



Науковий журнал

ЕЛЕКТРОТЕХНІКА та ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКА

№1'2026

*Засновано національним університетом "Запорізька політехніка"
у травні 1999 року*

Виходить 4 рази на рік

Запоріжжя

2026

Головний редактор:

Тиховод Сергій Михайлович

доктор технічних наук (електрична інженерія), професор,
професор кафедри електричних машин Національного
університету "Запорізька політехніка", Україна

Заступник головного редактора:

Коцур Михайло Ігорович

кандидат технічних наук (електрична інженерія), доцент,
доцент кафедри електричних та електронних апаратів
Національного університету "Запорізька політехніка",
Україна.

*Включено до переліку
наукових фахових видань України (категорія Б)
(наказ МОНУ № 409 від 17.03.2020 р.,
наказ МОНУ № 1471 від 26.11.2020 р.)*

ЧЛЕНИ РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ:

Славомір Пешлік, доктор наук (електрична інженерія), професор університету, кафедра електротехніки, факультет телекомунікацій, комп'ютерних наук та електротехніки, Бидгоцький технологічний університет, *Польща*.

Стен Зурек, доктор наук (електрична інженерія), керівник відділу досліджень та інновацій Megger Instruments Ltd, науковий співробітник Кардіффського університету, *Велика Британія*.

Зірка Сергій Євгенович, доктор технічних наук, професор, (електрична інженерія) професор кафедри кібербезпеки та комп'ютерно-інтегрованих технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, *Україна*.

Яримбаш Дмитро Сергійович, доктор технічних наук (електрична інженерія), професор, проректор з наукової роботи Запорізького національного університету, *Україна*.

Рендзіняк Сергій Йосипович, доктор технічних наук (електрична інженерія), професор, професор кафедри радіофізики та комп'ютерних технологій, Львівський національний університет імені Івана Франка, *Україна*.

Папайка Юрій Анатолійович, доктор технічних наук (електрична інженерія), професор, завідувач кафедри електроенергетики Національного університету «Дніпровська політехніка», *Україна*.

Данильченко Дмитро Олексійович, кандидат технічних наук (електрична інженерія), доцент, професор кафедри передачі електричної енергії Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", *Україна*.

Коцур Ігор Михайлович, кандидат технічних наук (електрична інженерія), доцент, доцент кафедри електричних машин, Національний університет «Запорізька політехніка», *Україна*.

Шрам Олександр Анатолійович, кандидат технічних наук (електрична інженерія), доцент, завідувач кафедри електропостачання промислових підприємств, Національний університет «Запорізька політехніка», *Україна*.

Назарова Олена Сергіївна кандидат технічних наук (електрична інженерія), доцент, доцент кафедри електропривода та автоматизації промислових установок, Національний університет «Запорізька політехніка», *Україна*.

Безверхня Юлія Сергіївна, доктор філософії (електрична інженерія), доцент кафедри електричних машин, Національний університет "Запорізька політехніка", *Україна*.

Журнал включено до міжнародних наукометричних баз, каталогів та систем пошуку: Index Copernicus, CrossRef; Directory of Open Access Journals (DOAJ); OpenAIRE; Public Knowledge Project (PKP) Index; ResearchBib - Academic Resource Index; Scientific Indexing Services (SIS); Ulrich's Periodicals Directory; WorldCat; Journal Factor Indexed Journals; Наукова періодика України – проект Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського (НБУВ). Національний репозитарій академічних текстів України.

У науковому журналі друкуються результати фундаментальних та прикладних досліджень, зокрема результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора філософії, доктора і кандидата технічних наук за спеціальністю **G3 - електрична інженерія**. Науковий профіль видання (назва кластеру): Безпечна, чиста енергетика та енергоефективність. Розділи журналу: 1. Електротехніка; 2. Електроенергетика.

Журнал розповсюджується за Каталогом періодичних видань України (передплатний індекс – 22913). З 2024 р. журнал «Електротехніка та Електроенергетика» вимушений припинити співпрацю з АТ «Укрпошта» щодо передплати та розповсюдження друкованих примірників журналу. З електронною версією журналу можна ознайомитись на сайті журналу.

Видавець: Національний університет "Запорізька політехніка", м. Запоріжжя. Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №6952 від 22.10.2019р.

Реєстрація суб'єкта у сфері друкованих медіа: Рішення Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення No 3040 від 07.11.2024 року. Ідентифікатор медіа: R30-05581.

Реєстрація журналу: Журнал зареєстровано у Міністерстві юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ №24219-14059 ПР від 07.11.2019р.

Адреса редакції: Редакційно-видавничий відділ. Національний університет "Запорізька політехніка", вул. Університетська, 64, м. Запоріжжя, 69011, Україна. Телефон: +380(61)769-82-96 Факс: (061) 764-21-41 e-mail: rvv@zp.edu.ua.

Електронна адреса журналу <http://ee.zp.edu.ua> E-mail: etae@ukr.net

Комп'ютерна верстка Дяченко О.О. Редактор англійських текстів Войтенко С.В. Журнал підписано до друку 19.03.2026 за рекомендацією вченої ради Національного університету "Запорізька політехніка" (протокол №9 від 27.03.2026 р.). Формат 60x84/8. Ум. Др. Арк. 9,65. Тираж 300 прим. Зам. №501.

ZAPORIZHZHIA POLYTECHNIC NATIONAL UNIVERSITY



Scientific journal

ELECTRICAL ENGINEERING & POWER ENGINEERING

№1'2026

Founded by Zaporizhzhia Polytechnic National University in May 1999

4 issues per year

Zaporizhzhia

2026

Editor-in-chief:

Sergiy Tihovod

Doctor of Science (D.Sc.) in Engineering (Electrical Engineering) Professor, Professor of the Electrical Machine Department of the Zaporizhzhia Polytechnic National University, Ukraine.

Associate Editor-in-chief:

Mykhailo Kotsur

Ph.D. (Electrical Engineering), Assoc. Professor, Assoc. Professor of the Electrical and Electronic Apparatuses Department of the Zaporizhzhia Polytechnic National University, Ukraine.

*The journal has been included
scientific professional editions of Ukraine
(Order of the Ministry of Education and Science
№ 409 dated 17.03.2020,
Order of the Ministry of Education and Science
№ 1471 dated 26.11.2020)*

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Slawomir Cieřlik, Doctor of Science (D.Sc.) in Engineering (Electrical Engineering), University Professor, Department of Electrical Engineering, Faculty of Telecommunications, Computer Science and Electrical Engineering, Bydgoszcz University of Technology, *Poland*.

Stan Zurek, Doctor of Science (D.Sc.) in Engineering (Electrical Engineering), Head of Research and Innovation of Megger Instruments Ltd, Research Associate of Cardiff University, *The United Kingdom*.

Serhii Zirka, Doctor of Science (D.Sc.) in Engineering (Electrical Engineering), Professor, Professor of the Department of Cyber Security and Computer-Integrated Technologies, Oles Honchar Dnipro National University, *Ukraine*.

Dmytro Yarymbash, Doctor of Science (D.Sc.) in Engineering (Electrical Engineering), Professor, Vice-Rector for Scientific Work of the Zaporizhzhia National University, *Ukraine*.

Rendzinyak Serhiy, Doctor of Science (D.Sc.) in Engineering (Electrical Engineering), Professor, Professor of the Department of Radiophysics and Computer Technologies, Ivan Franko National University of Lviv, *Ukraine*.

Yurii Papaika, Doctor of Science (D.Sc.) in Engineering (Electrical Engineering), Professor, Head of the Department of Electrical Power Engineering, Dnipro University of Technology, *Ukraine*.

Dmytro Danylchenko, Ph.D. (Electrical Engineering), Associate Professor, Professor of the Department of Electric Power Transmission of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", *Ukraine*.

Igor Kotsur, Ph.D. (Electrical Engineering), Associate Professor, Associate Professor of Electrical Machines Department of the Zaporizhzhia Polytechnic National University, *Ukraine*.

Oleksandr Shram, Ph.D. (Electrical Engineering), Associate Professor, Head of Power Supply of Industrial Enterprises Department, Zaporizhzhia Polytechnic National University, *Ukraine*.

Olena Nazarova, Ph.D. (Electrical Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Electric Drive and Automation of Industrial Plants, Zaporizhzhia Polytechnic National University, *Ukraine*.

Yuliia Bezverkhnia, Ph.D. (Electrical Engineering), Associate Professor of Electrical Machines Department of the Zaporizhzhia Polytechnic National University, *Ukraine*.

The journal included in the international scientometric databases, catalogs and search systems: Index Copernicus; CrossRef; Directory of Open Access Journals (DOAJ); OpenAIRE; Public Knowledge Project (PKP) Index; ResearchBib - Academic Recourse Index; Scientific Indexing Services (SIS); Ulrich's Periodicals Directory; WorldCat; Journal Factor Indexed Journals; Scientific Periodicals of Ukraine — the project of the National Library of Ukraine named V.I. Vernadsky (NBUV), National Repository of Academic Texts of Ukraine.

The scientific journal publishes the results of fundamental and applied research, specifically including dissertation findings for the academic degrees of Doctor of Philosophy (PhD), Doctor of Technical Sciences, and Candidate of Technical Sciences in specialty G3 – Electrical Engineering. Scientific profile of the publication (cluster name): Safe, Clean Energy, and Energy Efficiency. Journal sections: 1. Electrotechnics; 2. Electroenergetics.

The journal is distributed by the Catalog of periodicals of Ukraine (subscription index – 22913). Effective from 2024, the journal "Electrical Engineering and Power Engineering" is compelled to terminate its cooperation with JSC "Ukrposhta" regarding the subscription and distribution of printed copies. The electronic version of the journal can be found on the journal's [website](#).

Founder and editor: Zaporizhzhia Polytechnic National University, Zaporizhzhia. Certificate of publisher Civil Code №6952 dated October 22, 2019.

Registration of an entity in the field of print media: Decision of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No. 3040 of November 7, 2024. Media ID: R30-05581.

Journal was registered: by the Ministry of Justice of Ukraine. Registration number KV № 24219-14059 PR dated November 7, 2019.

Address of editor and editorial office: Zaporizhzhia Polytechnic National University, Universitets'ka 64 st., Zaporizhzhia, 69011, Ukraine. Phone: +380(61)769-82-96 Fax: (061) 764-21-41 e-mail: rvv@zp.edu.ua.

E-address: <http://ee.zp.edu.ua>; **E-mail:** etae@ukr.net

Computer layout Dyachenko O.O. Editor of English texts Voitenko S.V. The journal was signed on March 19, 2026 on the recommendation of the academic council of the Zaporizhzhia Polytechnic National University (Protocol No.9 dated March 27, 2026). Sheet size 60x84/8. Cond. Print. Sheets 6,98. Number of copies printed 300. Rep. № 501.

ЗМІСТ

I ЕЛЕКТРОТЕХНІКА

Коцур М.І., Данильченко Д.О., Синецький А.В.

Вдосконалення підходів щодо лінеаризації магнітних властивостей осердя електромеханічних перетворювачів для чисельних розрахунків.....7

Садовий О.С., Ставинський А.А., Руденко А.Ю., Ставинський Р.А., Гуров А.П., Васильєв О.Г.

Особливості синтезу редукованих пристроїв спостереження стану для електроприводів постійного струму з модальним керуванням.....16

Коваленко М.А., Цивінський С.С., Коваленко І.Я., Гайденко Ю.А., Труханов О.В.

Аналіз питомих вагогабаритних показників високошвидкісного синхронного двигуна із постійними магнітами.....27

Шарейко Д.Ю., Білюк І.С., Савченко О.В., Мардзявко В.А., Тодосієнко А.М.

Математична модель відновлення приведенного магнітного моменту точкового диполя для ідентифікації феромагнітних об'єктів.....38

Шилкова Л.В., Михайличенко О.С.

Визначення оптимального значення ковзання при мінімізації електричних втрат асинхронного двигуна.....48

Осадчий В.В., Назарова О.С., Куніцин А.В.

Система автоматичного керування гідромодулем охолодження дата-центру.....56

II ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКА

Олійніченко М.Ю., Бялобржеський О.В., Постіл. А.О.

Дослідження витрат на електроенергію при оптимізації енергетичних потоків в мікромережі з розосередженими джерелами за умов нестабільної генерації.....65

Замкова О.А., Кошеленко А.О.

Дослідження річного енергоспоживання житлової будівлі з фотоелектричною станцією.....75

CONTENTS

I ELECTRICAL ENGINEERING

Kotsur M.I., Danylchenko D.O., Synetskyi A.V.

Improving approaches to the linearization of magnetic properties of electromechanical converter cores for numerical calculations.....7

Sadovoy O.S., Stavynskyy A.A., Rudenko A.Yu. Stavynskyy R.A., Gurov A.P., Vasiliev O.G.

Features of the synthesis of reduced state monitoring devices for dc electric actuators with modal control.....16

Kovalenko M.A., Tsyvinskyi S.S., Kovalenko I.Y., Haidenko Y.A., Trukhanov O.V.

Analysis of the specific weight and size indicators of a high-speed permanent magnet synchronous motor.....27

Shareyko D.U., Biliuk I.S., Savchenko O.V., Marziavko V.A., Todosienko A.M.

Mathematical model of recovery of the reduced magnetic moment of a point dipole for identification of ferromagnetic objects.....38

Shylkova L.V., Mykhailychenko O.S.

Determination of the optimal slip value for minimizing electrical losses in an induction motor...48

Osadchy V.V., Nazarova O.S., Kunitsyn A.V.

Automatic control system for data center cooling hydraulic modules.....56

II POWER ENGINEERING

Oliynichenko M.Y., Bialobrzheskyi O.V., Postil A.O.

Investigation of electricity costs during energy flow optimization in a microgrid with distributed energy sources under conditions of unstable generation.....65

Zamkova O.A., Koshelenko A.O.

Research on ensuring annual energy consumption of a residential building with a photoelectric plant.....75

УДК 621.313

ВДОСКОНАЛЕННЯ ПІДХОДІВ ЩОДО ЛІНЕАРИЗАЦІЇ МАГНІТНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОСЕРДЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ

КОЦУР М.І.

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електричних та електронних апаратів, Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0072-5437>, e-mail: kotsur_m@ukr.net;

ДАНИЛЬЧЕНКО Д.О.

канд. техн. наук, доцент, професор кафедри передачі електричної енергії, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7912-1849>, e-mail: dmytro.danylchenko@khp.edu.ua;

СИНЕЦЬКИЙ А.В.

аспірант, Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1859-4171>, e-mail: xibi-tur@ukr.net;

Мета роботи. Вдосконалення математичної моделі лінеаризації магнітних властивостей електротехнічної сталі осердя статора та ротора на основі метода кусочно-лінійної апроксимації кривої намагнічування, що дозволить значно скоротити кількість нелінійних рівнянь, та значно зменшити час чисельної реалізації 3D та 2D коло-польової моделі асинхронного електромеханічного перетворювача при збереженні точності чисельних розрахунків.

Методи дослідження. Використовуються аналітичні методи розрахунку електромагнітного поля, метод скінчених елементів, аналітичні методи розрахунку електричних та магнітних кіл, методи кусочно-лінійної апроксимації.

Отримані результати. Вдосконалено математичні моделі щодо лінеаризації кривої намагнічування для електротехнічної сталі осердя статора та ротора просторових 3D та плоско-паралельних 2D геометричних моделей осердя статора та ротора активної частини електромеханічного перетворювача змінного струму. Реалізовано підхід, щодо дроблення 2D загальної геометричної моделі осердя статора та ротора електромеханічного перетворювача на n -ну кількість елементарних площин осердя статора та ротора з застосуванням лінійної функції кривої намагнічування при $\mu_r = \text{const}$. На основі даних результатів 2D польового моделювання дослідного зразка електромеханічного перетворювача для режиму неробочого ходу, у порівнянні з результатами моделювання при врахуванні загальної кривої намагнічування за всією розрахунковою областю, отримані значення нев'язки за струмом якоря, яка не перевищує 2,654%. Це дозволило знизити в 4,89 разів час чисельних розрахунків для 2D нестационарної постановки задачі при застосуванні спеціального програмного забезпечення Comsol Multiphysics.

Наукова новизна. Вдосконалено метод лінеаризації магнітних властивостей електротехнічної сталі осердя статора та ротора електромеханічного перетворювача, який дозволяє для окремих ділянок розрахункової області осердя статора та ротора застосовувати постійне значення відносної магнітної проникності $\mu_r = \text{const}$. з достатньою похибкою чисельних розрахунків.

Практична цінність. Запропонована методика щодо лінеаризації кривої намагнічування для електротехнічної сталі осердя статора та ротора просторових 3D та плоско-паралельних 2D геометричних моделей активної частини електромеханічного перетворювача змінного струму може бути застосована для різних типів електричних машин.

Ключові слова: кусочно-лінійна апроксимація, крива намагнічування, чисельні розрахунки, осердя, електрична машина.

І. ВСТУП

Сучасний етап розвитку електромеханіки характеризується жорсткими вимогами до точності проектування та енергоефективності електромеханічних перетворювачів (ЕМП) змінного струму, які залишаються основними споживачами електроенергії в промисловості. Проектування високоефективних ЕМП

неможливе без детального аналізу магнітного поля, що зазвичай реалізується за допомогою чисельних методів, зокрема методу скінчених елементів (МСЕ) [1]. Однією з головних проблем при моделюванні електромагнітних процесів в ЕМП є сильна нелінійність магнітних характеристик феромагнітних матеріалів осердя статора та ротора ЕМП. Залежність магнітної індукції від напруженості поля $B(H)$, відома як

© Коцур М.І., Данильченко Д.О., Синецький А.В., 2026

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (CC-BY-SA 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2026-1-1>

крива намагнічування, має складний характер з яскраво вираженою зоною насичення. Пряме врахування повної нелінійності у 3D та 2D польових моделях вимагає колосальних ітераційних ресурсів, що значно сповільнює розрахункових процес при застосуванні МСЕ [1], [2]. Незважаючи на велику кількість існуючих аналітичних залежностей для опису кривої намагнічування (експоненціальні, степеневі функції, сплайни), пошук «золотої середини» між математичною простою моделі та її фізичною достовірністю залишається відкритим питанням. Лінеаризація на певних ділянках або застосування диференціальної магнітної проникності дозволяє пришвидшити розрахунки, проте вимагає ретельного підбору показника ступеня n (зазвичай від 7 до 11). В [12] автор вказує на ефективність використання степеневих рядів для опису «спинки» кривої намагнічування, що дозволяє зменшити похибку розрахунку магнітного опору зубцевої зони ЕМП.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Для вирішення крайових задач магнітостатики та динаміки магнітного поля в ЕМП за допомогою методу скінченних елементів, необхідно мати безперервну та диференційовану функцію зв'язку між вектором магнітної індукції \mathbf{B} та напруженістю магнітного поля \mathbf{H} [3]-[5]. Аналіз літератури дозволяє виділити декілька фундаментальних підходів до вирішення цієї задачі. Історично першими стали моделі, що використовують дробово-раціональні або експоненціальні залежності [4]-[6]. До них відноситься модель Фроліха-Кеннелі [5]. Ця модель описується виразом:

$$B = \frac{H}{a + bH}.$$

Хоча модель є зручною для аналітичних розрахунків магнітних кіл, вона демонструє значні похибки (до 10-15%) у зоні «коліна» кривої та не враховує початкову магнітну проникність [5]-[6]. До аналітичних моделей на основі елементарних функцій також відноситься експоненціальна апроксимація. У роботах [7]-[8] запропоновано використовувати суми експонент для кращого опису переходу до насичення. Такі моделі забезпечують високу гладкість, що може забезпечити погану збіжність за методом Ньютона.

