracy of the magnetization curve approximation on the assessment of the higher harmonic spectrum generated by transformers.

In calculating the higher harmonics generated by power transformers, [5] assumes that the magnetization curve of the transformers is approximated with acceptable accuracy by a fifth-degree polynomial:

$$i_\mu \approx \alpha \cdot \psi^5. \quad (3)$$

Fig.2 shows, for comparison, the magnetization

characteristic of E330 steel, which is widely used for manufacturing the magnetic cores of power transformers, and its approximation by a fifth-degree polynomial.



1 – initial curve; 2 – approximation by a fifth-degree polynomial

Figure 2. Magnetization curves of E330 Steel (in p.u.)

An analysis of the obtained data (Fig. 2) shows that the approximation of the magnetization curve for electrical steel used in [5] can lead to noticeable errors compared to the actual curve and, consequently, to errors in estimating the harmonics of the magnetizing current. An assessment of these errors was performed using models of transformers with a non-linear magnetic core, developed in the Matlab system. The first model used the real magnetization curve of E330 steel, while the second used its approximation by a fifth-degree polynomial. A comparison of the simulation results showed that replacing the real magnetization characteristic with its approximation by a fifth-degree polynomial yields an error in estimating the level of the 5th harmonic of up to 10% or more, and for the 7th harmonic, up to 40% or more (Figure 3).

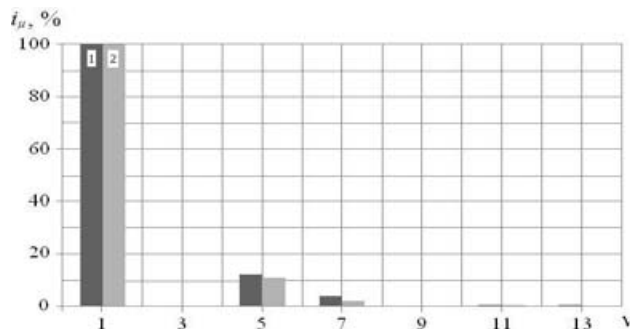
Calculations using models of 6–10/0.4 kV transformers with the real magnetization characteristic for electrical steels E42 and E330 also showed that the average ratios of the root-mean-square (RMS) values of the 5th and 7th harmonics to the total magnetizing current are within the following ranges: $I_{5*} = 0.086 - 0.154$ and $I_{7*} = 0.024 - 0.053$. For comparison, it can be noted that when assessing the minimum level of higher harmonics generated by transformers, [6] assumed these ratios to be $I_{5*} = 0.22$ and $I_{7*} = 0.1$.

Model analysis showed that the greatest accuracy in estimating the higher harmonics generated by transformers is provided by approximating their magnetization curve with an arc-tangent function (fig. 4):

$$B = \alpha \cdot \operatorname{acrtg}(\beta H) + \gamma H^m \quad (4)$$

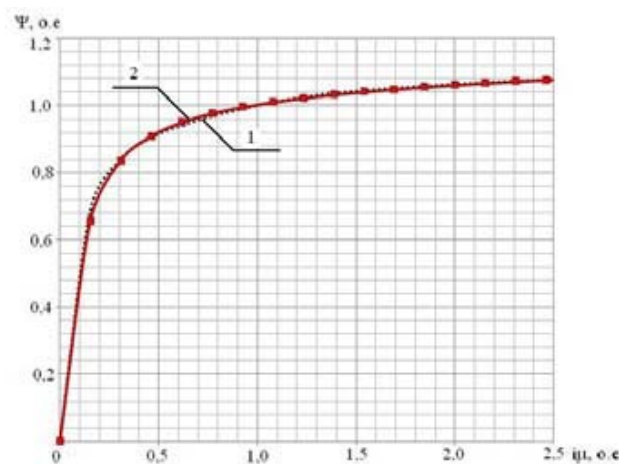
Taking into account the obtained results, models were developed in the Matlab simulation environment for all major types of 6–10/0.4 kV transformers at receiving substations, ranging in power from 630 to 10,000 kVA with winding connection schemes Y/Δ-11 and Y/Y-0, as

well as for the 110–220/6–10 kV supply transformers, ranging in power from 25 to 100 MVA, installed at the power centers of the 6–10 kV cable networks.