Для підвищення точності в інженерних розрахунках часто застосовують кусково-поліноміальну інтерполяцію. Одною з різновидностей кусково-поліноміальну інтерполяцію є інтерполяція сплайнами. Як зазначають автори в [1] та [9]-[10], використання кубічних сплайнів дозволяє досягти мінімальної нев'язки з експериментальними даними. Головною перевагою є неперервність другої похідної, що забезпечує стабільність розрахунку диференціальної магнітної проникності dB/dH . Головним недоліком щодо застосування кубічних сплайнів можуть генерувати фізично некоректні перегиби (немонотонність) при

недостатній кількості вихідних точок, що веде до розбіжності ітераційного процесу [11]. Для апроксимації характеристик сучасних електротехнічних сталей (наприклад, марки 2412 або 2411) часто використовують метод найменших квадратів (МНК) для мінімізації середньоквадратичного відхилення. Автором у [12] запропоновано модель виду:

$$H = (a + b \cdot B^n) \cdot B.$$

Ця модель широко використовується в комерційному ПЗ для польових розрахунків (ANSYS Maxwell, MagNet). Вона добре описує глибоке насичення, але вимагає ретельного підбору показника ступеня n (зазвичай від 7 до 11). В [12] автор вказує на ефективність використання степеневих рядів для опису «спинки» кривої намагнічування, що дозволяє зменшити похибку розрахунку магнітного опору зубцевої зони ЕМП.

Сучасні дослідження також спрямовані на створення універсальних функцій, які мають властивість однаково точно описувати усі ділянки кривої намагнічування. Такі функції є основою для трансцендентних та гіперболічних моделей [13]. Одним з різновидів цих моделей є арктангенсові та гіперболічні моделі. В роботі [14] запропоновано описувати криву намагнічування сталі за допомогою функції виду:

$$B = k_1 \cdot \arctg(k_2 H) + \mu_0 H$$

Така структура автоматично враховує лінійне зростання індукції після повного насичення сталі (нахил до μ_0), що є критичним для розрахунку ЕМП великої потужності.

Таким чином, аналіз показує, що для польових та коло-польових розрахунків ЕМП найбільш перспективним є поєднання сплайн-інтерполяції (для робочих режимів) та експоненціальної екстраполяції (для розрахунку режимів пуску та короткого замикання). Вибір методу лінеаризації на кожній ітерації МСЕ дозволяє скоротити час розрахунку на 20-30% без втрати точності визначення моменту та електричних та магнітних втрат, а також збільшити збіжність в процесі чисельних розрахунків.

III. МЕТА РОБОТИ

Метою роботи є вдосконалення математичної моделі лінеаризації магнітних властивостей електротехнічної сталі осердя статора та ротора на основі метода кусочно-лінійної апроксимації кривої намагнічування, що дозволить значно скоротити кількість нелінійних рівнянь та значно зменшити час чисельної реалізації 3D та 2D коло-польової моделі асинхронного ЕМП при збереженні точності чисельних розрахунків.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГУ МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

У більшості випадків, саме із-за нерівномірного розподілу електромагнітного поля, яке викликане нерівномірним магнітним опором по контуру замикання основного магнітного потоку, має місце нерівномірне насичення електротехнічної сталі на різних ділянках осердя статора та ротора ЕМП. Тому для більш детального врахування процесів насичення електротехнічної сталі в нестационарних режимах роботи ЕМП є необхідність у розробці математичної моделі, яка заснована на уявленні суцільного нелінійного середовища активної частини ЕМП та схеми заміщення у вигляді взаємопов'язаних магнітних та електричних кіл, яка являється дискретно-інтегральним аналогом рівнянь Максвелла.

Відомо, що електромагнітне поле описується рівняннями Максвелла [107]:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta} \tag{1}$$

$$\text{rot}\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

де \vec{E}, \vec{H} - вектори напруженості відповідно електричного та магнітного полів; \vec{B} - вектор магнітної індукції; $\vec{\delta}$ - вектор щільності струму.

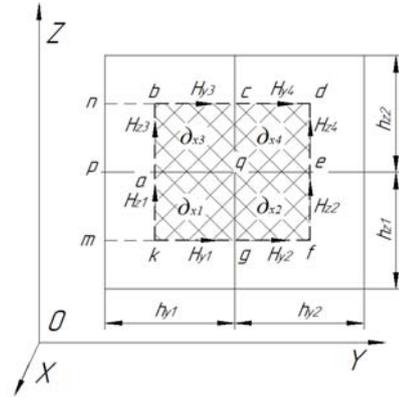
Використовуючи кінцево-різницеву апроксимацію рівнянь (1), (2), безперервний простір поля можна представити у вигляді елементарних об'ємів EO, в середні яких вектори $\vec{B}, \vec{E}, \vec{H}$ та $\vec{\delta}$ розкладаються на складові по координатним осям та приймають деякі усереднені значення, при цьому в декартовій системі координат ці EO матимуть вигляд прямокутних паралелепіпедів. Розглянемо проекцію чотирьох EO, що мають кінцеві розміри, на площину YOZ (рис.1, а). Усереднюючи складові напруженості магнітного поля по вісі Y та Z в межах відрізків $ka, ab, bc, cd, ed, fe, kg, gf$ та складові щільності електричного струму по вісі X в межах площ $S_{abcd}, S_{kaqf}, S_{gqef}$ кожного EO, рівняння $\text{rot}_x\vec{H} = \vec{\delta}_x$ можна наближено записати у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{H_{z2} - H_{z1}}{2} h_{z1} + \frac{H_{z4} - H_{z3}}{2} h_{z2} + \dots \\ & \dots + \frac{H_{y1} - H_{y3}}{2} h_{y1} + \frac{H_{y2} - H_{y4}}{2} h_{y2} = \\ & = \delta_{x1} S_{kaqg} + \delta_{x2} S_{gqef} + \delta_{x3} S_{abcd} + \delta_{x4} S_{qcde}. \end{aligned} \tag{3}$$

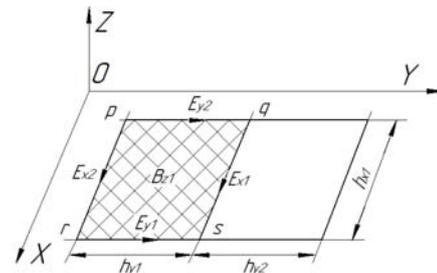
На рис. 1, б наведені проекції двох EO на площину XOY. Усереднюючи складові напруженості електричного поля по вісі X та Y в межах відрізків $qs, rs, pr, pq,$ та складові індукції магнітного поля

по вісі Z в межах S_{pqrs} , рівняння $\text{rot}_z\vec{E} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ у наближеному вигляді можна представити як:

$$\begin{aligned} E_{x2}h_{x1} + E_{y1}h_{y1} - E_{x1}h_{x1} - E_{y2}h_{y1} = \dots \\ \dots = -\frac{\partial B_{z1}}{\partial t} (h_{x1}h_{y1}). \end{aligned} \tag{4}$$



а) площина YOZ;



б) площина XOY;

Рисунок 1. Проекції елементарних об'ємів розрахункові області активної частини ЕМП на площину YOZ та XOY

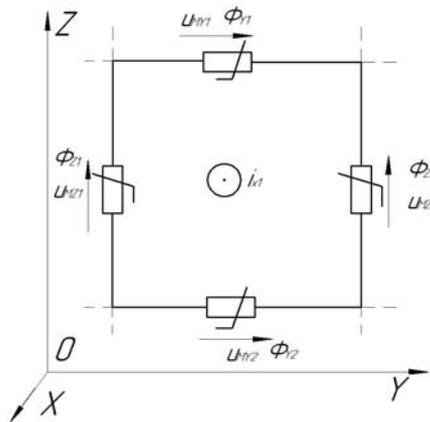
За допомоги схеми заміщення розрахункової області EO (рис. 2) рівняння (3), (4) можна записати в наступному співвідношенні:

$$\begin{cases} u_{my2} + u_{mz2} - u_{my1} - u_{mz1} = i_{x1}; \\ u_{x2} + u_{y1} - u_{x1} - u_{y1} = -\frac{d\Phi_{z1}}{dt} = e_{kz1}, \end{cases} \tag{5}$$

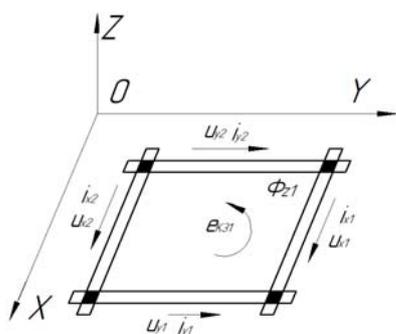
де

$$\begin{cases} u_{mz1} = \frac{1}{2} (H_{z1}h_{z1} + H_{z3}h_{z2}); \\ u_{mz2} = \frac{1}{2} (H_{z2}h_{z1} + H_{z4}h_{z2}); \\ u_{my1} = \frac{1}{2} (H_{y3}h_{y1} + H_{y4}h_{y2}); \\ u_{my2} = \frac{1}{2} (H_{y1}h_{y1} + H_{y2}h_{y2}); \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} i_{x1} &= \delta_{x1} S_{kaqg} + \delta_{x2} S_{gqef} + \delta_{x3} S_{abcq} + \delta_{x4} S_{qede}; & \bar{\delta} &= \gamma \bar{E}, \\ u_{x1} &= E_{x1} h_{x1}; u_{x2} = E_{x2} h_{x1}; & (6) & \text{де } \gamma - \text{питома провідність матеріалу.} \\ u_{y1} &= E_{y1} h_{y1}; u_{y2} = E_{y2} h_{y1}; \\ \Phi_{z1} &= B_{z1} S_{rpqs}. \end{aligned} \right.$$



а) контур магнітного кола;



б) контур електричного кола;

Рисунок 2. Контури магнітного та електричного кіл схеми заміщення розрахункової області

Рівняння (5) можна розглядати як рівняння, що записані за другим законом Кіргофа для контурів магнітного та електричного кіл, в яких величини i_{x1} та e_{kz} являються відповідно контурними МДС та ЕРС (рис. 2). Таким чином, усереднюючи складові векторів електромагнітного поля \vec{B} , \vec{H} , \vec{E} та $\vec{\delta}$ в середині кожного ЄО, розрахункову область суцільного нелінійного провідного середовища активної частини ЕМП можна представити у вигляді схеми заміщення, яка має взаємопов'язані магнітні та електричні кола по яким протікають магнітні потоки та електричні струми та на яких встановлюються магнітна та електрична напруга. Рівняння (4) та (5) при аналізі електромагнітних полів повинні доповнюватися параметричними рівняннями зв'язку $\vec{B}(\vec{H})$ та $\vec{\delta}(\vec{E})$. Якщо знехтувати струмами зміщення у порівнянні зі струмомами провідності та не враховувати теплові процеси, вектори $\vec{\delta}$ та \vec{E} будуть зв'язані лінійними рівняннями:

Зв'язок між індукцією та напруженістю магнітного поля в загальному випадку може бути нелінійним, неоднозначним та залежить від напрямку векторів \vec{B} та \vec{H} . Якщо знехтувати явищем гістерезису та прийняти колінарність векторів \vec{B} та \vec{H} , то в якості єдиної залежності $B(H)$ можна прийняти основну криву намагнічення матеріалу. Тоді в цьому випадку:

$$\vec{B} = \mu(H) \cdot \vec{H}, \tag{8}$$

де $\mu(H)$ - нелінійна скалярна функція.

Для координатних складових \vec{B} та \vec{H} рівняння (8) можна написати у наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} B_x &= \mu(H) H_x = \mu\left(\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}\right) H_x; \\ B_y &= \mu(H) H_y = \mu\left(\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}\right) H_y; \\ B_z &= \mu(H) H_z = \mu\left(\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}\right) H_z. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Згідно рівняння (9) кожна складова індукції нелінійно залежить від усіх складових напруженості магнітного поля, тобто:

$$\left\{ \begin{aligned} B_x &= f(H_x, H_y, H_z); \\ B_y &= f(H_x, H_y, H_z); \\ B_z &= f(H_x, H_y, H_z) \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Спочатку розглянемо плоско-паралельне магнітне поле ($B_z = H_z = 0$). Маючи залежність $\mu(H)$ для різних значень складової напруженості H_y , за допомогою (9) побудуємо сімейство характеристик $B_x(H_x)$. На рис. 3 наведені частини двох таких кривих $B_x = f(H_x, H_{ym})$ та $B_x = f(H_x, H_{yn})$.

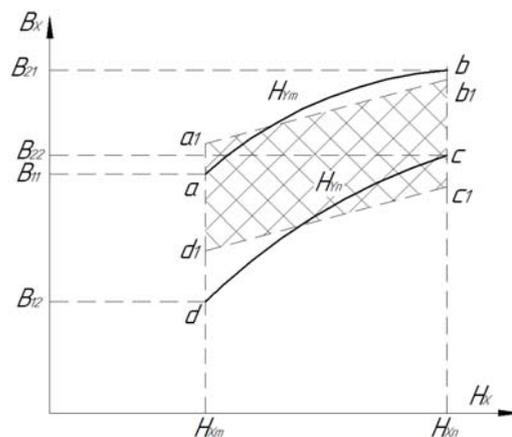


Рисунок 3. Щодо визначення апроксимуючих коефіцієнтів залежності

$$\begin{cases} \Phi_x = \Lambda_x u_{mx} + \Lambda_{xy} u'_{my} + J_x = \Lambda_x u_{mx} + \\ + \frac{1}{4} \Lambda_{xy} (u_{my1} + u_{my2} + u_{my3} + u_{my4}) + J_x; \\ \Lambda_x = \mu_{11} \frac{l_y l_z}{l_x}; \Lambda_{xy} = \mu_{11} l_z; J_x = B_{0x} l_y l_z. \end{cases} \quad (17)$$

При розгляді 2D електромагнітного поля, будують сімейство кривих $B_x(H_x)$ при різних значеннях H_y та H_z . На рис. 5 для одного із інтервалів $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$ наведені чотири залежності $B_x = f(H_x, H_{ym}, H_{zm})$, $B_x = f(H_x, H_{yn}, H_{zm})$, $B_x = f(H_x, H_{ym}, H_{zn})$, $B_x = f(H_x, H_{yn}, H_{zn})$. В межах $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$, $H_{ym} \leq H_y \leq H_{yn}$ та $H_{zm} \leq H_z \leq H_{zn}$, використовуючи кусочно-лінійну апроксимацію, маємо:

$$B_x = \mu_{11} H_x + \mu_{12} H_y + \mu_{13} H_z + B_{0x}. \quad (18)$$

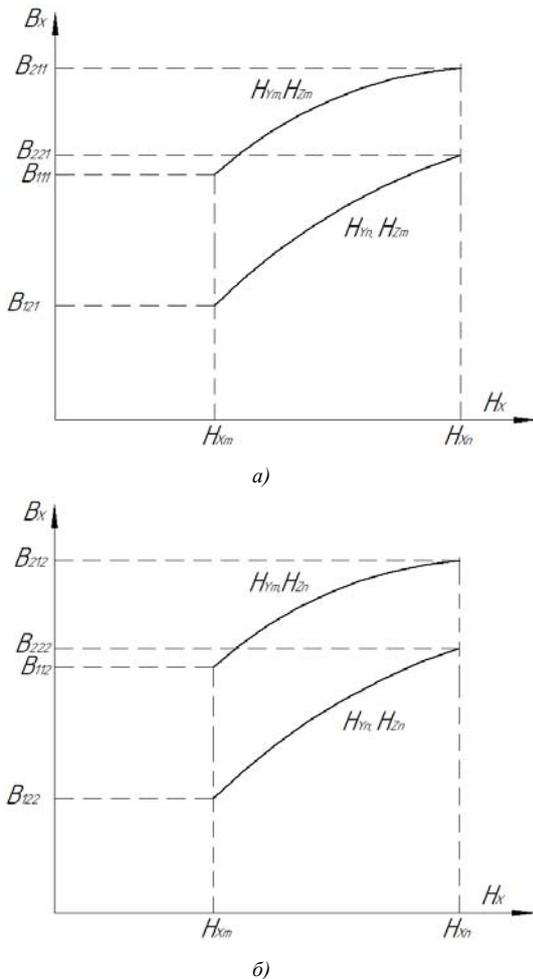


Рисунок 5. Щодо визначення апроксимуючих коефіцієнтів залежності $B_x = f(H_x, H_y, H_z)$

За аналогією (12) коефіцієнти $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, B_{0x}$ можна знайти за наступними співвідношеннями:

$$\mu_{11} = \frac{1}{4(H_{xn} - H_{xm})} \cdot ((B_{211} - B_{111}) + (B_{221} - B_{121}) + \dots; \dots(B_{212} - B_{112}) + (B_{222} - B_{122})); \quad (19)$$

$$\mu_{12} = \frac{1}{4(H_{ym} - H_{yn})} \cdot ((B_{111} - B_{121}) + (B_{211} - B_{221}) + \dots; \dots + (B_{112} - B_{122}) + (B_{212} - B_{222})); \quad (20)$$

$$\mu_{13} = \frac{1}{4(H_{zm} - H_{zn})} \cdot ((B_{111} - B_{112}) + (B_{211} - B_{212}) + \dots; \dots + (B_{121} - B_{122}) + (B_{221} - B_{222})); \quad (21)$$

$$B_{0x} = \frac{1}{8} [(B_{111} - \mu_{11} H_{xm} - \mu_{12} H_{ym} - \mu_{13} H_{zm}) + \dots; \dots + (B_{211} - \mu_{11} H_{xn} - \mu_{12} H_{ym} - \mu_{13} H_{zm}) + \dots; \dots + (B_{222} - \mu_{11} H_{xn} - \mu_{12} H_{yn} - \mu_{13} H_{zn})] \quad (22)$$

Магнітний потік та напругу схеми заміщення магнітного кола, за аналогією (17) можна представити у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi_x = \Lambda_x u_{mx} + \frac{1}{4} \Lambda_{xy} (u_{my1} + u_{my2} + u_{my3} + u_{my4}) + \dots \\ \dots + \frac{1}{4} \Lambda_{xz} (u_{mz1} + u_{mz2} + u_{mz3} + u_{mz4}) + J_x \end{aligned} \quad (23)$$

Зв'язок між магнітними потоками та магнітними напругами між всіма елементами схеми заміщення магнітного кола загальної розрахункової зони осердя статора та ротора ЕМП, які можна представити елементарними одиницями (для 3D польового моделювання елементарними об'ємами; для 2D польового моделювання – елементарними площинами), слід виразити у вигляді нелінійної системи рівняння у матричній формі:

$$[\Phi] = [A][U_m] + [J], \quad (24)$$

де елементи матриць $[A]$ та $[J]$ будуть визначатися значеннями магнітних напруг $[U_m]$.

При використанні системи рівнянь (24) елементи матриць $[A]$ та $[J]$ повинні бути визначенні завчасно для усіх можливих інтервалів складових напруженості магнітного поля $(0, H_{x1}, H_{x2}, \dots)$, $(0, H_{y1}, H_{y2}, \dots)$, $(0, H_{z1}, H_{z2}, \dots)$.

Таким чином, кінцево-різницева апроксимація рівнянь електромагнітного поля (1) та (2) дозволяє представити розрахункову область активної частини ЕМП схемою заміщення у вигляді взаємопов'язаних

магнітних та електричних кіл та створити математичну модель, що поєднує зв'язок між магнітними потоками і напругами, а також електричними струмами та напругами для усіх елементів, що входять до схеми заміщення. Застосування цієї математичної моделі дозволяє не тільки оптимізувати геометричні розміри пазових та зубцевих зон осердя статора та ротора ЕМП, а також розбити на елементарні площини (для 2D коло-польової моделі) розрахункову геометричну область осердя статора та ротора ЕМП, що дозволить для кожної елементарної області (ділянки) замінити нелінійну залежність $\mu = B(H)$ на лінійну, виду $B = \mu_0 \mu_r H$ ($\mu_r = const$), застосовуючи кусочно-лінійну апроксимацію кривої намагнічування в заданих межах $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$, $H_{ym} \leq H_y \leq H_{yn}$, $H_{zm} \leq H_z \leq H_{zn}$.

На основі даних результатів польового моделювання дослідного зразка асинхронно-синхронного електромеханічного перетворювача, відповідно до [16] та [17], при дробленні розрахункової області осердя ротора на 42 ділянки, та ротора – на 34 ділянки з визначенням для кожної з них межі зміни $H_{xm,y} \leq H_{x,y} \leq H_{xn,yn}$ та зміни нелінійної магнітної властивості сталі та лінійну, нев'язка за змінним струмом статора в режимі НХ, у порівнянні з результатами моделювання при врахуванні загальної кривої намагнічування за всією розрахунковою областю, для фази А не перевищує $\delta I_A|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,52\%$, для фази В – $\delta I_B|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,654\%$ та для фази С – $\delta I_C|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,495\%$.

Таким чином запропонована методика лінеаризації магнітних властивостей на окремих елементарних ділянках активної частини осердя статора та ротора ЕМП з застосуванням метода кусочно-лінійної апроксимації кривої намагнічування дозволяє значно скоротити кількість нелінійних рівнянь та значно зменшити час чисельної реалізації 2D коло-польової моделі ЕМП при збереженні точності чисельних розрахунків.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

V. ВИСНОВКИ

1. Вдосконалено математичні моделі щодо лінеаризації кривої намагнічування для електротехнічної сталі осердя статора та ротора просторових 3D та плоско-паралельних 2D геометричних моделей активної частини електромеханічних перетворювачів змінного струму, які засновані на метода кусочно-лінійної апроксимації кривої намагнічування.

2. На основі запропонованих математичних мо-

делей щодо лінеаризації магнітних властивостей сталі осердя статора та ротора електромеханічних перетворювачів змінного струму реалізовано підхід, щодо дроблення 2D загальної геометричної моделі осердя статора та ротора ЕМП на n-ну кількість елементарних площин осердя статора та ротора та застосуванням лінійної функції $B = \mu_0 \mu_r (H)$ $\mu_r = const$. в заданих межах: $H_{xm} \leq H_x \leq H_{xn}$, $H_{ym} \leq H_y \leq H_{yn}$, $H_{zm} \leq H_z \leq H_{zn}$.

3. На основі даних результатів 2D польового моделювання дослідного зразка електромеханічного перетворювача за [16] та [17] при дробленні розрахункової області осердя якоря на 42 ділянки, та ротора – на 34 ділянки з визначенням для кожної з них межі зміни $H_{xm,y} \leq H_{x,y} \leq H_{xn,yn}$, та зміни нелінійної залежності кривої намагнічування сталі на лінійну, нев'язка за змінним струмом в режимі НХ, у порівнянні з результатами моделювання при врахуванні загальної кривої намагнічування за всією розрахунковою областю, нев'язка за струмом якоря для фази А не перевищує: $\delta I_A|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,52\%$; для фази В – $\delta I_B|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,654\%$; та для фази С – $\delta I_C|_{\mu=var/\mu=const} \leq 2,495\%$. Це дозволило також знизити в 4,89 разів час чисельних розрахунків для 2D нестационарної постановки задачі при застосуванні спеціального програмного забезпечення Comsol Multiphysics.

4. Запропоновану методику можна використовувати для всіх різновидів ЕМП.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Silvester P. P., Finite Elements for Electrical Engineers / P. P. Silvester, R. L. Ferrari // 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press. – 1996, – 400 p.
- [2] Kurbatov, P. A., Chislennyy raschet elektromagnitnykh poley [Numerical calculation of electromagnetic fields] / P. A. Kurbatov, S. A. Arinchin // Energoatomizdat, - 1984, - 168 p.
- [3] Brauer J. R. Simple equations for the magnetization curve of main types of magnetic steel / J. R. Brauer // IEEE Transactions on Magnetics. – 1975., - Vol. 11, - No. 1, - pp. 81.
- [4] Zhu J. G., Ramsden V. S. Improved formulations for the curve fitting of magnetic properties. IEEE Transactions on Magnetics. 1993. Vol. 29, No. 6. P. 2458–2460.
- [5] Bichicchi S., Chiorboli G., Reggiani U., Snell S. A modified Frohlich-Kennelly model for the magnetization curve. IEEE Transactions on Magnetics. 1998. Vol. 34, No. 4. pp. 1111–1114.
- [6] Nakhodkin M. Analytical approximation of the mag-

- netization curves of electrical steels / M. Nakhodkin, V. Gurevich // *Electrical Engineering*, - 2012., - Vol. 94. - pp. 125–131.
- [7] Trutt, F. C. Representation of the magnetization characteristic of DC machines for computer use / F. C. Trutt, E. A. Erdelyi, R. E. Hopkins // *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, - 1968, - no. 3. – pp. 665–669.
- [8] Widger, A. J. Representation of magnetization curves over a wide range of flux density / A. J. Widger // *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. – 1969. – Vol.116. – no.1. – pp.156–160.
- [9] O'Kelly D. Convex and concave approximations for magnetization curves / D. O'Kelly // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 1973, - Vol. 9, - no. 4., - pp. 636–638.
- [10]Humbert C. Approximation of magnetization curves using rational functions / C. Humbert, D. Maquin, J. Ragot // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. - 1995. - Vol. 150. - pp. 235–244.
- [11]El-Sherbiny M. K. Representation of the magnetization curve by exponential series / M. K. El-Sherbiny // *IEEE Transactions on Magnetics*, - 1973. - Vol. 9, - no. 1. - pp. 60–61.
- [12]Reichert, K. The calculation of magnetic circuits with the help of the finite element method / K. Reichert // *IEEE Transactions on Magnetics*, - 1970. -Vol. 6. – no.2, - pp.283–288.
- [13]Zhu J. G. Improved formulations for the curve fitting of magnetic properties / J. G. Zhu, V. S. Ramsden // *IEEE Transactions on Magnetics*, - 1993. - Vol. 29, - no. 6. - pp. 2458–2460.
- [14]Keyhani A. Induction machine parameters identification from operating data / A. Keyhani, T. Tsai // *IEEE Transactions on Energy Conversion*. – 1994, - Vol. 9, - no. 3. - pp. 590–598.
- [15]Yee, K. S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [Text] / K. S. Yee // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* – 1966. – Vol. 14. – P. 302–307.
- [16]Kotsur M.I. Study of electromagnetic and mechanical processes of an induction-synchronous electromechanical converter in idle mode / M.I. Kotsur // *Tekhnichna Elektrodynamika*. – 2024. – № 2. - pp. 62-71. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2024.02.062>.
- [17]Kotsur M. Regulation Characteristics and Stability Criteria of Induction-Synchronous Electromechanical Converters in the Motor Operating Mode [Electronic Resource] / M. Kotsur, I. Kotsur, Yu. Bezverkhnia // 2025 IEEE 6rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), October 06-10, Kharkiv, Ukraine, 2025, pp. 1-6. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61436.2025.11288625>

Надійшла (Received) 26.12.2025;

Прийнята (Accepted) 18.02.2026;

Опублікована (Published) 30.03.2026;

IMPROVING APPROACHES TO THE LINEARIZATION OF MAGNETIC PROPERTIES OF ELECTROMECHANICAL CONVERTER CORES FOR NUMERICAL CALCULATIONS

KOTSUR M.I.

Ph.D, Associate professor, Associate professor of the Electrical and Electronic Apparatuses department of the National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0072-5437>, e-mail: kotsur_m@ukr.net;

DANYLCHENKO D.O.

Ph.D, Associate professor, Professor of the Electrical Power Transmission department of the National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kharkiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7912-1849>, e-mail: dmytro.danylchenko@khp.edu.ua;

SYNETSKYI A.V.

postgraduate student of the National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1859-4171>; e-mail: xibi-tur@ukr.net;

Purpose. Improving the mathematical model for the linearization of magnetic properties of stator and rotor electrical steel based on the piecewise linear approximation of the magnetization curve, which will significantly reduce the number of nonlinear equations and substantially decrease the computational time for 2D and 3D circuit-field models of an asynchronous electromechanical converter while maintaining the accuracy of numerical calculations.

Methodology. Analytical methods for electromagnetic field calculation, the finite element method, analytical methods for electrical and magnetic circuit calculation, and piecewise linear approximation methods are utilized.

Findings. Mathematical models for linearizing the magnetization curve of stator and rotor electrical steel has been improved for both spatial 3D and plane-parallel 2D geometric models of the active part of AC electromechanical

converters. An approach has been implemented to partition the general 2D geometric model of the stator and rotor core into n -elementary planes, applying a linear magnetization curve function at $\mu_r = \text{const}$. Based on the 2D field modeling results of an electromechanical converters prototype in idle mode, compared to modeling results considering the full magnetization curve across the entire computational domain, the armature current residual does not exceed 2.654%. This allowed for a 4.89-fold reduction in the numerical calculation time for the 2D transient problem formulation using Comsol Multiphysics software.

Originality. The method for linearizing the magnetic properties of stator and rotor electrical steel in electromechanical converters has been improved, allowing for the application of a constant relative permeability value ($\mu_r = \text{const}$.) to specific areas of the stator and rotor core computational domain while maintaining a sufficient level of numerical calculation accuracy.

Practical value. The proposed methodology for the linearization of the magnetization curve of stator and rotor electrical steel for spatial 3D and plane-parallel 2D geometric models of the active part of AC electromechanical converters can be applied to various types of electrical machines.

Keywords: piecewise linear approximation, magnetization curve, numerical calculations, core, electrical machine.

REFERENCES

- [1] Silvester P. P., Ferrari R. L., (1996). Finite Elements for Electrical Engineers. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 400.
- [2] Kurbatov, P. A., Arinichin, S. A. (1984). Chislennyy raschet elektromagnitnykh poley [Numerical calculation of electromagnetic fields]. Energoatomizdat, 168.
- [3] Brauer J. R. (1975). Simple equations for the magnetization curve of main types of magnetic steel. IEEE Transactions on Magnetics, 11(1), 81.
- [4] Zhu J. G., Ramsden V. S. (1993). Improved formulations for the curve fitting of magnetic properties. IEEE Transactions on Magnetics, 29(6), 2458–2460.
- [5] Bichicchi S., Chiorboli G., Reggiani U., Snell S. (1998). A modified Frohlich-Kennelly model for the magnetization curve. IEEE Transactions on Magnetics, 34(4), 1111–1114.
- [6] Nakhodkin M., Gurevich V. (2012). Analytical approximation of the magnetization curves of electrical steels. Electrical Engineering, 94, 125–131.
- [7] Trutt, F. C., Erdelyi, E. A., & Hopkins, R. E. (1968). Representation of the magnetization characteristic of DC machines for computer use. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, (3), 665–669.
- [8] Widger, A. J. (1969). Representation of magnetization curves over a wide range of flux density. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 116(1), 156–160.
- [9] O'Kelly D. (1973). Convex and concave approximations for magnetization curves. IEEE Transactions on Magnetics, 9(4), 636–638.
- [10] Humbert C., Maquin D., Ragot J. (1995). Approximation of magnetization curves using rational functions. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 150, 235–244.
- [11] El-Sherbiny M. K. (1973). Representation of the magnetization curve by exponential series. IEEE Transactions on Magnetics, 9(1), 60–61.
- [12] Reichert, K. (1970). The calculation of magnetic circuits with the help of the finite element method. IEEE Transactions on Magnetics, 6(2), 283–288.
- [13] Zhu J. G., Ramsden V. S. (1993). Improved formulations for the curve fitting of magnetic properties. IEEE Transactions on Magnetics, 29(6), 2458–2460.
- [14] Keyhani A., Tsai T. (1994). Induction machine parameters identification from operating data. IEEE Transactions on Energy Conversion, 9(3), 590–598.
- [15] Yee, K. S. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans. Antennas Propagat, 14, 302–307.
- [16] Kotsur M.I. (2024). Study of electromagnetic and mechanical processes of an induction-synchronous electromechanical converter in idle mode. Tekhnichna Elektrodynamika, (2), 62-71. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2024.02.062>.
- [17] Kotsur M. (2025). Regulation Characteristics and Stability Criteria of Induction-Synchronous Electromechanical Converters in the Motor Operating Mode. 2025 IEEE 6rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), October 06-10, Kharkiv, Ukraine, 1-6. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61436.2025.11288625>.

УДК 621.31

ОСОБЛИВОСТІ СИНТЕЗУ РЕДУКОВАНИХ ПРИСТРОЇВ СПОСТЕРЕЖЕННЯ СТАНУ ДЛЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДІВ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З МОДАЛЬНИМ КЕРУВАННЯМ

- САДОВИЙ О.С. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Миколаївського національного аграрного університету, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0424-6086>, e-mail: sadovuyos@mnau.edu.ua;
- СТАВИНСЬКИЙ А.А. д-р техн. наук, професор, професор кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Миколаївського національного аграрного університету, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7573-9238>, e-mail: andrey.stavynskiy@mnau.edu.ua;
- РУДЕНКО А.Ю. асистент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Миколаївського національного аграрного університету, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5103-6412>, e-mail: rudenkoau@mnau.edu.ua;
- СТАВИНСЬКИЙ Р.А. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри суднових електроенергетичних систем Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0640-5717>, e-mail: strostand7@gmail.com;
- ГУРОВ А.П. канд. техн. наук, професор, професор кафедри автоматики Національний університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6425-3325>, e-mail: anatoliy.gurov1945@gmail.com;
- ВАСИЛЬЄВ О.Г. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-8399-0865>, e-mail: grigorich041949@gmail.com;

Мета роботи Розробка та обґрунтування методики синтезу редукованих пристроїв спостереження стану для електроприводів постійного струму з модальним керуванням, а також аналіз їх впливу на динамічні властивості, стійкість і показники якості перехідних процесів електромеханічних систем.

Методи дослідження. У роботі використано методи теорії автоматичного керування та теорії простору станів, зокрема методи модального синтезу та розміщення полюсів. Для побудови редукованого пристрою спостереження застосовано аналітичні методи лінійної алгебри та матричного аналізу. Дослідження динамічних властивостей електромеханічної системи виконано з використанням методів математичного моделювання та імітаційного експерименту в програмному середовищі MATLAB. Оцінювання якості перехідних процесів здійснювалося на основі аналізу часових характеристик та показників стійкості системи керування.

Отримані результати. Розроблено математичні моделі повного та редукованого пристроїв спостереження стану в просторі станів і запропоновано алгоритм синтезу редукованого спостерігача, який забезпечує відновлення лише невимірюваних змінних стану електроприводу. Показано, що вибір швидкодії редукованого пристрою спостереження, яка перевищує швидкодію об'єкта керування, гарантує збіжність оцінок і коректну роботу системи модального керування. На прикладі електроприводів другого та четвертого порядків доведено можливість відновлення інтегральної складової ПІ-регулятора та моменту навантаження без використання додаткових датчиків. Результати моделювання засвідчили, що в системах низького порядку застосування редукованого спостерігача може призводити до незначного зростання перерегулювання і тривалості перехідних процесів, тоді як у системах вищого порядку його вплив на динамічні показники є мінімальним.

Наукова новизна. У роботі вперше обґрунтовано застосування типових нормованих рівнянь модульного оптимуму для синтезу редукованих пристроїв спостереження в системах електроприводів постійного струму з модальним керуванням, а також встановлено залежність впливу редукованого спостерігача на динаміку системи від її порядку.

Практична цінність. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні систем керування електроприводами з обмеженими сенсорними можливостями, дозволяючи зменшити структурну та апаратну складність системи, підвищити її надійність і спростити практичну реалізацію без істотного погіршення показників якості керування.

Ключові слова: *електропривод постійного струму, модальне керування, пристрій спостереження стану, редукований спостерігач, простір стані, розміщення полюсів, перехідні процеси, стійкість системи, нелінійність, синтез.*

I. ВСТУП

Сучасні електроприводи постійного струму з модальним керуванням широко застосовуються в автоматизованих технологічних процесах, де до систем керування висуваються підвищені вимоги щодо швидкодії, точності та стійкості в умовах змінних навантажень і параметричної невизначеності об'єкта керування. Реалізація модального керування, як правило, передбачає використання повного вектора стану, що на практиці ускладнюється обмеженою кількістю доступних для вимірювання змінних, наявністю зовнішніх збурень та технічними обмеженнями елементної бази.

Застосування повних пристроїв спостереження стану призводить до зростання порядку системи керування, збільшення обчислювальної складності та зниження її надійності, особливо у випадку електромеханічних систем середнього та високого порядків. У зв'язку з цим актуальною є задача зменшення порядку спостерігача без погіршення показників якості перехідних процесів і стійкості системи модального керування.

Таким чином, актуальною науково-прикладною задачею є розроблення та дослідження редукованих пристроїв спостереження стану для електроприводів постійного струму з модальним керуванням, які забезпечують відновлення лише невимірюваних змінних стану, зменшення структурної складності системи керування та збереження заданих динамічних характеристик в умовах дії навантажувальних збурень і відхилення параметрів об'єкта керування від номінальних значень.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Питання оцінювання стану динамічних систем та побудови спостерігачів стану є активною та розвинутою темою сучасної теорії керування. У класичному підході спостерігачі надходять із теорії Люенбергера - динамічні системи, що забезпечують оцінювання невимірюваних змінних за доступними вихідними сигналами та входами об'єкта керування [1]. Останніми роками важлива увага приділяється редукованим спостерігачам, які мають нижчий порядок, ніж повна модель об'єкта, що забезпечує спрощення реалізації та покращену робастність у деяких застосуваннях [2].

У фундаментальній літературі наведено методичні засади побудови редукованих спостерігачів, де їх порядок зменшується на число вимірюваних виходів, що дає змогу оцінювати лише ті компоненти стану, які не відновлюються напряму з виходів [2]. Такий підхід дозволяє зберігати властивість спостережувальності та забезпечувати збіжність оцінювання, при цьому зменшивши вимоги до обчислювальних ресурсів.

Окрім того, у системах, де наявні невідомі вхідні збурення чи частково невимірювані впливи, були запропоновані методи розробки редукованих спостерігачів для так званих дескрипторних систем (descriptor systems) з невідомими входами на основі узагальненої сільвестрової форми та обмежень на структуру матриць системи [3].

Хоча значна частина літератури зосереджена на загальних теоретичних аспектах, існують і прикладні дослідження, що застосовують спостерігачі до електроприводів. Так, у галузі бездатчикового управління електроприводами постійного струму розроблено системи непрямого регулювання швидкості, де спостерігачі стану використовуються для оцінки невимірюваних змінних механічної частини приводів [4]. Це завдання є особливо актуальним для приводів із обмеженою кількістю датчиків або у середовищах, де встановлення сенсорів є складним чи недоцільним [5].

У [6] роботах розглядаються методи спостереження та ідентифікації стану для електроприводів постійного струму з регулюванням швидкості, включаючи оцінювання невимірюваних збурень, ідентифікацію параметрів двигунів, а також моделювання їх поведінки у замкнених системах управління.

Сучасні публікації також показують, що редуковані спостерігачі активно використовують в поєднанні зі складнішими алгоритмами керування, наприклад, у контексті позиційного контролю серводвигунів із гнучкими елементами передачі, де використовується розширений редукований спостерігач для оцінки невимірюваних механічних станів [7].

Одже спостерігачі стану є не лише об'єктом теоретичного аналізу, але й практичної реалізації в електромеханічних системах, зокрема у високоточних приводах із обмеженими сенсорними можливостями. Це підтверджує актуальність обраної теми дослідження і є базою для подальшого наукового внеску автора.

III. МЕТА РОБОТИ

Метою роботи є розробка та обґрунтування методики синтезу редукованих пристроїв спостереження стану для електроприводів постійного струму з модальним керуванням, а також аналіз їх впливу на динамічні властивості, стійкість і показники якості перехідних процесів електромеханічних систем.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГУ МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Загальний підхід до побудови систем керування зі спостерігачами стану. Пристрій спостереження оцінює змінні стану об'єкта на основі його математичної моделі та вимірюваних вихідних координат із використанням зворотного зв'язку.