1 – model using the real magnetization curve of E330 steel; 2 – model using the approximation of the E330 steel magnetization curve by a fifth-degree polynomial

Figure 3. Magnetizing current spectrums obtained from transformer models in the Matlab system at $U = U_{nom}$



1 – real magnetization curve; 2 – approximation by an arc-tangent function

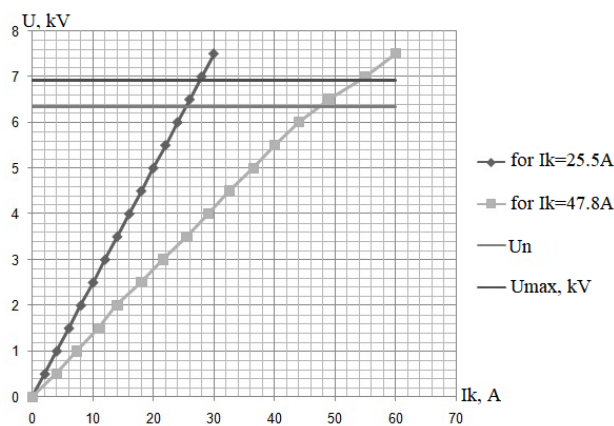
Figure 4. Magnetization curves of E330 Steel

The Influence of higher harmonics generated by arc-suppression reactors.

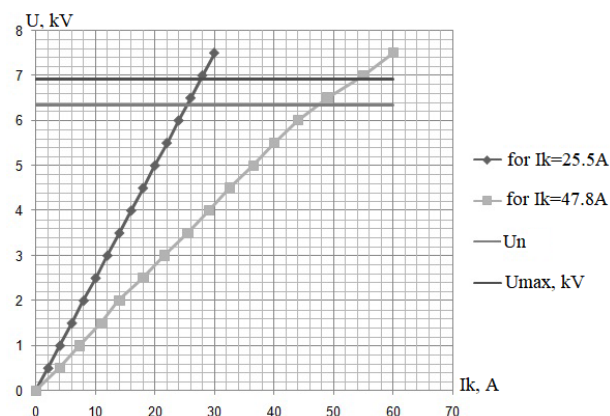
In calculations of higher harmonics in single-phase-to-ground fault currents, it is often assumed (e.g., in [5, 6]) that the arc-suppression reactor is not a significant source of higher harmonics because it has a practically linear magnetization characteristic across the entire range of compensation current regulation. However, experimental data, provided, for example, in [10], [11], show that the degree of linearity of the ASR's voltage-ampere characteristic (magnetization characteristic) significantly depends on its operating mode. Therefore, the level of higher harmonics generated by the ASR will vary depending on the operating mode of the arc-suppression reactor.

The highest degree of non-linearity in the voltage-ampere characteristics (magnetization characteristics) and, consequently, the highest level of generated harmon-

ics for step-regulated ASRs [11] occurs when operating in modes with maximum values of voltage and compensation current (Fig. 5).



a)



b)

a – for a continuously regulated reactor of RZDPOM type; b – for a step-regulated reactor of ZROM type

Figure 5. Voltage-ampere characteristics of arc-suppression reactors

The results of calculations for the harmonics generated by plunger-type and step-type arc-suppression reactors, performed using models with the magnetization curve approximated by equation (1) for various levels of operating voltage on the ASR and the maximum compensation current, are presented in Table 2

Table 2. Calculated values of higher harmonics generated by ASR at various levels of operating voltage and maximum compensation current

Harmonic number, ν	$I_{\nu,m}$, % at U_{sc}		
	$0.9U_{f,n}$	$U_{f,n}$	$1.1U_{f,n}$
1	100	100	100
3	0.655	1.097	1.888
5	0.157	0.294	0.565
7	0.009	0.042	0.109

An analysis of the data in Table 2 shows that, in contrast to other sources of higher harmonics in 6–10 kV networks (thyristor converters, transformers, etc.), the 3rd harmonic is the most pronounced in the higher harmonics spectrum generated by the arc-suppression reactor. The total level of significant harmonics (3rd, 5th, and 7th) generated by the arc-suppression reactor in the operating mode under consideration is approximately 1.13%.

Model analysis of the ASR also showed that when the ASR operates with compensation currents lower than the limit (rated) current, the degree of linearity of the voltage-ampere characteristics significantly increases, and the level of harmonics generated by the reactor sharply decreases. Specifically, for step-regulated ASRs operating with $I_{tap,nom}$ or for continuously regulated (plunger-type) ASRs operating with minimum compensation current, the level of harmonics they generate, as the model analysis showed, is practically zero. Given that such ASR operating modes are possible in service, the ASR can be excluded from the 6–10 kV network calculation scheme when assessing the minimum level of Higher Harmonics in the Single-Phase-to-Ground Fault current.