Рівняння в матричній формі для спостерігача в сукупності з об'єктом керування у випадку одного входу та одного виходу матимуть систему [8] (рис. 1):

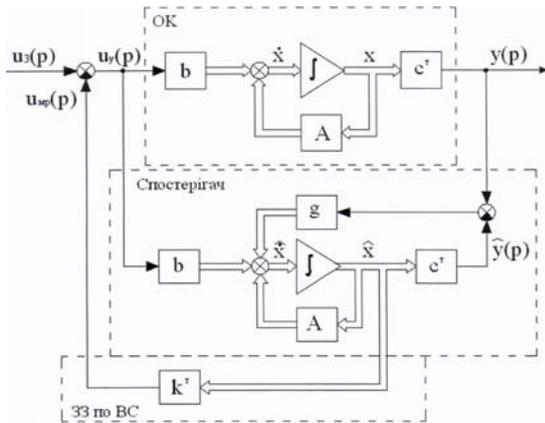


Рисунок 1. Векторно-матрична схема електроприводу з пристроєм спостереження

Розглянемо векторно-матричне подання об'єкта керування та пристрою спостереження:

– пристрій спостереження (ПС):

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu_y(t) + g(y(t) - c^T\hat{x}(t)), \quad (1)$$

– об'єкт керування (ПС):

$$\dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + bu_y(t); \quad y(t) = c^T x(t), \quad (2)$$

– закон керування по вектору стану:

$$u_y(t) = u_3(t) - k^T \hat{x}(t), \quad (3)$$

де рівняння (1) описує пристрій спостереження, (2) - об'єкт керування, а (3) - закон керування за вектором стану.

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{bmatrix}; \quad c^T = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n], \quad k^T = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \quad (4)$$

де g - вектор регулятора пристрою спостереження; c^T - вектор-строка виходів, доступних виміру; k^T - вектор-строка коефіцієнтів модального регулятора:

Таким чином, спостерігач є замкненою динамічною системою, в якій зворотні зв'язки (33) з матрицею g реалізують зворотний зв'язок за вектором стану самого спостерігача. Синтез спостерігача полягає у визначенні такого вектора g , який забезпечує заданий розподіл коренів характеристичного полінома з урахуванням вимог стійкості та необхідної швидкодії процесу оцінювання змінних стану. Аналогічно процедурі синтезу модального регулятора методом розміщення полюсів, вектор g визначається з умови від-

повідності характеристичного полінома пристрою спостереження вибраному типу нормованому рівнянню відповідного порядку.

Перейшовши до операторної області, рівняння пристрою спостереження набуває вигляду:

$$p\hat{x}(p) = (A - gc^T)\hat{x}(p) + bu_y(p) + gy(p), \quad (5)$$

де

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \dots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Характеристична матриця пристрою спостереження та відповідний характеристичний поліном визначаються як:

$$D = pI - A + gc^T, \quad (6)$$

$$D(p) = \det(pI - A + gc^T)$$

Вектор g визначається шляхом прирівнювання характеристичного полінома пристрою спостереження до типового нормованого рівняння відповідного порядку, що завершує процедуру синтезу спостерігача стану.

Пристрій спостереження, що відновлює повний вектор стану об'єкта керування, у загальному випадку має ранг, рівний рангу об'єкта, та характеризується підвищеною структурною складністю. За наявності датчиків для частини змінних стану доцільним є зменшення порядку спостерігача шляхом оцінювання лише тих змінних, які є недоступними для безпосереднього вимірювання, тоді як вимірювані змінні формуються за допомогою фізичних датчиків. У такому випадку об'єктом спостереження є не весь об'єкт керування, а його частина, а відповідний спостерігач визначається як редукований пристрій спостереження (РПС). Застосування РПС дозволяє знизити обчислювальну складність системи керування та спростити її практичну реалізацію за умови забезпечення необхідної стійкості й швидкодії процесу оцінювання змінних стану.

У практичних електромеханічних системах до складнодоступних для безпосереднього вимірювання належать не лише окремі змінні стану, а й зовнішні збурювальні дії на об'єкт спостереження, зокрема моменти навантаження, які можуть бути необхідними для реалізації гнучких зворотних зв'язків за похідними змінних стану (наприклад, за швидкістю) [9], [10]. Вектор доступних вимірюванню вихідних змінних можна виразити через всі змінні стану x ; у формі $v(t) = c^T x(t)$, де c^T - складений блочний вектор. Повний вектор стану $x(t)$ рангу n при побудові РПС представляється блочним вектором r елементами в блоці $v(t)$ та з $(n - r)$ елементами в блоці $w(t)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

В матрично-блочному вигляді матимемо:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot u_y(t), \quad (8)$$

$$v(t) = c^T \cdot x(t)$$

Розв'язуючи рівняння (8) відносно $v(t)$ та $w(t)$, отримаємо два векторно-матричні вирази:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= A_{11}v(t) + A_{12}w(t) + b_1u_y(t) \\ \dot{w}(t) &= A_{21}v(t) + A_{22}w(t) + b_2u_y(t) \end{aligned}, \quad (9)$$

де $A_2w(t) = \dot{v}(t) - A_{11}v(t) - b_1u_y(t)$ - змінна, що вимірюється, а $b_2u_y(t) + A_{21}v(t)$ - вхідний вплив об'єкту керування.

Тоді у відповідності з рівнянням для ПС (1) отримуємо рівняння для РПС:

$$\dot{\hat{w}}(t) = A_{22}\hat{w}(t) + (b_2u_y(t) + A_{21}v(t)) + L(A_2w(t) - A_{22}\hat{w}(t)), \quad (10)$$

де $L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$ - невідома матриця.

Підставляючи в (10) вираз для $A_2w(t)$ та вводячи нову змінну $z(t) = \hat{w}(t) - Lw(t)$, отримаємо результуюче рівняння РПС:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A_{22} - LA_{22})\hat{w}(t) + (A_{21} - LA_{21})v(t) + (b_2 - Lb_1)u_y(t) \\ \hat{w}(t) &= z(t) + Lw(t) \end{aligned}, \quad (11)$$

де $(A_{22} - LA_{22})$ - матриця змінних недоступних для вимірювання; $(A_{21} - LA_{21})$ - матриця змінних доступних для вимірювання; $(b_2 - Lb_1)$ - матриця керованого входу.

Відповідно до рівняння (11) визначаються характеристична матриця та характеристичний поліном редукованого пристрою спостереження для заданої системи:

$$\begin{aligned} D &= pI - (A_{22} - LA_{22}), \\ D(p) &= \det D \end{aligned}, \quad (12)$$

Отримана математична модель редукованого пристрою спостереження визначає структуру формування оцінок невимірюваних змінних стану та їх використання у законі модального керування. Взаємозв'язок між об'єктом керування, редукованим пристроєм спостереження та модальним регулятором (МР) у складі замкненої системи керування відображено на рис. 2.

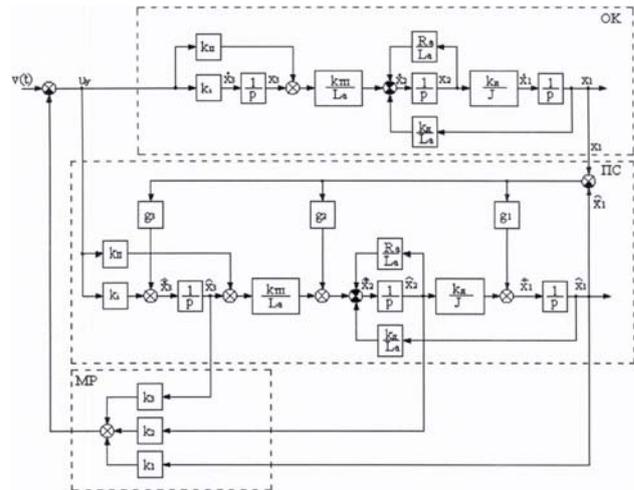


Рисунок 2. Структурна схема організації модального керування за допомогою пристрою спостереження ПС і модального регулятора МР

Синтез редукованого пристрою спостереження в електромеханічній системі. Розглянуто синтез редукованого пристрою спостереження на прикладі електроприводу постійного струму з динамічною ланкою у контурі керування, реалізованою у вигляді ПІ-регулятора. Як дослідний зразок розглянуто двигун типу ПБСТ-32 з номінальною потужністю $P_n = 3,0$ кВт, номінальною напругою якоря $U_n = 220$ В, номінальним струмом якоря $I_n = 16$ А та номінальною швидкістю обертання $n_n = 1500$ об/хв, що відповідає номінальному моменту $M_n = 19,1$ Н·м. Параметри електричної та механічної частин двигуна становлять: активний опір якоря $R_a = 1,6$ Ом, індуктивність якоря $L_a = 18$ мГн, момент інерції ротора $J = 0,045$ кг·м², електромеханічна стала часу $T_m = 0,38$ с.

У даній електромеханічній системі вимірюваними змінними стану є швидкість електродвигуна $v_1 = k_{\Gamma\Gamma}\omega = u_{\Gamma\Gamma}$, струм якорного ланцюга $v_2 = i_a$. Змінні, які не доступні вимірюванню: інтегральна складова напруги регулятора $w_2 = u_2$; момент навантаження $w_2 = M_C \approx const$.

Початкові рівняння об'єкту керування з урахуванням необхідності оцінки M_C :

$$\begin{aligned} Jp\omega &= k_{\Gamma}i_a - M_C \\ (T_E p + 1)i_a R_a &= u_a - k_{\Gamma}\omega \\ u_a &= \left(k_{\text{PII}} \frac{T_{\text{PC}}}{k_{\text{PC}}} + k_{\text{PII}} \frac{1}{k_{\text{PC}}} \frac{1}{p} \right) k_{\text{PII}} u_y, \\ pM_C &= 0 \end{aligned}, \quad (13)$$

де відповідно позначимо вирази $k_{\text{PII}}(T_{\text{PC}}/k_{\text{PC}})u_y = k_{\text{PI}}u_y$ - пропорційна складова напруги ПІ - регулятора;

$u_2 = k_{PI}(1/pk_{PC})u_y = k_I u_y$ - інтегральна складова напруги ПІ - регулятора.

Перетворюючи початкові рівняння ОК до форми Коши [11] відносно змінних ω , i_a , u_2 , M_C запишемо векторно-матричне рівняння в блочному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{i}_a \\ \dot{\hat{u}}_2 \\ \dot{\hat{M}}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \\ \hat{u}_2 \\ \hat{M}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{11} \\ b_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_y, \quad (14)$$

або

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot u_y, \quad (15)$$

де $a_{12} = k_d/J$, $a_{14} = -1/J$, $a_{21} = -k_d/L_a$, $a_{22} = -R_a/L_a$, $a_{23} = k_{PI}/L_a$, $b_{11} = k_{PI}k_{PI}/L_a$, $b_{12} = k_I$.

Елементи блочної матриці:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & a_{14} \\ a_{23} & 0 \end{bmatrix}; A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{11} \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

На основі виразу (11) та (12) запишемо характеристичну матрицю та характеристичний поліном РПС заданої системи:

$$D = pI - (A_{22} - LA_{12}) = \begin{bmatrix} p + l_{12}a_{23} & l_{11}a_{14} \\ l_{22}a_{23} & p + l_{21}a_{14} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$D(p) = p^2 + (l_{21}a_{14} + l_{12}a_{23})p + l_{12}a_{23}l_{21}a_{14} - l_{11}a_{14}l_{22}a_{23}, \quad (17)$$

Для виконання синтезу регулятора РПС, тобто для визначення коефіцієнтів матриці L , обираємо стандартне рівняння другого порядку модульного оптимуму з бажаним рівнем демпфірування $\sigma_{БАЗ} = 4,5\%$ та швидкодією $t_{П.П.БАЗ} = 2,8/\omega_\sigma$:

$$D_{БАЗ}(p) = p^2 + 2\omega_\sigma p + \omega_\sigma^2 = 0, \quad (18)$$

Для підвищення швидкодії РПС $t_{П.П.БАЗ}$ приймається на порядок менше ніж значення часу перехідного процесу об'єкту спостереження: $t_{П.П.БАЗ} = 0,59$ с. Базова частота відповідно: $\omega_\sigma = \tau_{П.П.} / t_{П.П.БАЗ} = 2,8 / 0,95 = 4,75 \text{ с}^{-1}$.

Прирівнюючи коефіцієнти при рівних степенях оператора p рівнянь (12) та (18), визначаємо параметри регулятора L . Так як коефіцієнтів l_{ij} чотири, а РПС має другий порядок, то можна, враховуючи особливості побудови пристрою спостереження, прийняти значення коефіцієнтів l_{11} та l_{22} малими для мінімізації їх

впливу на загальну динаміку електромеханічної системи. Тоді, використовуючи параметри електроприводу a_{ij} , визначаємо значення останніх коефіцієнтів l :

$$l_{11} = 0,001; l_{22} = 0,001; l_{21} = \frac{22,522}{a_{23}} = 5;$$

$$l_{12} = \frac{22,522}{l_{21}a_{23}a_{14}} = 0,16 \quad (19)$$

Для матриці коефіцієнтів L редукованого пристрою спостереження розміру $(n \times n)$ повинна виконуватись умова: будь-яка строчка, будь-який стовпчик або ж діагональ елементів матриці мають значення, які є відносно малими і ними можна знехтувати у порівнянні з останніми коефіцієнтами, а при моделюванні можуть бути прирівняними до нуля.

З урахуванням складених матриць (11) отримуємо матричне рівняння РПС:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{12}a_{23} & -l_{11}a_{14} \\ -l_{22}a_{23} & -l_{21}a_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{M}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_{12}a_{21} & -l_{11}a_{12} & -l_{12}a_{22} \\ -l_{21}a_{12} & -l_{21}a_{12} & -l_{22}a_{22} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{21} - l_{12}b_{11} \\ -l_{22}b_{11} \end{bmatrix} \cdot u_y, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{M}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix}, \quad (21)$$

Розв'язуючи матричні рівняння відносно змінних \dot{z}_1 , \dot{z}_2 , \hat{u}_2 , \hat{M}_C , отримаємо результуючі розрахункові рівняння синтезованого РПС:

$$\dot{z}_1(t) = -l_{12}a_{23}\hat{u}_2 - l_{11}a_{14}\hat{M}_C - l_{12}a_{21}\omega + (-l_{11}a_{12} - l_{12}a_{22})i_a + (b_{21} - l_{12}b_{11})u_y, \quad (22)$$

$$\hat{u}_2 = z_1(t) + l_{11}\omega + l_{12}i_a,$$

$$\dot{z}_2(t) = -l_{22}a_{23}\hat{u}_2 - l_{21}a_{14}\hat{M}_C - l_{22}a_{21}\omega + (-l_{21}a_{12} - l_{22}a_{22})i_a - l_{22}b_{11}u_y,$$

$$\hat{M}_C = z_2(t) + l_{21}\omega + l_{22}i_a,$$

Відповідно до приведених рівнянь складемо структурну схему РПС (рис. 3).

Моделювання та дослідження динамічних властивостей синтезованого пристрою спостереження, зокрема його перехідних процесів, виконано з використанням програмного середовища Matlab, відповідні результати наведено на рис. 4.

На рис. 4, крива (а) відповідає роботі системи з повним пристроєм спостереження стану, який відновлює повний вектор стану електроприводу, при цьому перерегулювання становить близько 6,4 %, а час встановлення перехідного процесу дорівнює приблизно 5,75 с. Крива (б) відображає перехідний процес у системі з редукованим пристроєм спостереження, що відновлює лише невимірювані змінні стану

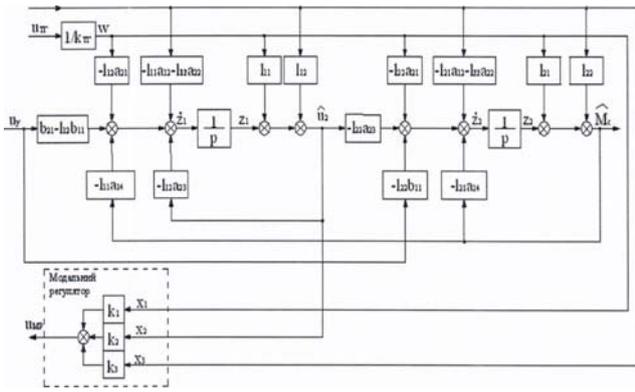
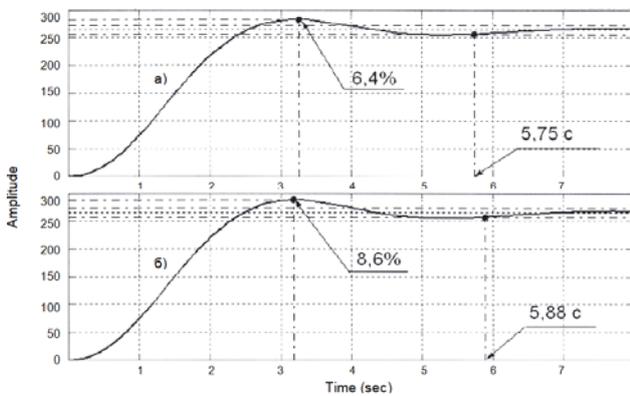


Рисунок 3. Структурна схема редукованого пристрою спостереження



(а) система з повним пристроєм спостереження стану, що відновлює повний вектор стану електроприводу; (б) система з редукованим пристроєм спостереження, який відновлює лише невимірювані змінні стану

Рисунок 4. Перехідні характеристики СКЕП при використанні рівняння другого порядку модульного оптимуму ($\sigma_{\max} = 4,5\%$ та швидкодією $t_{\text{пл,макс}} = 2,8/\omega_{\sigma}$).

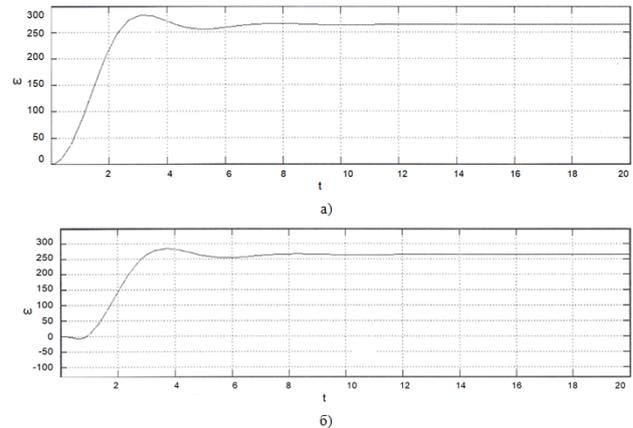
(інтегральну складову ПІ-регулятора та момент навантаження) за наявності безпосереднього вимірювання швидкості ω та струму якоря i_a ; у цьому випадку перерегулювання зростає до 8,6 %, а час встановлення перехідного процесу збільшується до 5,88 с. Порівняльний аналіз отриманих характеристик свідчить, що застосування редукованого пристрою спостереження у системі низького порядку призводить до незначного погіршення показників якості перехідного процесу, однак не впливає на стійкість електромеханічної системи та забезпечує збереження заданих динамічних властивостей модального керування. Також бачимо, що РПС змінює динаміку системи, так як перехідний процес має більше перерегулювання і час тривалості перехідного процесу збільшується.

У випадку відхилення реальних фізичних параметрів системи від ідеалізованих в математичній моделі, результуючі відхилення показників перехідного процесу будуть значними [12]. Тому при побудові РПС треба враховувати усі особливості відхилення параметрів ОК і його системи керування, а також ви-

користовувати прецизійні елементи для реалізації принципової схеми редукованого пристрою спостереження.

Вхідними фізичними змінними для синтезованого редукованого пристрою спостереження являються швидкість валу двигуна ω та струм якорного ланцюга електродвигуна i_a , а інтегральна складова напруги ПІ - регулятора ПС відтворює на основі математичної моделі всієї електромеханічної системи, так як безпосереднє вимірювання даної величини може бути ускладненим через відмінність різновидів форм елементної реалізації регуляторів, наприклад, на основі мікро контролера.

Важливим етапом оцінювання ефективності системи керування електроприводом є дослідження її реакції на зміну навантаження на валу електродвигуна, що є невід’ємною умовою реальної експлуатації. Такий аналіз дозволяє оцінити жорсткість синтезованої електромеханічної системи модального керування, а також перевірити її стійкість. Імітаційне моделювання роботи електромеханічної системи модального керування з використанням пристрою спостереження при зміні збурювальної дії - моменту навантаження на валу електродвигуна - відповідні результати наведено на рис. 5.



крива (а) розгін електроприводу на холостому ході; крива (б) розгін електроприводу за умов номінального навантаження на валу

Рисунок 5. Осцилограми перехідних процесів швидкості обертання вала електродвигуна постійного струму $\omega(t)$ при модальному керуванні

На рис.5 наведено осцилограми перехідних процесів швидкості обертання вала електродвигуна постійного струму $\omega(t)$, отримані в результаті імітаційного моделювання системи модального керування в програмному середовищі MATLAB. Крива (а) відповідає режиму розгону електроприводу на холостому ході, тоді як крива (б) відображає перехідний процес при розгоні електроприводу за умов дії номінального моменту навантаження на валу двигуна.

Аналіз осцилограм показує, що збільшення навантаження призводить до зростання часу встановлення

швидкості та зменшення її усталеного значення, що є закономірним наслідком зниження жорсткості електромеханічних характеристик приводу при навантаженні. Водночас система модального керування зберігає стійкість і забезпечує працездатність електроприводу в обох режимах.

При цьому, зі збільшенням навантаження на валу одночасно збільшується й час виходу ДПС на задану швидкість і, відповідно, час перехідного процесу.

Синтез пристрою спостереження для електромеханічних систем більш високого порядку проілюстровано на прикладі системи керування двигуном постійного струму, що містить два ПІ-регулятори та електропривод із розімкненими від'ємними зворотними зв'язками за швидкістю і струмом (рис. 6).

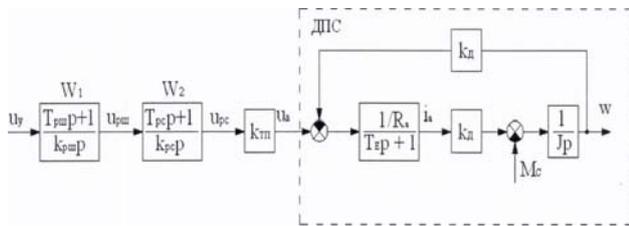


Рисунок 6. Структурна схема електроприводу постійного струму з двома ПІ - регуляторами в ланцюгу керування

Дані регулятори, що послідовно розміщені в системі керування, забезпечують врахування інерційності двигуна, компенсацію його постійних часу та плавний перехідний процес при початковому запуску та реакції системи на будь-які зміни сигналу керування.

За аналогією з раніше розглянутим випадком система рівнянь (14) у векторно-матричній формі може бути подана у вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{i}_a \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_d}{J} & 0 & 0 \\ \frac{k_d}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & \frac{T_{PC} k_{PII}}{L_a k_{PC}} & \frac{k_{PII}}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_{PC}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_{PC} T_{PII} k_{PII}}{L_a k_{PC} k_{PII}} \\ \frac{1}{k_{PII}} \\ \frac{T_{PII}}{k_{PC} k_{PII}} \end{bmatrix} u_y, \quad (23)$$

Як бажаний характеристичний поліном обрано типове нормоване рівняння четвертого порядку, що відповідає модульному оптимуму:

$$D_{БМЖ}(p) = p^4 + 2,82p^3 + 4p^2 + 2,82p + 1; \quad (24)$$

$$\sigma = 6,2\%; \quad \tau_{П.П.} = 7$$

Характеристична матриця редукованого пристрою спостереження та відповідне характеристичне рівняння мають вигляд:

$$D = pI - (A_{22} - LA_{12}) = \begin{bmatrix} p + l_{12}a_{23} & l_{12}a_{24} \\ -a_{43} + l_{22}a_{23} & p + l_{22}a_{24} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$D(p) = p^2 + (l_{22}a_{24} + l_{12}a_{23})p + l_{12}a_{24}a_{43}$$

Так як РПС у даному випадку має другий порядок, обираємо типове нормоване рівняння модульного оптимуму відповідного порядку і за умовою максимальної швидкодії обирається базова частота ω_6 :

$$D_{БМЖ}(p) = p^2 + \sqrt{2}\omega_6 p + \omega_6^2, \quad (26)$$

$$\sigma = 4,5\%; \quad \tau_{П.П.} = 2,8; \quad t_{П.П.БМЖ} = 0,7c$$

$$\omega_6 = \frac{\tau_{П.П.}}{t_{П.П.БМЖ}} = \frac{2,8}{0,7} = 4c^{-1}.$$

Для максимальної швидкодії системи $t_{П.П.БМЖ}$ прийемо на порядок менше, ніж значення часу перехідного процесу об'єкту спостереження. Далі, прирівнюючи коефіцієнти при рівних степенях оператора в рівняннях $D(p)$ та $D_{БМЖ}(p)$, знаходимо параметри регулятора L :

$$l_{11} = l_{21} = 0, \quad l_{12} = \frac{16}{a_{24}a_{43}} = 5,9 \cdot 10^{-5}, \quad (27)$$

$$l_{22} = \frac{5,6a_{24}a_{43} - 16a_{23}}{a_{24}^2a_{43}} = 4,1 \cdot 10^{-4}$$

Запишемо векторно-матричні рівняння РПС з урахуванням знайдених матриць та введених нових змінних стану z :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{12}a_{23} & -l_{12}a_{24} \\ a_{43} - l_{22}a_{23} & -l_{22}a_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -l_{12}a_{21} & -l_{12}a_{22} \\ -l_{22}a_{21} & -l_{22}a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{31} - l_{12}b_{21} \\ b_{41} - l_{22}b_{21} \end{bmatrix} \cdot u_y, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & l_{12} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix},$$

Розв'язуючи матричні рівняння відносно змінних z_1, z_2, u_1, u_2 , отримуємо результуючі розрахункові рівняння синтезованого РПС:

$$\dot{z}_1(t) = -l_{12}a_{23}\hat{u}_1 - l_{12}a_{24}\hat{u}_2 - l_{12}a_{21}\omega -$$

$$- l_{12}a_{22}i_a + (b_{31} - l_{12}b_{21})u_y;$$

$$\hat{u}_1 = z_1(t) + l_{12}i_a; \quad (29)$$

$$\dot{z}_2(t) = (a_{43} - l_{22}a_{23})\hat{u}_1 - l_{22}a_{24}\hat{u}_2 - l_{22}a_{21}\omega -$$

$$- l_{22}a_{22}i_a + (b_{41} - l_{22}b_{21})u_y;$$

$$\hat{u}_2 = z_2(t) + l_{22}i_a$$

На основі рівнянь (29) формуємо редукований пристрій спостереження (рис. 7), що відновлює фізи-

чні змінні стану u_1 та u_2 на основі змінних, що спостерігаються ω та i_a .

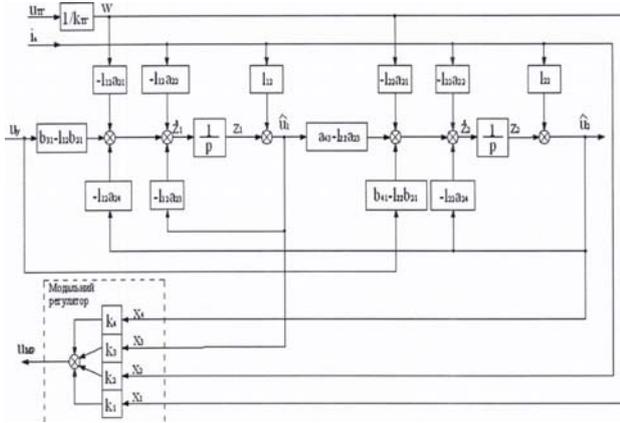
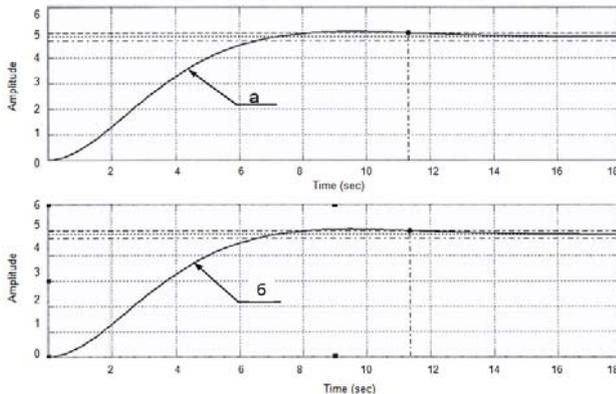


Рисунок 7. Структурна схема РПС електромеханічної системи четвертого порядку

За допомогою математичного програмного середовища Matlab змодельовано роботу електропривода з модальним керуванням (рис. 8) з використанням (крива б) та без використання (крива а) РПС для реалізації зворотних зв'язків (33) по вектору стану i , відповідно, модального керування.



крива (а) перехідний процес при безпосередньому вимірюванні змінних вектора стану; крива (б) перехідний процес при відновленні змінних вектора стану за допомогою РПС

Рисунок 8. Осцилограми перехідних процесів швидкості обертання вала електродвигуна постійного струму у системі модального керування

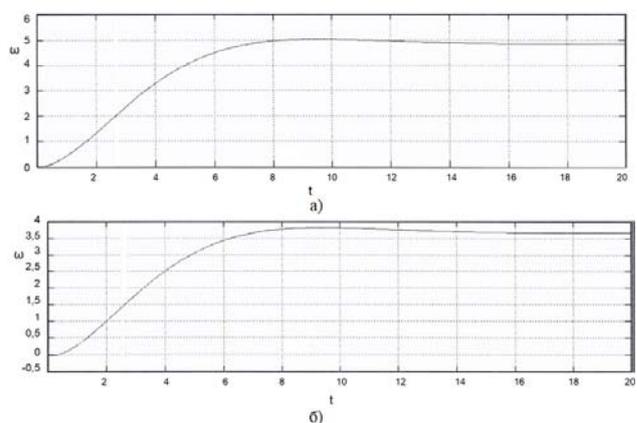
На рис. 8 наведено осцилограми перехідних процесів швидкості обертання вала електродвигуна постійного струму, отримані в результаті імітаційного моделювання системи модального керування в середовищі MATLAB. Крива (а) відповідає режиму керування з використанням безпосередньо вимірних змінних вектора стану, тоді як крива (б) відображає роботу електроприводу при відновленні вектора стану за допомогою редукованого пристрою спостереження. Порівняння осцилограм свідчить, що застосування РПС практично не впливає на динамічні показники

системи: час встановлення швидкості та її усталене значення для обох випадків є близькими, а характер перехідного процесу залишається аперіодичним із незначним перерегулюванням. Це підтверджує коректність відновлення змінних стану та доцільність використання РПС у системах модального керування електроприводами.

Введення в систему додаткових динамічних ланок зменшує швидкодію. Ця проблема вирішується за рахунок попередньо заданої швидкодії та перерахунку типового нормованого рівняння для даного випадку. Також, із алгоритму синтезу пристрою спостереження видно, що спостерігач, який визначає вектор стану об'єкту керування, можна розглядати незалежно від самого об'єкту керування. Це означає, що характеристичний поліном системи складається з добутку характеристичних поліномів ОК та ПС:

$$D(p) = \det(pI - A + bk^T) \det(pI - A + gc^T), \quad (30)$$

Використання фізичних змінних стану електроприводу, до складу яких у даній роботі віднесено швидкість обертання вала електродвигуна ω , струм якорного кола i_a , інтегральну складову вихідної напруги ПІ-регулятора та момент навантаження M_s , для реалізації методу розміщення полюсів значно ускладнює процедуру визначення параметрів модального регулятора зі зростанням порядку системи. Тобто електромеханічні системи п'ятого і вищого порядків потребують повної автоматизації розрахунку параметрів модального регулятора та пристрою спостереження на ЕОМ. Розглянемо навантажувальну здатність електроприводу четвертого порядку з системою модального керування та з редукованим пристроєм спостереження, що забезпечує (відновлює) повний вектор стану (невідомі змінні) для реалізації модального регулятора (рис. 9).



крива (а) пуск електроприводу на холостому ході; крива (б) пуск електроприводу за умов навантаження на валу двигуна

Рисунок 9. Осцилограми перехідних процесів швидкості обертання вала електродвигуна постійного струму $\omega(t)$ у системі модального керування четвертого порядку

Як видно з графіків перехідних процесів (рис. 9), збільшення навантаження на валу електродвигуна призводить до зростання часу перехідного процесу та зменшення усталеного значення швидкості обертання. Зокрема, при запуску електроприводу на холостому ходу час встановлення перехідного процесу становить приблизно $t_s \approx 5,6$ с, тоді як при номінальному навантаженні він зростає до $t_s \approx 6,3$ с, тобто збільшується приблизно на 12–13 %. Одночасно усталене значення швидкості зменшується приблизно на 4–6 % відносно значення, отриманого в режимі холостого ходу, що зумовлено зростанням моменту навантаження. Це в свою чергу свідчить про те, що з підвищенням порядку електромеханічної системи модального керування зменшується жорсткість електромеханічних характеристик приводу.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

V. ВИСНОВКИ

У роботі розроблено методику синтезу редукованого пристрою спостереження стану для електроприводів постійного струму з модальним керуванням, що ґрунтується на методі розміщення полюсів із використанням типових нормованих рівнянь модульного оптимуму та забезпечує задану швидкодію і стійкість процесу оцінювання невимірюваних змінних стану.

Отримано математичні моделі повного та редукованого пристроїв спостереження в просторі станів, які дають змогу відновлювати лише невимірювані змінні електроприводу та використовувати їх у законі модального керування без збільшення порядку об'єкта керування. Встановлено умову вибору швидкодії редукованого пристрою спостереження, згідно з якою власні значення спостерігача повинні перевищувати швидкодію об'єкта керування, що гарантує збіжність оцінок і коректну роботу замкненої системи модального керування.

Доведено можливість відновлення інтегральної складової ПІ-регулятора та моменту навантаження в електроприводі постійного струму без застосування додаткових датчиків. За результатами імітаційного моделювання встановлено, що в системах низького порядку використання редукованого пристрою спостереження призводить до незначного збільшення перерегулювання та тривалості перехідного процесу, тоді як у системах вищого порядку його вплив на показники якості перехідних процесів є мінімальним.

Підтверджено збереження стійкості та працездатності електроприводу при зміні моменту навантаження як у режимі холостого ходу, так і при номінальному навантаженні, що свідчить про достатню робастність системи модального керування з редукованим пристроєм спостереження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Luenberger D. G. Observing the state of a linear system [Electronic resource] / D. G. Luenberger // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1964. – Vol. 9, no. 2. – P. 74–80. – Mode of access: <https://doi.org/10.1109/TAC.1964.1105342>
- [2] Nechak L. Reduced order state observer via centre manifold and sliding-mode theories [Electronic resource] / L. Nechak // Proceedings of the 2024 European Control Conference (ECC), Stockholm. – [S. l.], 2024. – P. 2831–2836. – Mode of access: <https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10591214>.
- [3] Darouach M. Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs / M. Darouach, M. Zasadzinski, M. Hayar // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1996. – Vol. 41, no. 8. – P. 1068–1072.
- [4] Толочко О. І. Системи непрямого регулювання швидкості зі спостерігачами стану / О. І. Толочко, О. В. Пісковатська, С. М. Кудокочев // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Електротехніка і енергетика. – 2012. – № 67. – С. 168–173.
- [5] Problems of constructing asynchronous electric drives with state observers / V. Stopkin [et al.] // Information technologies in metallurgy and mechanical engineering: International scientific and technical conference. – 2021. – P. 197–201.
- [6] Kuczmann M. Review of DC Motor Modeling and Linear Control: Theory with Laboratory Tests / M. Kuczmann // Electronics. – 2024. – Vol. 13, no. 11. – P. 2225–2230.
- [7] Reduced-order observer-based position control of a magnetic-g geared servo drive / N. Verbanac [et al.] // Actuators. – 2024. – Vol. 13, no. 1. – P. 6–11.
- [8] Powell G. F. Feedback control of dynamic systems / G. F. Powell, J. D. Powell. – Boston : 2015. – 728 p.
- [9] Coronado-Andrade A. Load torque observer for BLDC motors based on a HOSM differentiator / Coronado-Andrade A, Alvarez-Icaza L // Machines. – 2023. – Vol. 11, no. 12. – P. 1065–1071.
- [10] Zhu Y Y. A nonlinear extended state observer-based load torque estimation method for wind turbine generators / Y. Zhu Y, J. Yu J, Y. Tang Y // Engineering. – 2025. – Vol. 6, no. 10. – P. 264–270.
- [11] Franklin J. F. Automatic Control Systems. Analysis and Synthesis in State Space. / J. F. Franklin, J. D. Powell. – 2004. – 640 p.
- [12] Åström K. J. Feedback systems: an introduction for scientists and engineers / K. J. Åström, R. M. Murray. : Princeton, 2008. – 396 p.

Надійшла (Received) 08.01.2026;

Прийнята (Accepted) 04.02.2026;

Опублікована (Published) 30.03.2026;

FEATURES OF THE SYNTHESIS OF REDUCED STATE MONITORING DEVICES FOR DC ELECTRIC ACTUATORS WITH MODAL CONTROL

- SADOVOY O.S. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Electric Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics, Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0424-6086>, e-mail: sadovuyos@mnau.edu.ua;
- STAVYNSKYY A.A. Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Electric Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics, Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7573-9238>, e-mail: andrey.stavynskiy@mnau.edu.ua;
- RUDENKO A.Yu. Assistant Professor, Department of Electric Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics, Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5103-6412>, email: rudenkoau@mnau.edu.ua;
- STAVYNSKYY R.A. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Ship Electrical Power Systems, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0640-5717>, e-mail: strostand7@gmail.com;
- GUROV A.P. Candidate of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6425-3325>, e-mail: anatoliy.gurov1945@gmail.com;
- VASILIEV O.G. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-8399-0865>, e-mail: grigorich041949@gmail.com;

Purpose. The purpose of the study is the development and justification of a methodology for the synthesis of reduced state monitoring devices for DC electric drives with modal control, as well as the analysis of their impact on the dynamic properties, stability and quality indicators of transient processes of electromechanical systems.

Methodology. The work uses methods of automatic control theory and state space theory, in particular methods of modal synthesis and pole placement. To build a reduced observation device, analytical methods of linear algebra and matrix analysis were used. The study of the dynamic properties of the electromechanical system was performed using methods of mathematical modeling and simulation experiment in the MATLAB software environment. The quality of transient processes was assessed based on the analysis of time characteristics and stability indicators of the control system.

Findings. Mathematical models of full and reduced state observation devices in the state space are developed and an algorithm for synthesis of a reduced observer is proposed, which provides recovery of only unmeasured state variables of the electric drive. It is shown that the choice of the speed of the reduced observation device, which exceeds the speed of the control object, guarantees the convergence of estimates and the correct operation of the modal control system. Using the example of second- and fourth-order electric drives, the possibility of recovering the integral component of the PI controller and the load moment without using additional sensors is proven. The simulation results show that in low-order systems, the use of a reduced observer can lead to a slight increase in overshoot and the duration of transients, while in higher-order systems its impact on dynamic indicators is minimal.

Originality. The paper first substantiates the use of typical normalized equations of modular optimum for the synthesis of reduced observation devices in DC electric drive systems with modal control, and also establishes the dependence of the influence of a reduced observer on the dynamics of the system on its order.

Practical value. The results obtained can be used in the design of control systems for electric drives with limited sensor capabilities, allowing to reduce the structural and hardware complexity of the system, increase its reliability, and simplify practical implementation without significantly degrading control quality indicators.

Keywords: DC electric drive, modal control, state observation device, reduced observer, state space, pole placement, transients, system stability, nonlinearity, synthesis.

REFERENCES

- [1] Luenberger, D.G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9, 2, 74–80.