Considering the above, the calculation model of a compensated 6–10 kV cable network should take into account the following main factors influencing the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current: short-circuit power at the system buses; rating (power) and parameters of the supply transformer installed at the power center; the varying number of transformers of different ratings installed at the receiving substations, which generally have different parameters (magnetizing current I_{μ} in p.u., short-circuit voltage

U_{sc} , etc.); The difference in coupling impedances between the RS (lengths and total cross-section of the cable lines); the loads of the receiving transformers. In a generalized form, the calculation scheme for a 6–10 kV network, which takes into account the influence of these main factors, can be presented as shown in Figure 6.

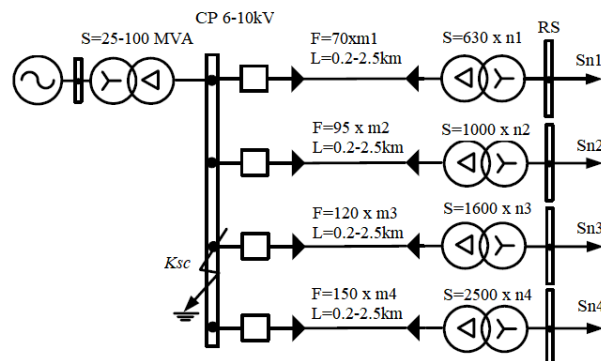


Figure 6. Generalized 6–10 kV network diagram for estimating the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current

The parameters of the elements in the calculation scheme (Fig. 6) and their ranges of variation were determined based on a statistical analysis of data from 6–10 kV cable networks of power supply systems for enterprises across a range of industries (metallurgical, oil refining, pulp and paper) and urban power supply systems (Table 3)

Table 3. Parameters of the elements of the calculation scheme for estimating the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current

$I_{c\Sigma}$, A	$I_{k.sup}^{(3)}$, kA	$S_{sup.tr}$, MVA	L , km	L_{subs} , km	S , p.u.
20-100	20-40	25-100	0.3-2.5	0.8	0.7-1.5

Table 3 lists the values of the following parameters of the elements in the calculation scheme $I_{c\Sigma}$ is the total capacitive current of the network; $I_{k.sup}^{(3)}$ is the values of the three-phase short-circuit current at the buses of the supply system; $S_{sup.tr}$ is the rating (power) of the supply transformer installed at the power center; L_{subs} – the length of the cable lines (CL) connecting the PC with the receiving substations; S is the ratio of the power of the supply transformer to the total power of the receiving substation transformers.

Table 4 shows the distribution by the rating (or magnitude of unit capacity) of the transformers installed at the receiving substations.

Table 4. Share of transformers of various unit ratings in the network and the magnitudes of cross-sections of communication lines between the power center and receiving substations

Parameter	for transformer with rated power, kVA"			
	630	1000	1600	2500
Share in the total power of load transformers, %	25	64	7	4
Average cross-section of the cable line from the power center to the TS (DTS), mm ²	70	95	120	150

Results of calculations for harmonic levels during single-phase-to-ground fault on a 6–10 kV cable network model. The mathematical model of the 6–10 kV cable network for the calculation scheme shown in Fig. 6 was realized in the Matlab system environment.

Based on calculations performed on the model, the

minimum levels of the 5th harmonic (which mainly determines the overall minimum level of higher harmonics in single-phase-to-ground fault currents) were determined for compensated 6–10 kV networks for various values of the total network capacitive current $I_{c\Sigma}$ and the parameter S (1).

Table 5 also provides, for comparison, the pickup current values of the USZ-2/2 device and the calculated estimates of the minimum level of the 5th harmonic in the single-phase-to-ground fault current [5], [6].