<https://doi.org/10.1109/TAC.1964.1105342>

- [2] Nechak, L. (2024). Reduced order state observer via centre manifold and sliding-mode theories. *Proceedings of the 2024 European Control Conference (ECC)*, 2831–2836. DOI: [10.23919/ECC64448.2024.10591214](https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10591214)
- [3] Darouach, M., Zasadzinski, M., Hayar, M. (1996). Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, 8, 1068–1072.
- [4] Tolochko, O.I., Piskovatska, O.V., Kudokotsev, S.M. (2012). Systemy nepriamoho rehulivannia shvydkosti zi sposterezhachamy stanu [Indirect speed control systems with state observers]. *Scientific works of Donetsk National Technical University. Series: Electrical Engineering and Power Engineering*, 67, 168–173. (in Ukrainian)
- [5] Stopkin, V., et al. (2021). Problems of constructing asynchronous electric drives with state observers. *Information technologies in metallurgy and mechanical engineering: International scientific and technical conference*, 197–201.
- [6] Kuczmann, M. (2024). Review of DC motor modeling and linear control: theory with laboratory tests. *Electronics*, 13, 11, 2225. DOI: [10.3390/electronics13112225](https://doi.org/10.3390/electronics13112225)
- [7] Verbanac, N., et al. (2024). Reduced-order observer-based position control of a magnetic-g geared servo drive. *Actuators*, 13, 1, 6–11.
- [8] Powell, G.F., Powell, J.D. (2015). *Feedback control of dynamic systems*. Boston: Pearson, 728.
- [9] Coronado-Andrade, A., Alvarez-Icaza, L. (2023). Load torque observer for BLDC motors based on a HOSM differentiator. *Machines*, 11, 12, 1065. DOI: [10.3390/machines11121065](https://doi.org/10.3390/machines11121065)
- [10] Zhu, Y., Yu, J., Tang, Y. (2025). A nonlinear extended state observer-based load torque estimation method for wind turbine generators. *Engineering*, 6, 10, 264–270.
- [11] Franklin, G.F., Powell, J.D. (2004). *Automatic control systems. Analysis and synthesis in state space*. New York: Wiley, 640.
- [12] Åström, K.J., Murray, R.M. (2008). *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton: Princeton University Press, 396.

АНАЛІЗ ПИТОМИХ ВАГОГАБАРИТНИХ ПОКАЗНИКІВ ВИСОКОШВИДКІСНОГО СИНХРОННОГО ДВИГУНА ІЗ ПОСТІЙНИМИ МАГНІТАМИ

- КОВАЛЕНКО М.А. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електромеханіки національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” Київ, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5602-2001>, e-mail: kovalenko87ma@gmail.com;
- ЦИВІНСЬКИЙ С.С. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електромеханіки національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” Київ, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2800-6709>, e-mail: ntuukafem@gmail.com;
- КОВАЛЕНКО І.Я. старший викладач, PhD, кафедри відновлювальних джерел енергії національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” Київ, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1097-2041>, e-mail: 2048141@ukr.net;
- ГАЙДЕНКО Ю.А. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електромеханіки національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” Київ, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5862-2812>, e-mail: gaidenko@ukr.net;
- ТРУХАНОВ О.В. аспірант кафедри електромеханіки національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” Київ, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-4040-2204>, e-mail: oleg.trukhanov@gmail.com.

Мета роботи. Визначення залежностей питомої потужності та питомого об'єму від розрахункової потужності та конструктивних розмірів для формування критеріїв оцінки ефективності ваго-габаритних показників високошвидкісного синхронного двигуна із постійними магнітами та зовнішнім ротором.

Методи дослідження. Класичні методи електромагнітного розрахунку основних розмірів синхронних двигунів із магнітоелектричним збудженням.

Отримані результати. За результатами розрахунків ваго-габаритних показників високошвидкісних синхронних двигунів із постійними магнітами, виконаного класичним методом, визначено вагу та об'єм активних матеріалів: магнітного осердя, постійних магнітів та міді обмотки статора. Для розрахунку прийнято діапазон потужності від 250 Вт до 15 кВт при 10000 об/хв, що відповідає найбільш часто використовуваними двигунами по потужності в різних галузях техніки та застосуваннях. Встановлено нелінійний характер зміни питомих показників синхронних двигунів із постійними магнітами. Визначено, що максимальна питома потужність (близько 80 кВт/кг) досягається в діапазоні 7–9 кВт, після чого цей показник знижується через теплові обмеження та зростання маси конструктивних елементів. Оптимальний діапазон потужності за критерієм питомого об'єму, при циліндричній конструкції прототипу із зовнішнім ротором, становить 1,5–4,5 кВт. Результати досліджень показують, що зі зростанням потужності змінюється баланс мас: відносна частка міді в обмотці статора збільшується, тоді як частка магнітного осердя зменшується. Це зумовлено необхідністю мінімізації електричних втрат для підтримки високого ККД та обмеженнями щодо тепловідведення.

Наукова новизна. Систематизовано залежності питомих характеристик високошвидкісних показників синхронних двигунів із постійними магнітами із зовнішнім ротором від їх геометричних параметрів та рівня використання активних матеріалів, що дозволило ідентифікувати зони найвищої ефективності конструкції при незмінній швидкості обертання.

Практична цінність. Запропонований підхід надає інженерні критерії для обґрунтованого вибору топології та основних розмірів високошвидкісних двигунів на ранніх етапах проектування, забезпечуючи досягнення найкращих масо-габаритних характеристик.

Ключові слова: питомі показники; синхронні двигуни; постійні магніти; високошвидкісний двигун.

I. ВСТУП

Високошвидкісними синхронними двигунами умовно називаються електричні машини швидкість обертання ротора яких перевищує 10000 об/хв. Такі двигуни мають кращі питомі показники, менші габаритні розміри, що обумовлює їх широке використання у різноманітних технічних пристроях різного функціонального призначення.

Сучасний розвиток електромеханічних систем характеризується зростанням вимог до енергоефективності, питомих ваго-габаритних показників та динамічних властивостей електричних машин, що зумовлює підвищений інтерес до високошвидкісних електродвигунів із постійними магнітами (ПМ). Такі двигуни знаходять широке застосування в автономних енергоустановках, електроприводах транспортних засобів, авіаційній та космічній техніці, а також у високошвидкісних компресорних і насосних агрегатах [1].

Розвиток автономної енергетики, авіабудування та електротранспорту характеризується стійкою тенденцією до підвищення частоти обертання електричних машин. Перехід до високошвидкісних режимів роботи (понад 10 000 об/хв) дозволяє суттєво зменшити габаритні розміри та вагу електромеханічних перетворювачів енергії, що є дуже важливим для мобільних та автономних об'єктів. Серед розмаїття типів електричних машин найбільш перспективними для таких областей застосування є двигуни з постійними магнітами, які мають найвищі значення питомої потужності та коефіцієнта корисної дії.

З загальної теорії електромеханічних перетворювачів енергії відомо, що високі швидкості обертання дозволяють зменшити габарити та масу двигуна при збереженні або підвищенні вихідної потужності, що робить аналіз питомих показників одним із ключових напрямків на етапі проектування.

У наукових дослідженнях, присвячених двигунам із постійними магнітами, значна увага приділяється електромагнітним характеристикам, втратам, тепловим режимам та методам чисельного моделювання. Водночас аналіз питомих показників високошвидкісних машин часто обмежується узагальненими емпіричними залежностями або результатами оптимізації для окремих класів конструкцій [2]. Це ускладнює порівняльну оцінку різних топологій двигунів та не завжди дозволяє однозначно визначити вплив швидкості обертання, геометричних параметрів і властивостей магнітних матеріалів на питомі масо-габаритні показники та величину потужності в цілому.

Крім того, у сучасних дослідженнях спостерігається певна суперечність між прагненням до максимального зменшення маси та габаритів двигуна і обмеженнями, пов'язаними з механічною міцністю ротора, тепловими навантаженнями та зростанням втрат

на високих частотах. Високошвидкісний режим роботи зумовлює необхідність врахування додаткових факторів, зокрема механічних напружень у постійних магнітах, впливу повздовжніх та поперечних магнітних потоків та кінцевих ефектів, а також зміни ефективності використання активних матеріалів [3]. У результаті наявні підходи до оцінки питомих показників не завжди забезпечують достатню точність і універсальність для різних діапазонів потужності та швидкості обертання.

У зв'язку з цим актуальним є комплексний аналіз питомих показників високошвидкісних двигунів із постійними магнітами з урахуванням конструктивних, електромагнітних та експлуатаційних особливостей. Такий підхід дозволяє виявити закономірності зміни питомої потужності, питомої маси та масо-габаритних показників залежно від швидкості обертання і геометрії активної частини машини, а також сформулювати обґрунтовані рекомендації для вибору оптимальної конструкції.

Дане дослідження спрямоване на оцінку питомих ваго-габаритних показників високошвидкісних синхронних двигунів із постійними магнітами для порівняльної оцінки при проектуванні таких двигунів на різну потужність за умови постійної швидкості обертання.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Аналіз сучасних наукових публікацій свідчить, що високошвидкісні синхронні двигуни із постійними магнітами є одним із найбільш перспективних напрямів розвитку електромеханічних перетворювачів енергії для систем, де ключовими вимогами є висока питома потужність, мінімальні масо-габаритні показники та підвищена енергоефективність [4]. Такі двигуни використовуються в автономних енергоустановках, авіаційних та космічних системах, транспортних приводах, високошвидкісних компресорах та насосних агрегатах, що обумовлює інтенсивний розвиток досліджень в даній галузі [5], [6].

Перший етап формування наукових підходів до високошвидкісних двигунів із постійними магнітами був зосереджений на загальних фізичних принципах розрахунку електромагнітного поля [7], проектування із використанням аналітичних та чисельних підходів та аналізі втрат у магнітопроводі і обмотках [8]. У більшості відомих роботах [9], [10] основна увага приділяється підвищенню коефіцієнта корисної дії та забезпеченню стабільної роботи при підвищених частотах обертання, при цьому масо-габаритні показники розглядалися переважно як похідні від потужності та швидкості обертання без глибокого системного аналізу [11].

Подальший розвиток досліджень характеризується переходом до мультифізичних моделей [12], у яких одночасно враховуються електромагнітні, теплові та механічні процеси [13]. Багато досліджень прис-

вчені огляду і прикладним розробкам в яких аналізуються напружено-деформований стан ротора, обмеження, пов'язані з міцністю постійних магнітів, а також зростання втрат на високих частотах [14]. Це дозволило обґрунтувати допустимі швидкісні діапазони та запропонувати конструктивні рішення для підвищення надійності високошвидкісних двигунів із ПМ [15]. Водночас питомі вагогабаритні показники в більшості випадків оцінюються для конкретних конструкцій або прикладних задач і не узагальнюються у вигляді універсальних закономірностей.

У сучасних публікаціях значна увага приділяється підвищенню питомої потужності шляхом оптимізації геометрії активної частини електричної машини [16], вибору високоєфективних магнітних матеріалів та застосування нетрадиційних топологій статора і ротора [17]. Проте в таких дослідженнях часто спостерігається протиріччя між прагненням до мінімізації маси і габаритів та необхідністю забезпечення механічної міцності, теплової стійкості й допустимого рівня втрат. Як наслідок, порівняння питомих показників різних високошвидкісних СДПМ здійснюється за різними критеріями, що ускладнює об'єктивну оцінку ефективності конструктивних рішень.

Проведений аналіз літератури показує, що на даний момент недостатньо систематизовані залежності питомих вагогабаритних показників високошвидкісних синхронних двигунів із постійними магнітами циліндричної конструкції із зовнішнім ротором від швидкості обертання, геометричних параметрів активної частини та рівня використання магнітних і електропровідних матеріалів. Більшість відомих робіт зосереджені або на детальному аналізі окремих конструкцій [18], або на чисельній оптимізації без формування узагальнених інженерних критеріїв для порівняльного аналізу [18].

Тому актуальним науково-практичним завданням є розвиток проблематики оцінки та аналізу питомих вагогабаритних показників високошвидкісних синхронних двигунів із постійними магнітами з точки зору узагальнення та порівняння при проектуванні таких двигунів різної потужності для різних потреб та пошук оптимальної потужності, з якої питомі показники є найкращими.

Запропонований підхід дозволяє оцінити вплив швидкості обертання та конструктивних параметрів на питому потужність і вагогабаритні характеристики, що створює підґрунтя для обґрунтованого вибору топології та основних розмірів двигуна на ранніх етапах проектування. Таким чином, робота доповнює наявні дослідження та розвиває напрямок комплексної оцінки ефективності високошвидкісних синхронних двигунів із ПМ та зовнішнім ротором.

III. МЕТА РОБОТИ

Визначення залежностей питомої потужності та питомого об'єму від розрахункової потужності та

конструктивних розмірів для формування критеріїв оцінки ефективності вагогабаритних показників високошвидкісного синхронного двигуна із постійними магнітами та зовнішнім ротором.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Оцінка питомих вагогабаритних показників проводиться для високошвидкісного синхронного двигуна із постійними магнітами та зовнішнім ротором, що топологічно відноситься до класу циліндричних електромеханічних перетворювачів енергії з радіальним магнітним потоком. Основний магнітний потік у таких двигунах збуджується рідкоземельними висококоерцитивними постійними магнітами. Загальний вигляд прототипу досліджуваного двигуна із постійними магнітами наведено на рис. 1.

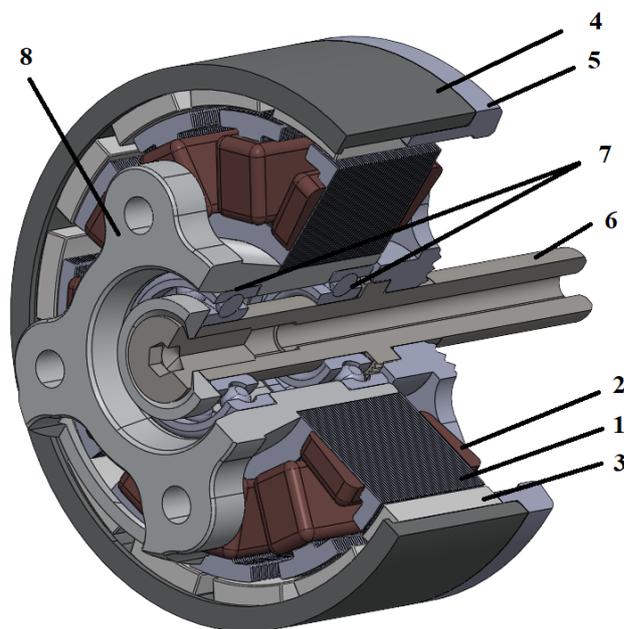


Рисунок 1. Загальний вигляд прототипу досліджуваного двигуна

На рис. 1 показано: 1 – шихтоване магнітне осердя статора; 2 – трифазна обмотка статора; 3 – постійні магніти ротора; 4 – втулка ротора (що одночасно виконує роль корпусу); 5 – конструктивна втулка ротора; 6 – вал двигуна; 7 – підшипники; 8 – конструктивна втулка статора.

Магнітне осердя прототипу двигуна виконується із тонколистової електротехнічної сталі ($\approx 0,1 \dots 0,15$ мм) для зменшення втрат на вихрові струми. Трифазна обмотка статора виконується із круглого обмотувального проводу в декілька паралельних гілок та має, як правило, один зубцевий крок. Для всіх значень розрахункових потужностей використовуються висококоерцитивні неодимові магніти постійні магніти типу N35. Корпус ротора в даному двигуні є обертовою частиною (разом із постійними магнітами, валом та

конструктивною втулкою ротора) і виконується литою із магнітопровідного матеріалу, що забезпечує зменшення магнітного опору основному магнітному потоку. Конструктивна втулка ротора виготовляється методом лиття чи фрезерування заготовки із алюмінію і має складну конфігурацію, що забезпечує додаткове охолодження двигуна та одночасне заощадження ваги обертової частини, зменшення моменту інерції та швидкодії такого двигуна. Вал виготовляється із конструктивної сталі та має наскрізний отвір. Втулка статора виконує конструктивну функцію та забезпечує фіксацію двигуна та є місцем для розміщення підшипників кочення чи ковзання.

Очевидно, що оцінка питомих вагогабаритних показників проводиться для різних величин потужності досліджуваного двигуна. Для об'єктивної оцінки зміни питомих показників при зміні величини потужності ряд вихідних параметрів повинні залишатись незмінними у процесі розрахунку основних розмірів, ваги та об'єму синхронного двигуна. У табл. 1 наведено вихідні параметри, що залишаються незмінними у процесі оцінки питомих показників та зміні потужності для ряду досліджуваних двигунів.

Таблиця 1. Постійні величини

Параметр	Величина
Швидкість обертання, об/хв	10000,0
Кількість пар полюсів, p	1
Кількість фаз, m	3
Індукція в повітряному проміжку, Тл	0,7
Лінійне навантаження, А/м	20000,0
Номінальна напруга живлення, В	25,0
Густина струму в обмотках, А/мм ²	8,0
Геометричний коефіцієнт λ	0,50
$\cos\varphi$	0,9
ККД	0,9
Відношення внутрішнього діаметру статора до зовнішнього діаметру статора	0,32
Коефіцієнт полюсного перекриття	0,7
Залишкова магнітна індукція ПМ, Тл	1,2
Коерцитивна сила	900000,0

ПМ, А/м	
Величина повітряного проміжку, мм	0,2
Коефіцієнт заповнення паза міддю	0,67
Відносна магнітна проникність ПМ	1,1

Для оцінки питомих вагогабаритних показників необхідно розрахувати основні розміри двигуна, параметри обмотки та магнітної системи. Це дозволить визначити об'єм та вагу активних матеріалів для двигунів із зовнішнім ротором та постійними магнітами різної потужності. В даній роботі використовується методика, що наведена у літературних джерелах [4], [5], [6], [12]. Алгоритм розрахунку ваги та об'єму активних матеріалів наведено нижче.

Розраховується діаметр статора за наступним виразом [4]:

$$D_m = 3 \sqrt{\frac{T_{em}}{C_t \cdot k_c \cdot \lambda}}$$

де k_c – коефіцієнт ефективної довжини (коефіцієнт заповнення сталлю), λ – геометричний коефіцієнт.

При попередньому розрахунку конструктивної сталі та електромагнітного моменту [12]:

$$T_{em} = 9,55 \cdot \frac{P}{n},$$

$$C_t = \frac{\pi}{2} \cdot B_\delta \cdot A_l \cdot k_l$$

де P – потужність, n – швидкість обертання, де B_δ – індукція в проміжку, A_l – питоме електричне навантаження, k_l – обмотувальний коефіцієнт.

Активна довжина магнітного осердя статора розраховується за наступним виразом [4]:

$$L_l = \lambda \cdot D_m$$

де λ – геометричний коефіцієнт, що обирається по відомим рекомендаціям [4] чи виходячи із практичного досвіду інженера-проектувальника чи по іншим вимогам (технічному завданню, вимогам, особливостям використання).

Вага магнітного осердя визначається виходячи із розрахунку повного геометричного об'єму статора (без урахування пазів) [5]:

$$V_{cyl} = \frac{\pi}{4} \cdot (D_m^2 - D_i^2) \cdot L_l$$

де D_i – внутрішній діаметр статора (під вал).

Об'єм пазів розраховується виходячи із наступних міркувань [6]:

$$V_s = Z \cdot h_s \cdot b_s \cdot L_l$$

де Z – кількість пазів (зубців), h_s – висота паза, b_s – середня ширина паза.

Об'єм "чистого" заліза феромагнітного осердя статора розраховується наступним чином [6]:

$$V_{fe} = (V_{cyl} - V_s) \cdot k_c$$

Розрахувавши об'єм, визначається вага магнітного осердя статора [6]:

$$m_{fe} = V_{fe} \cdot \rho_{fe}$$

де $\rho_{fe} = 7700(\text{кг} / \text{м}^3)$ – питома густина електротехнічної сталі.

Розрахунок параметрів обмотки статора доцільно розпочати із розрахунку кількості витків за відомим виразом [12]:

$$W_l = \frac{U_l}{4,44 \cdot f_l \cdot \Phi \cdot k_l}$$

Середня довжина витка обмотки статора, для двигуна із внутрішнім статором визначається наступним чином [12]:

$$l_{tl} = 2 \cdot L_l + 2 \cdot \tau$$

де τ – полюсна поділлка.

Загальна довжина провідника, (для всієї обмотки) визначається наступним чином [12]:

$$L_{cu} = W_l \cdot l_{tl} \cdot m$$

де m – кількість фаз.

Відповідно об'єм обмотки статора:

$$V_{cu} = L_{cu} \cdot \frac{A_{cu1} \cdot 10^{-6}}{U_p}$$

де A_{cu1} – площа міді пазу та вага обмотки статора визначається за виразом:

$$m_{cu} = V_{cu} \cdot \rho_{cu1}$$

де $\rho_{cu1} = 8900(\text{кг} / \text{м}^3)$ – прийнята питома густина міді.