Table 5. Calculated Values of the 5th harmonic in the single-phase-to-ground fault current

5th harmonic current at the single-phase-to-ground fault location	Current value I_5 , A			
	$I_{c\Sigma}$ =25A	$I_{c\Sigma}$ =50A	$I_{c\Sigma}$ =100A	$I_{c\Sigma}$ =250A
Calculation for $S=0.7$	0.2-0.23	0.56-0.65	1.55-1.78	4.73-5.44
Calculation for $S=1.5$	0.33-0.38	0.88-0.98	2.43-2.67	6.46-7.11
Calculation for $S=1.5$, according [5]	0.65	1.3	2.6	6.5
Calculation for $S=0.75$, according [6]	0.47	0.94	1.88	4.7
Operating current USZ-2/2	0.95	1.4	2.5	4.85

The minimum level of higher harmonics was determined for the minimum operating voltage value in the network $U_{op}=0.95U_{nom}$. During the calculations, the parameters of the network elements were varied within the limits presented in table 3 and table 4.

An analysis of the data presented in Table 5 shows that the estimated minimum levels of higher harmonics (in single-phase-to-ground fault currents for compensated networks, obtained from model calculations, are 2–3 times lower than similar estimates obtained in [5], [6], and 3–4 times lower than the minimum pickup current of current-based single-phase-to-ground fault protection devices using higher harmonics, such as the USZ-2/2.

For single-phase-to-ground fault protection based on higher harmonics, a sensitivity factor of no less than 2–2.5 is recommended [8]. To ensure this level of sensitivity in operating modes of 6–10 kV cable networks where the higher harmonics level is minimal, the minimum primary pickup current of existing and developing single-phase-to-ground fault protection devices based on higher harmonics should be reduced to values of approximately 0.1 A.

V. CONCLUSION

The main requirements for the equivalent calculation scheme of a 6–10 kV cable network for estimating the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current were formulated, and the ranges of variation and average values of its parameters were determined.

The developed mathematical model of the 6–10 kV cable network takes into account the main factors determining the minimum level of higher harmonics in the single-phase-to-ground fault current.

Based on the results of computational experiments performed on mathematical models of 6–10 kV cable networks, it was established that to ensure the required sensitivity, single-phase-to-ground fault protection devices based on the use of higher harmonics must have a primary pickup current of no more than 0.1 A.

REFERENCE

- [1] Abolhasani, A., Vahidi, B., & Shariatzadeh, H. (2019). An Adaptive Earth Fault Protection Scheme for Compensated Medium-Voltage Distribution Networks. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 34(3), 1146–1155.
- [2] Goyal, S., & Sharaf, A. M. (2017). A Comprehensive Review of Earth Fault Detection and Location Techniques in Compensated Distribution Networks. *Electric Power Systems Research*, 149, 239–251.
- [3] Saleh, S. A., & Badr, H. S. (2016). Directional Earth Fault Protection Using Third Harmonic Components in Compensated Power Networks. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 10(15), 3848–3857.
- [4] Panić, S., Vasić, P., & Pezo, M. (2019). Analytic Modeling of Magnetic Saturation and Hysteresis Using Arctangent Functions for Power Transformer Transient Analysis. *Journal of Electrical Engineering*, 70(1), 16–25.
- [5] Vaz, N., & Soares, M. (2022). Harmonic Analysis in Power Systems: The Impact of Transformer Core Saturation Modeled with Analytical Functions. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, 32(4), e13256.
- [6] Jha, R. K., & Dash, P. K. (2018). Modeling and Harmonic Analysis of Magnetizing Inrush Current in Power Transformers. *IET Power Electronics*, 11(13), 2097–2106.
- [7] Guo, Y., & Dong, Y. (2015). Analysis of Harmonic Characteristics of Arc-Suppression Coil Grounding Systems and Its Influence on Relay Protection. *Electric Power Systems Research*, 126, 18–24.
- [8] Popov, E. G., & Novikov, L. A. (2020). The Influence of Arc-Suppression Coil Non-linearity on the Third Harmonic Zero-Sequence Current in Medium Voltage Networks. *E3S Web of Conferences*, 178, 01025.
- [9] Wade, G. S., & Brown, P. E. (2016). Petersen Coil Design and Harmonic Performance: Minimizing Higher Harmonics in Compensated Networks. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 52(5), 3740–3747.
- [10] Saleh, A. E., & El-Kholy, M. A. (2023). Effect of Voltage Unbalance on the Dynamic Performance of Squirrel-Cage Induction Motor Drive: A Simulation and Experimental Study. *Alexandria Engineering Journal*, 62(2), 527–540.
- [11] Al-Ani, R. O., & Al-Tameemi, I. M. (2018). Virtual Test Bench Development for Induction Motor Performance Analysis under Voltage Unbalance Conditions. *International Journal of Power Electronics and Drive Systems*, 9(3), 1335–1345.
- [12] IEC 60255-151: Requirements for Functional and Performance Standards for Earth Fault Protection in Power Systems.
- [13] IEEE C37.90.1: IEEE Standard for Surge Withstand Capability (SWC) Tests for Protective Relays.
- [14] Mahfouz, S. E., & Abuelnasr, H. A. (2017). A novel method for estimating harmonic distortion in medium voltage distribution networks. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 93, 21–29.
- [15] Wojciechowski, J., & Kacek, A. (2020). Assessment of minimum harmonic current level in resonant grounded medium voltage networks for relay protection settings. *Energies*, 13(12), 3165.
- [16] Toma, R., Popescu, M., & Boicea, V. A. (2018). Nonlinear modeling of power transformer magnetization characteristics using analytical functions for transient analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 54(11), 1–8.
- [17] Sadeghian, M. S., & Ghasemi, S. (2017). Investigation of the harmonic current contribution from arc suppression coils during single-phase-to-ground faults. *Electric Power Systems Research*, 142, 198–205.
- [18] Chen, M., Zhang, B., & Wang, Y. (2020). A novel analytical model for the single-phase-to-ground fault current considering the non-linearity of Petersen coil. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 116, 105572.
- [19] Luo, C., Wang, Z., & Li, R. (2022). Sensitivity improvement of high-impedance ground fault protection based on transient zero-sequence current in compensated networks. *IEEE Access*, 10, 70908–70917.
- [20] Abolhasani, A., Vahidi, B., & Shariatzadeh, H. (2019). An adaptive earth fault protection scheme for compensated medium-voltage distribution networks. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 34(3), 1146–1155.