Для розрахунку параметрів постійних магнітів, спочатку необхідно визначити величину магнітного потоку на один полюс:

$$\Phi_p = B_\delta \cdot b_{pm} \cdot L_l \cdot k_\delta$$

де b_{pm} – ширина постійного магніту по дузі ротора, k_δ – коефіцієнт форми поля в повітряному проміжку.

Радіальна висота постійного магніту визначається

із наступних міркувань:

$$h_{pm} = \frac{B_\delta \cdot \delta}{\mu_0 \cdot H_c \cdot k_m}$$

де δ – величина повітряного проміжку, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}(\text{Гн} / \text{м})$ – магнітна проникність повітря, H_c – коерцитивна сила магніту, k_m – коефіцієнт використання магніту.

Загальний об'єм постійних магнітів та їх вага визначаються по наступним виразам [12]:

$$V_{pm} = 2 \cdot p \cdot V_{pm1},$$

$$m_{pm} = V_{pm} \cdot \rho_{pm}$$

де p – кількість пар полюсів; $\rho_{pm} = 7500(\text{кг} / \text{м}^3)$ – прийнята питома густина для даного матеріалу магніту.

Відповідно загальна вага активних матеріалів та їх об'єм визначається як сума всіх активних матеріалів (магнітного осердя статора та ротора, обмотки статора та постійних магнітів) [6]:

$$M_m = m_{fe} + m_{cu} + m_{pm}$$

$$V_m = V_{fe} + V_{cu} + V_{pm}$$

Оцінка питомих показників проводиться для наступного ряду двигунів із постійними магнітами по потужності: від 250 Вт до 15000 Вт. Вибір саме такого діапазону потужностей обумовлений тим, що це є найбільш часто використовуваними двигунами по потужності в різних галузях техніки та застосуваннях [10].

Завдання розрахунку питомих розмірів супроводжується проведенням серії ітераційних розрахунків із використанням класичної методики розрахунку основних розмірів та основних рівнянь синхронної машини, оскільки зміна потужності (при фіксованих електромагнітних навантаженнях та частоті A , B_δ , n) призводить до зміни умовного об'єму активних матеріалів двигуна $D^2 \cdot L$.

Питомими показниками, що розглядаються в даній роботі, є відношення розрахункової потужності двигуна V_m до ваги активних матеріалів kg та об'єму m^3 активних матеріалів. Активними матеріалами крім обмотки статора та магнітного осердя статора та ротора вважаються постійні магніти, що враховано в розрахунок.

Для практичного використання отриманих результатів та забезпечення можливості аналізу питомих вагогабаритних показників високошвидкісних двигунів із ПМ та зовнішнім ротором, отримані в подальшому залежності апроксимовані методами нелінійної регресії.

Залежність зовнішнього діаметра D статора від розрахункової потужності P можливо описати степеневою функцією, що узгоджується з теорією геометричної подібності електричних машин:

$$P(D) = a \cdot D^b$$

де a , b – коефіцієнти, що враховують електромагнітне навантаження та обмеження за відцентровими силами при $n=10000$ об/хв.

Залежність питомого об'єму (кВт/м³) від номінального значення розрахункової потужності (кВт) представлена у вигляді полінома другого порядку, що відображає наявність екстремуму (оптимального діапазону використання матеріалів):

$$p_v(P) = a \cdot P^2 + b \cdot P + c$$

Залежність питомої потужності (кВт/кг) від номінального значення розрахункової потужності (кВт) апроксимована логарифмічними залежностями:

$$m_{cm}(P) = k_1 \cdot \ln(P) + c_1$$

$$m_{cu}(P) = k_2 \cdot \ln(P) + c_2$$

Результат розрахунку питомої активної потужності від номінального значення розрахункової потужності для прототипу досліджуваного синхронного двигуна наведено на рис. 2.

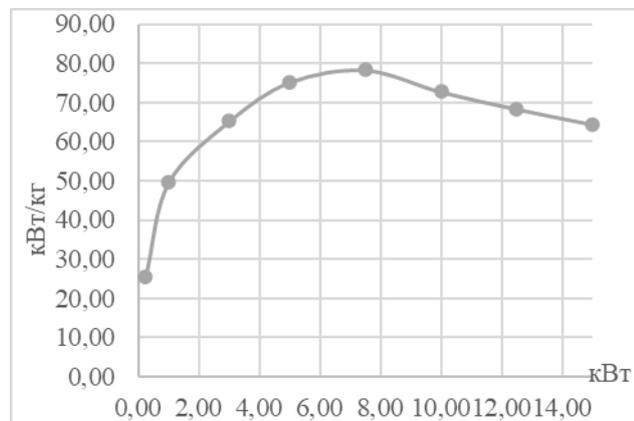


Рисунок 2. Залежність питомої потужності від номінального значення розрахункової потужності

По рис. 2 видно, що вага активних матеріалів збільшується пропорційно об'єму діаметра внутрішньої розтки статора D^3 , що впливає із основного рівняння для електромагнітної потужності, згідно з яким повна потужність пропорційна активній потужності та об'єму діаметра внутрішньої розтки статора $S \sim P \sim D^3$. На рис. 2 видно, що питома потужність Вт/кг починає зростати від 250 Вт, потім досягає свого максимуму у ≈ 80 Вт/кг для двигунів потужністю 7-9 кВт і починає зменшуватись для двигунів більшої потужності. Падіння питомої потужності після ≈ 9 кВт можливо пояснити за рахунок наступного:

– при збільшенні потужності значно зростають магнітні втрати та частково електричні, що призводить до критичного підвищення температури. Це обумовлює поступове зменшення електромагнітних навантажень A та B_s , що і призводить до падіння питомих показників;

– збільшення потужності призводить до росту механічних навантажень на конструктивні елементи двигуна. Тому збільшується також вага неактивних матеріалів таких як вал, корпус, підшипники і т.ін. Це є додатковим фактором, що впливає на падіння питомих показників.

Отримані результати є коректним фізичним відображенням того, що ефективність використання матеріалів (або питома потужність) зменшується для потужних електричних машин через обмеження охолодження та зростання частки конструктивних елементів та матеріалів.

Залежність потужності досліджуваного прототипу двигуна від об'єму активних матеріалів наведено на рис. 3.

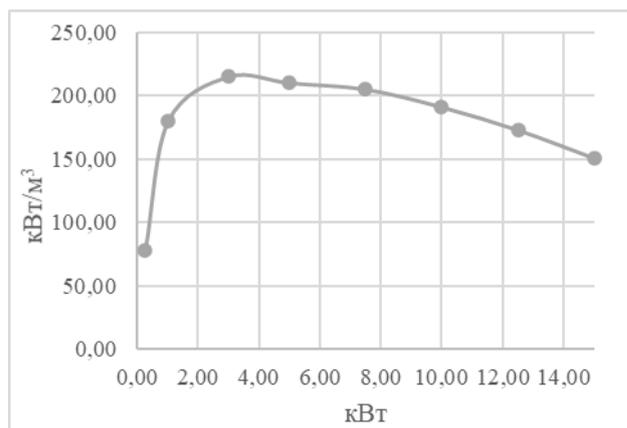


Рисунок 3. Залежність питомого об'єму від номінального значення розрахункової потужності

У двигунах малої потужності значну частку маси складають конструктивні елементи (корпус, вали, підшипники). При збільшенні потужності частка активних матеріалів зростає, що призводить до зростання питомої потужності (рис. 3). Після досягання максимуму питомого об'єму (при номінальному значенні розрахункової потужності $\approx 1,5-4,5$ кВт) збільшується довжина лобової частини обмотки статора та виникає необхідність збільшення повітряного проміжку для забезпечення жорсткості конструкції, що призводить до падіння питомого об'єму.

З іншого боку, при збільшенні номінальної потужності об'єм двигуна зростає швидше, ніж площа його поверхні. Оскільки потужність пропорційна об'єму, а ефективність відведення тепла через зовнішній ротор – площі (квадрату основних розмірів), у більш потужних двигунах збільшується об'єм теплового потоку від збільшених втрат. Це призводить до збіль-

шення маси та підвищення продуктивності системи охолодження, що сповільнює ріст питомої потужності відносно загальної потужності.

При збільшенні потужності (та відповідно, зовнішнього діаметра ротора) тангенціальна швидкість зростає. Щоб надійно зафіксувати постійні магніти при великих діаметрах потужних машин, необхідно застосовувати значно товщі бандажі або масивніші конструкційні елементи з високоміцних матеріалів та композитів. Це призводить до росту конструктивної маси ротора порівняно з ростом активної електромагнітної потужності.

Початкове зростання потужності від 250 Вт (рис. 3) пояснюється покращенням коефіцієнта використання активних матеріалів, а подальше уповільнення – необхідністю зміцнення конструкції зовнішнього ротора проти відцентрових сил та обмеженнями щодо тепловідведення з внутрішнього статора.

Розрахунковий діаметр двигуна є основним розміром, що характеризує об'єм двигуна та вагу активних матеріалів. Результат розрахунку зовнішнього діаметру статора, виконаного для прототипу досліджуваного синхронного двигуна з ПМ та зовнішнім ротором показано на рис. 4

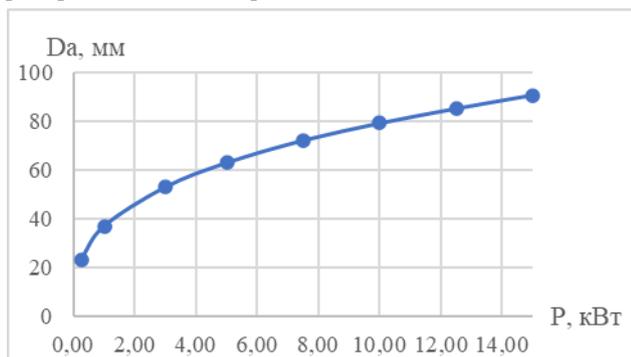


Рисунок 4. Залежність зовнішнього діаметру статора від розрахункової потужності двигуна

Згідно з класичною теорією електромеханічних перетворювачів енергії, потужність машини пропорційна квадрату діаметра ротора та його довжині. При пропорційному збільшенні зовнішнього діаметра спостерігається зростання номінальної потужності, оскільки збільшується не тільки плече прикладання тангенціальної сили, а й корисний об'єм активних матеріалів. Іншими факторами, що впливають на обмеження подальшого зростання діаметру та питомих показників є наступні:

лінійна швидкість на зовнішній поверхні ротора зростає прямо пропорційно. Збільшення діаметра призводить до зростання механічних напружень у ярі ротора та елементах кріплення постійних магнітів. Це призводить до збільшення товщини стінок ротора, що обмежує об'єм активних матеріалів;

– зі збільшенням діаметра зростає площа поверхні статора, що теоретично покращує тепловіддачу.

Проте, через високу частоту перемагнічування, втрати в магнітному осерді статора суттєво зростають. При великих діаметрах складніше забезпечити рівномірне охолодження внутрішніх частин обмотки, що вимагає обмеження густини струму, а отже стримує потенційне зростання потужності;

– при малих діаметрах та потужностях, значну частину перерізу займають конструктивні елементи (вал, підшипники). Зі збільшенням діаметра коефіцієнт використання внутрішнього простору під активні матеріали покращується, що пояснює крутий підйом графіку (рис. 4) на початковому етапі.

При зміні розрахункової потужності двигуна із постійними магнітами змінюється вага конструктивних матеріалів: міді обмотки статора, магнітного осердя статора та ротора та постійних магнітів. В роботі проведено оцінку зміни ваги активних матеріалів при зміні потужності. Характер відносної зміни ваги активних матеріалів до повної ваги двигуна показано на рис. 5.

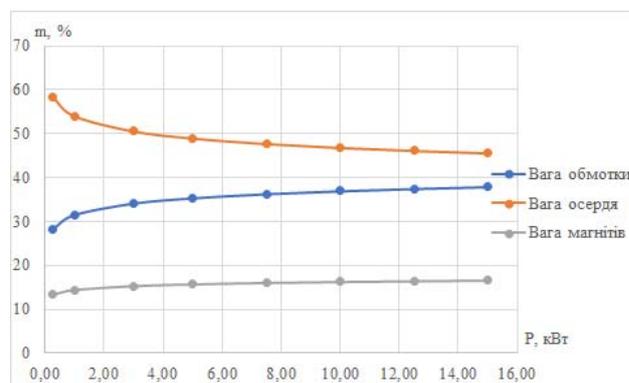


Рисунок 5. Відношення ваги активних матеріалів від розрахункової потужності двигуна

Отримані результати мають чітку фізичну інтерпретацію. Для високошвидкісних двигунів розміри та конфігурація магнітного осердя обирається (розраховується) з урахуванням обмежень за втратами на гістерезис і вихрові струми, які суттєво підвищуються із частотою. При збільшенні потужності, з одного боку, збільшується об'єм магнітного осердя (що виходить із основного рівняння для електромагнітної потужності), а з іншого боку підвищуються електромагнітні навантаження та проводиться оптимізація форми активної зони осердя (зубцево-пазової зони, ярма). У результаті абсолютна маса осердя зростає повільніше, ніж сумарна маса машини, що й проявляється як зменшення його відносної частки.

При підвищенні потужності, за умови незмінної швидкості обертання, зростає електромагнітний момент, що призводить до зростання струмів у обмотці статора. Для забезпечення допустимої густини струму та розрахункової потужності необхідно збільшувати сумарний переріз провідників, що безпосередньо призводить до зростання ваги міді. Крім того, зі збі-

льшенням активної потужності збільшуються втрати та температура, що додатково призводить до збільшення ваги обмотки для покращення тепловідведення та зменшення втрат від вищих гармонік та скін-ефекту.

Маса постійних магнітів визначається необхідною величиною магнітного потоку в повітряному проміжку, який при заданій швидкості обертання і допустимих механічних навантаженнях змінюється незначно. Для високошвидкісних машин магніти обмежені не стільки електромагнітними, скільки механічними та термічними навантаженнями (відцентрові сили, вплив розмагнічування від полів обмотки статора). При збільшенні потужності двигуна зростає магнітне поле реакції якоря, яке намагається розмагнітити магніти або спотворити основне магнітне поле. Для стабільної роботи при високих навантаженнях необхідно збільшувати об'єм магнітів, а не тільки їх площу. Тому при зростанні потужності відносна частка ваги постійних магнітів зростає, але повільніше за інші активні матеріали.

При збільшенні потужності двигуна часто доцільніше збільшувати діаметр D двигуна чим довжину L , з метою підвищення електромагнітного моменту ($M \sim D^2L$). Збільшення діаметра приводить до того, що довжина лобових частин обмотки статора зростає, що призводить до збільшення опору, втрат та ваги міді. У потужних двигунах це призводить до порушення балансу ваги активних матеріалів на користь збільшення активної довжини заліза, що призводить до збільшення відсотку ваги в бік електротехнічної сталі.

Отримані результати повністю відповідають фізичним процесам для високошвидкісних синхронних двигунів із постійними магнітами: зі зростанням потужності збільшуються електричні втрати та температура двигуна, тоді як габарити магнітної системи масштабуються в меншій мірі. Саме це призводить до збільшення питомої частки міді обмотки статора та зменшення відносної частки сталі магнітного осердя при мінливому збільшенні ваги магнітів у загальну масу активних матеріалів.

Крім того, збільшення відносної ваги обмотки статора та зменшення ваги магнітного осердя, при збільшенні потужності позитивно сприяє зміні співвідношення між втратами в магнітному осерді та електричними (змінними) втратами. Це призводить до зміщення точки з максимальним ККД в зону номінального навантаження.

Оптимальне співвідношення сталі та міді формується таким чином, щоб електромагнітна система працювала в зоні допустимих, але не критичних значень магнітної індукції, а густина струму забезпечувала мінімум втрат при заданій потужності та швидкості обертання. Для високошвидкісних двигунів із постійними магнітами це співвідношення, як правило, зміщується у бік збільшення частки міді порівняно з

традиційними низькошвидкісними машинами, оскільки зменшення електричних втрат більше впливає на ККД, ніж додаткове зниження магнітних втрат за рахунок нарощування маси сталі.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

V. ВИСНОВКИ

На основі проведених досліджень можливо зробити наступні висновки.

1. Встановлено нелінійний характер зміни питомих вагогабаритних показників високошвидкісного синхронного двигуна із постійними магнітами в залежності від його номінальної розрахункової потужності. Для досліджуваного діапазону від 250 Вт до 15 кВт визначено, що питома потужність (кВт/кг) досягає свого максимуму (близько 80 кВт/кг) у діапазоні потужностей 7–9 кВт, після чого починає знижуватися через теплові та механічні обмеження.

2. Виявлено оптимальний діапазон потужностей за критерієм питомого об'єму, який становить 1,5–4,5 кВт. Подальше падіння показника кВт/м³ пояснюється збільшенням довжини лобових частин обмоток та необхідністю збільшення повітряного проміжку для забезпечення жорсткості конструкції при великих габаритах.

3. Досліджено зміну балансу маси активних матеріалів при зростанні номінальної потужності. Зокрема, відносна частка ваги міді обмотки статора зростає, тоді як відносна вага магнітного осердя зменшується. Це пов'язано з необхідністю збільшення перерізу провідників для забезпечення розрахункового значення густини струму та покращення тепловідведення, а також з оптимізацією зубцево-пазової зони магнітного осердя.