Received 02.10.2025;

Accepted 14.11.2025;

Published 26.12.2025;

ОЦІНКА МІНІМАЛЬНОГО РІВНЯ ВИЩИХ ГАРМОНІК СТРУМУ ОДНОФАЗНОГО ЗАМИКАННЯ НА ЗЕМЛЮ У КОМПЕНСОВАНИХ МЕРЕЖАХ 6-10 КВ

ШАМРАЙ А.Є.

аспірант кафедри електричних машин НУ «Запорізька політехніка», заступник Генерального директора ТОВ «Плутон ІС», Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3516-1989>, e-mail: shamray_andrey@me.com;

ІСАЄВ І.В.

аспірант кафедри електричних машин НУ «Запорізька політехніка», начальник комерційного відділу ТОВ «Електра», м.Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5686-4430>, e-mail: isaiev.ihor@gmail.com;

Мета роботи. розробка моделі компенсованої мережі 6–10 кВ, а також методики вибору параметрів її елементів на основі оцінки мінімального рівня найвищих гармонік струму однофазного замикання на землю.

Методи дослідження. Для оцінки мінімального рівня вищих гармонік у струмах однофазного замикання на землю використовувалася узагальнена модель компенсованої кабельної мережі 6–10 кВ та її елементів у системі Matlab з пакетом розширення Simulink. Узагальнена модель компенсованої кабельної мережі 6–10 кВ та параметри її елементів отримано на основі статистичного аналізу даних щодо систем електропостачання міст та промислових підприємств.

Отримані результати. Сформульовано основні вимоги до розрахункової схеми заміщення кабельної мережі 6–10 кВ для оцінки мінімального рівня вищих гармонік струму при однофазному замиканні на землю, визначено діапазони зміни та середні значення її параметрів. Розроблена математична модель кабельної мережі 6–10 кВ враховує основні фактори, що визначають мінімальний рівень вищих гармонік струму однофазного замикання на землю. На основі результатів обчислювальних експериментів, виконаних на математичних моделях кабельних мереж 6–10 кВ, встановлено, що для забезпечення необхідної чутливості пристрою захисту від однофазного замикання на землю, що ґрунтуються на використанні вищих гармонік, повинні мати первинний струм спрацювання не більше 0,1 А.

Наукова новизна. Розроблено модель компенсованої мережі 6–10 кВ, яка дозволяє уточнити вимоги до чутливості захисту від однофазного замикання на землю, заснованих на використанні вищих гармонік, та підвищити ефективність їх функціонування.

Практична цінність. На основі математичної моделі запропоновано методику вибору параметрів її елементів на основі оцінки мінімального рівня вищих гармонік у струмах однофазного замикання на землю.

Ключові слова: компенсована мережа; математична модель; трансформатор; захист від вищих гармонік.