4. Визначено особливості проектування високошвидкісних машин, де співвідношення між електротехнічною сталлю та міддю зміщується у бік збільшення частки міді. Такий підхід дозволяє знижувати електричні втрати, що має більший вплив на ККД у високошвидкісних режимах, ніж нарощування ваги сталі для зниження магнітних втрат.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Kovalenko, M. A. Mathematical simulation of brushless high-speed permanent magnet motor / M. A. Kovalenko, D. V. Tsyplenkov, I. Ya. Kovalenko, E. O. Titov, O. O. Bazarov // *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. – 2025. – № 4. – P. 108–116. DOI: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2025-4/108>.
- [2] Коваленко, М. А. Магнітоелектричний генератор з аксіальним магнітним потоком та подвійним статором для перетворення низькопотенціальної механічної енергії / М. А. Коваленко, І. В. Ткачук, І. Я. Коваленко, С. О. Жук, О. О. Кришньов // *Відновлювана енергетика*. – 2024. – № 2(77). –

- C. 13–20. DOI: [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2024.2\(77\).13-20](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2024.2(77).13-20).
- [3] Kovalenko, M. Determining the influence of structural and electromagnetic parameters on active losses in an electric motor with permanent magnets for unmanned aerial vehicles / M. Kovalenko, V. Chumack, V. Grebenikov, L. Mazurenko, I. Tkachuk, O. Bazarov, Y. Titov // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2025. – Vol. 6, № 5(138). – P. 6–15. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.344817>.
- [4] An, G. Q. Review of key technologies of the high-speed permanent magnet motor drive / G. Q. An, Y. Lu, M. Zhao // *Energies*. – 2024. – Vol. 17, № 21. – Article 5252. DOI: <https://doi.org/10.3390/en17215252>.
- [5] Shen, Q. Design and analysis of the high-speed permanent magnet motors: a review on the state of the art / Q. Shen, Z. Zhou, S. Li, X. Liao [et al.] // *Machines*. – 2022. – Vol. 10, № 7. – Article 549. DOI: <https://doi.org/10.3390/machines10070549>.
- [6] Guo, L. Design of high power density double-stator permanent magnet synchronous motor / L. Guo // *IET Electrical Power Applications*. – 2023. DOI: <https://doi.org/10.1049/elp2.12258>.
- [7] Usca-Gomez, H. G. A review and case study of cooling methods for electric machines / H. G. Usca-Gomez // *Energies*. – 2025. – Vol. 16, № 8. – Article 437. DOI: <https://doi.org/10.3390/en16080437>.
- [8] Vlachou, V. I. Overview on permanent magnet motor trends and electromagnetic analysis / V. I. Vlachou // *Energies*. – 2024. – Vol. 17, № 2. – Article 538. DOI: <https://doi.org/10.3390/en17020538>.
- [9] Azom, M. A. Review of electrical and thermal modeling techniques for three-phase PMSM drives / M. A. Azom // *CSOL Journal*. – 2025.
- [10] Wang, Y. Review of high power density and fault-tolerant design of permanent magnet machines / Y. Wang // *Energies*. – 2023. – Vol. 16, № 19. – Article 7015. DOI: <https://doi.org/10.3390/en16197015>.
- [11] Chumak, V. V. Mathematical modeling of a synchronous generator with combined excitation / V. V. Chumak, M. A. Kovalenko, S. S. Tsvinskiy, I. V. Tkachuk, O. I. Ponomarev // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2020. – Vol. 1, № 5(103). – P. 30–36. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.193495>.
- [12] Cheng, M. Design and calculation of multi-physical field of ultra-high-speed permanent magnet motor / M. Cheng, Z. Li, S. Xu, R. Pei // *Energies*. – 2024. – Vol. 17, № 13. – Article 3072. DOI: <https://doi.org/10.3390/en17133072>.
- [13] Zhang, M. The eddy current loss segmentation model of permanent magnet for temperature analysis in high-speed permanent magnet motor / M. Zhang, S. Luo, X. Liu, W. Li // *IET Power Electronics*. – 2021. – Vol. 14, № 4. – P. 751–759. DOI: <https://doi.org/10.1049/pe12.12009>.
- [14] Bi, Q. Loss analysis of high-speed permanent magnet motor for cordless vacuum cleaner / Q. Bi, D. Shao // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2023. – Vol. 2488. – Article 012021. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2488/1/012021>.
- [15] Liu, Z. An investigation into the pole-slot ratio and optimization of a low-speed and high-torque permanent magnet motor / Z. Liu, G. Zhang, G. Du // *Applied Sciences*. – 2024. – Vol. 14, № 10. – Article 3983. DOI: <https://doi.org/10.3390/app14103983>.
- [16] Zeng, Y. Influence of interference fit and temperature on high-speed permanent magnet motor / Y. Zeng, S. Yang, X. Yang, Q. Wang, L. Zhang, J. Hao, W. Hua // *Applied Sciences*. – 2023. – Vol. 13, № 20. – Article 11331. DOI: <https://doi.org/10.3390/app132011331>.
- [17] Wang, Y. Friction loss calculation and thermal analysis of submerged low-temperature high-speed permanent magnet motor / Y. Wang, B. Ge, L. Wang, S. Liu // *IEEE Access*. – 2023. – Vol. 11. – P. 107116–107125. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3320683>.
- [18] Li, Z. Loss calculation and thermal analysis of ultra-high-speed permanent magnet motor / Z. Li, P. Wang, L. Liu, Q. Xu, S. Che, L. Zhang, S. Du, H. Zhang, H. Sun // *Heliyon*. – 2022. – Vol. 8. – Article e11350. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e11350>.

Надійшла (Received) 22.01.2026;

Прийнята (Accepted) 06.02.2026;

Опублікована (Published) 30.03.2026;

ANALYSIS OF THE SPECIFIC WEIGHT AND SIZE INDICATORS OF A HIGH-SPEED PERMANENT MAGNET SYNCHRONOUS MOTOR

KOVALENKO M.A. PhD, Associate Professor Department of Electromechanics National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5602-2001>, e-mail: kovalenko87ma@gmail.com;

TSYVINSKYI S.S. PhD, Associate Professor Department of Electromechanics National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine, ORCID:

<https://orcid.org/0000-0002-2800-6709>, e-mail: ntuukafem@gmail.com;

KOVALENKO I.Y.

Senior Lecturer, PhD, Department of Renewable Energy Sources, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" Kyiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1097-2041>, e-mail: 2048141@ukr.net;

HAIDENKO Y.A.

PhD, Associate Professor Department of Electromechanics National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5862-2812>, e-mail: gaidenko@ukr.net;

TRUKHANOV O.V.

Postgraduate student of the Department of Electromechanics, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-4040-2204>, e-mail: oleg.trukhanov@gmail.com.

Purpose. Determination of the dependence of specific power and specific volume on the calculated power and design dimensions for the formation of criteria for assessing the efficiency of weight and dimensions of a high-speed synchronous motor with permanent magnets and an external rotor.

Methodology. Classical methods of electromagnetic calculation of the main dimensions of synchronous motors with magnetolectric excitation.

Findings. According to the results of calculations of weight and dimensions of high-speed synchronous motors with permanent magnets, performed by the classical method, the weight and volume of active materials were determined: magnetic core, permanent magnets and stator winding copper. For the calculation, the power range from 250 W to 15 kW at 10,000 rpm was adopted, which corresponds to the most frequently used motors in terms of power in various industries and applications. The nonlinear nature of the change in specific parameters of synchronous motors with permanent magnets was established. It was determined that the maximum specific power (about 80 kW/kg) is achieved in the range of 7–9 kW, after which this indicator decreases due to thermal limitations and an increase in the mass of structural elements. The optimal power range according to the specific volume criterion, with a cylindrical design of the prototype with an external rotor, is 1.5–4.5 kW. The results of the research show that with increasing power, the mass balance changes: the relative proportion of copper in the stator winding increases, while the proportion of the magnetic core decreases. This is due to the need to minimize electrical losses to maintain high efficiency and restrictions on heat dissipation.

Originality. The dependence of the specific characteristics of high-speed indicators of synchronous motors with permanent magnets with an external rotor on their geometric parameters and the level of use of active materials was systematized, which allowed identifying the zones of the highest efficiency of the design at a constant rotation speed.

Practical value. The proposed approach provides engineering criteria for a well-founded choice of topology and basic dimensions of high-speed engines at the early design stages, ensuring the achievement of the best weight-to-size characteristics.

Keywords: specific indicators; synchronous motors; permanent magnets; high-speed motor.

REFERENCES

- [1] Kovalenko, M. A., Tsyplov, D. V., Kovalenko, I. Ya., Titov, E. O., & Bazarov, O. O. (2025). Mathematical simulation of brushless high-speed permanent magnet motor. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, (4), 108–116. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2025-4/108>.
- [2] Kovalenko, M. A., Tkachuk, I. V., Kovalenko, I. Ya., Zhuk, S. O., & Kryshnov, O. O. (2024). Mahnitoelektrychnyi henerator z aksialnym mahnitnym potokom ta podviinym statorom dlia peretvorennia nyzkopotentsialnoi mekhanichnoi enerhii. *Vidnovliuvana enerhetyka*, (2(77)), 13–20 DOI: [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2024.2\(77\).13-20](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2024.2(77).13-20).
- [3] Kovalenko, M., Chumack, V., Grebenikov, V., Mazurenko, L., Tkachuk, I., Bazarov, O., & Titov, Y. (2025). Determining the influence of structural and electromagnetic parameters on active losses in an electric motor with permanent magnets for unmanned aerial vehicles. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6(5 (138)), 6–15. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.344817>.
- [4] [G. An, Q., Lu, Y., & Zhao, M. (2024). Review of Key Technologies of the High-Speed Permanent Magnet Motor Drive. *Energies*. <https://doi.org/10.3390/1996-1073/17/21/5252>.
- [5] Q. Shen, Z. Zhou, S. Li, X. Liao, et al. (2022). Design and Analysis of the High-Speed Permanent Magnet Motors: A Review on the State of the Art. *Machines*, 10(7), 549.
- [6] Guo, L. (2023). Design of High Power Density Double-Stator Permanent Magnet Synchronous Motor. *IET Electrical Power Applications*.
- [7] Usca-Gomez, H. G. (2025). A Review and Case of Study of Cooling Methods. *Energies*, 16(8), 437.
- [8] Vlachou, V. I. (2024). Overview on Permanent Magnet Motor Trends and Electromagnetic Analysis. *Energies*, 17(2), 538.
- [9] Azom, M. A. (2025). Review of Electrical and Thermal Modeling Techniques for Three-Phase

PMSM Drives. CSOL Journal.

- [10] Wang, Y. (2023). Review of High Power Density and Fault-Tolerant Design. *Energies*, 16(19), 7015.
- [11] Chumak, V. V., Kovalenko, M. A., Tsivinskiy, S. S., Tkachuk, I. V., & Ponomarev, O. I. (2020). Mathematical modeling of a synchronous generator with combined excitation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1(5 (103)), 30–36. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.193495>.
- [12] Cheng, M., Li, Z., Xu, S., & Pei, R. (2024). Design and calculation of multi-physical field of ultra-high-speed permanent magnet motor. *Energies*, 17(13), Article 3072. <https://doi.org/10.3390/en17133072>.
- [13] Zhang, M., Luo, S., Liu, X., & Li, W. (2021). The eddy current loss segmentation model of permanent magnet for temperature analysis in high-speed permanent magnet motor. *IET Power Electronics*, 14(4), 751–759. <https://doi.org/10.1049/pel2.12009>.
- [14] Bi, Qing & Shao, Dingguo. (2023). Loss Analysis of High-Speed Permanent Magnet Motor for Cordless Vacuum Cleaner. *Journal of Physics: Conference Series*. 2488. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2488/1/012021>.
- [15] Liu, Z., Zhang, G., & Du, G. (2024). An investigation into the pole-slot ratio and optimization of a low-speed and high-torque permanent magnet motor. *Applied Sciences*, 14(10), Article 3983. <https://doi.org/10.3390/app14103983>
- [16] Zeng, Y., Yang, S., Yang, X., Wang, Q., Zhang, L., Hao, J., & Hua, W. (2023). Influence of interference fit and temperature on high-speed permanent magnet motor. *Applied Sciences*, 13(20), Article 11331. <https://doi.org/10.3390/app132011331>
- [17] Wang, Y., Ge, B., Wang, L., & Liu, S. (2023). Friction loss calculation and thermal analysis of submerged low temperature high speed permanent magnet motor. *IEEE Access*, 11, 107116–107125. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3320683>.
- [18] Li, Zheng & Wang, Pengju & Liu, Libo & Xu, Qianqian & Che, Shuai & Zhang, Lucheng & Du, Shenhui & Zhang, Hongjie & Sun, Hexu. (2022). Loss calculation and thermal analysis of ultra-high speed permanent magnet motor. *Heliyon*. 8. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e11350>.

УДК.621.3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІДНОВЛЕННЯ ПРИВЕДЕНОГО МАГНІТНОГО МОМЕНТУ ТОЧКОВОГО ДИПОЛЯ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ФЕРОМАГНІТНИХ ОБ'ЄКТІВ

- ШАРЕЙКО Д.Ю. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6460-9331>, e-mail: dshareyko.mk@gmail.com;
- БІЛЮК І.С. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1654-7468>, e-mail: ivanbilyuk@gmail.com;
- САВЧЕНКО О.В. завідувач лабораторіями кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9718-7857>, e-mail: savchenko1984@gmail.com;
- МАРДЗЯВКО В.А. асистент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Миколаївського національного аграрного університету, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-9215>, e-mail: vitalijmardzavko@gmail.com;
- ТОДОСІЄНКО А.М. аспірант кафедри автоматики Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-3692-4723>, e-mail: atodosienko@gmail.com;

Мета роботи. Мета роботи полягає у розробці та дослідженні математичної моделі для відновлення приведенного магнітного моменту точкового диполя на основі інтегральних характеристик магнітного поля, що дозволяє забезпечити коректне розв'язання оберненої задачі магнітометрії в умовах обмеженої апріорної інформації та реальних шумових завод.

Методи дослідження. У роботі застосовано математичне моделювання, аналітичні методи оберненої магнітометрії, інтегральні перетворення та чисельний експеримент для оцінки точності відновлення компонент магнітного моменту. Для побудови розрахункових залежностей використано дискретизацію поля на прямокутній сітці вимірювальних точок та алгоритми мінімізації похибки реконструкції.

Отримані результати. Побудовано узагальнену модель взаємозв'язку між вимірними складовими магнітної індукції та компонентами вектора магнітного моменту диполя. Запропоновано математичний алгоритм для обчислення приведенного моменту на основі сум інтегральних характеристик поля по координатних напрямках. Проведено дослідження для різних розмірів сітки вимірювань, що підтвердив працездатність методу та показав, що похибка реконструкції зменшується зі збільшенням кількості вимірювальних точок. Отримані результати свідчать про можливість надійної ідентифікації об'єкта за обмеженим набором даних магнітного поля.

Наукова новизна. Запропоновано метод відновлення приведенного магнітного моменту, що базується не на локальних значеннях поля, а на інтегральних характеристиках, що забезпечує підвищену стійкість до шуму та зменшення впливу неоднорідностей середовища. Показано ефективність використання дискретно-інтегрального підходу у задачах оберненої магнітометрії.

Практична цінність. Розроблена модель може бути використана у системах виявлення та класифікації феромагнітних об'єктів у підводних, підземних та наземних середовищах, зокрема у завданнях неруйнівного контролю, технічної діагностики та пошуково-рятувальних операцій. Запропонований підхід дозволяє реалізувати малогабаритні вимірювальні системи із зниженими вимогами до точності позиціонування сенсорів.

Ключові слова: магнітний диполь; обернена задача магнітометрії; приведений магнітний момент; інтегральна характеристика поля; чисельний експеримент; ідентифікація об'єктів.

I. ВСТУП

Задача визначення розташування та характеристик джерела магнітного поля на основі результатів вимірювань є важливою й добре відомою науково-

технічною проблемою [1] - [6]. Подібні задачі виникають у найрізноманітніших галузях - від геофізичної розвідки та медичної діагностики (наприклад, магнітоенцефалографія) до військових систем виявлення об'єктів, контролю технічного стану трубопроводів

чи пошуку прихованих пошкоджень у конструкціях. У науковій літературі вони узагальнено відомі як обернені задачі магнітометрії.

Під оберненою задачею магнітометрії розуміють визначення просторового розподілу або параметрів джерел магнітного поля за відомими вимірними значеннями компонентів поля. При цьому функціональні залежності між типом джерела, його просторовим розташуванням та спостережуваними параметрами поля зазвичай невідомі наперед і потребують встановлення. Основна складність полягає в тому, що така задача у загальному випадку є некоректною та неоднозначною: різні конфігурації джерел можуть створювати подібні магнітні сигнали.

Отже, отримати єдиний розв'язок можливо лише за умови введення моделі джерела або використання апріорної інформації, що обмежує множину можливих рішень. Вибір адекватної моделі визначається кількома чинниками: по-перше, співвідношенням між геометричними розмірами області, де розташовані джерела сигналу, та відстанню до датчика вимірювання; по-друге, фізичною природою процесів, що генерують магнітне поле в об'єкті дослідження. Саме правильне врахування цих аспектів дозволяє перейти від абстрактної математичної задачі до практичного алгоритму ідентифікації магнітних об'єктів.

У практиці морської магнітометрії, зокрема під час виявлення підводних аномалій, локалізації субмарин чи діагностики пошкоджень продуктопроводів на значних глибинах, часто застосовують спрощене представлення цільових об'єктів у вигляді точкового магнітного диполя [1] - [3]. Таке наближення є виправданим у випадках, коли відстань від об'єкта до вимірювального обладнання суттєво перевищує його власні геометричні розміри - тоді магнітне поле на поверхні води формується в основному інтегральним ефектом усього об'єкта, а дрібні деталі його структури стають непомітними.

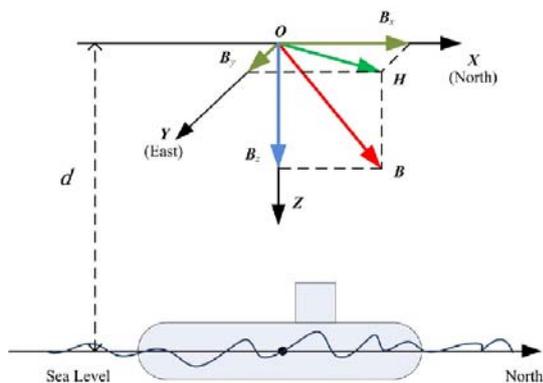


Рисунок 1. Координатна система магнітної аномалії, спричиненої підводним човном

Рис. 1 показує просторовий розподіл магнітної аномалії, спричиненої підводним човном, який моделюється як точковий диполь. Для реєстрації змін магнітно-

го поля використовуються високочутливі тривісні магнітні датчики, що вимірюють компоненти магнітної індукції B_x , B_y , B_z . Найчастіше у морській магнітометрії застосовують флюкстейтні магнітометри або датчики на ефекті Холла, які забезпечують високу роздільну здатність при малих рівнях сигналу. Принцип їх дії базується на реєстрації змін магнітної індукції у трьох ортогональних напрямках, що дозволяє відтворити векторне поле магнітної аномалії.

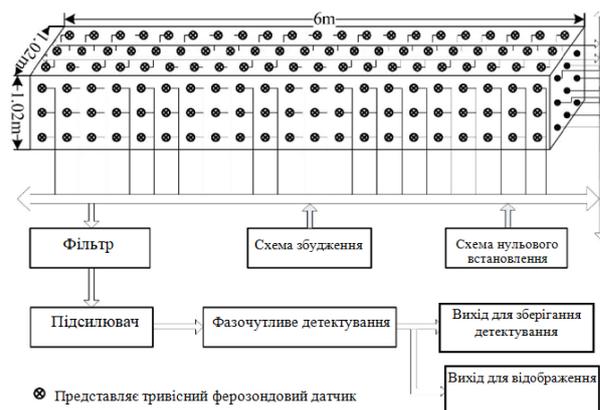


Рисунок 2. Моделювання магнітного поля підводного об'єкта

Рис. 2 демонструє наглядний результат зображення магнітного поля підводного об'єкта, який подано у вигляді точкового магнітного диполя з певним вектором магнітного моменту M . Показано ізолінії магнітної індукції та напрямки векторів B , що характеризують просторовий розподіл поля у навколишньому середовищі. Така модель дає змогу дослідити, як величина та орієнтація M впливають на форму і амплітуду аномалії, а також як змінюється поле на різних відстанях від об'єкта. Вона пояснює фізичну природу сигналів, які реєструють магнітні датчики, розташовані на поверхні води або в підводних буксирних платформах, і є основою для подальшого математичного відновлення параметрів дипольного джерела.

Знімання магнітного поля зазвичай виконується по замкненому контуру або у вигляді просторової сітки на поверхні води. Обмеженість зони вимірювань обумовлює те, що реконструкція джерела поля відбувається за неповними або неповноцінно розподіленими даними, що саме по собі ускладнює розв'язання оберненої задачі магнітометрії.

Додатковим фактором впливу є фізичні властивості середовища, через яке поширюється магнітне поле. У реальних умовах (наявність магнітних домішок у воді, феромагнітних включень у донному ґрунті тощо) магнітна проникність середовища може змінюватися, що призводить до порушення лінійності задачі. У таких випадках некоректним є застосування принципу суперпозиції - базової основи для більшості лінійних методів аналізу магнітних полів.

Важливим також є характер часової зміни поля -

як стаціонарний (постійний магнітний слід об'єкта), так і динамічний (наприклад, при русі судна чи при наявності змінних зовнішніх магнітних впливів). Тип динаміки поля визначає, чи може задача розв'язуватись у квазістатичному припущенні, чи потребує часового аналізу та фільтрації збурень.

У підсумку, хоча модель точкового диполя є корисним спрощенням, застосування її в морській магнітометрії потребує ретельного врахування умов вимірювань, структури середовища та поведінки сигналу, що безпосередньо впливає на точність та однозначність реконструкції джерела.

У даному дослідженні аналізується один із підходів до розробки методу розв'язання оберненої задачі магнітометрії. Передбачається, що для вимірюваного просторового розподілу магнітної індукції об'єкта в площині розташовується набір із N різних дипольних джерел. Робиться припущення, що для кожного диполя існує принаймні одна точка на площині вимірів, у якій магнітне поле диполя збігається із заданим значенням вектора магнітної індукції та всіх його просторових похідних першого порядку. Магнітним аномаліям можуть відповідати більш або менш широкі множини припустимих рішень, які практично є еквівалентними одне одному.

Запропонована технологія розроблялася для випадків, коли апріорна інформація обмежена, а основні дані потрібно отримувати з вимірювань магнітного поля на замкнутому контурі. Крім того, може виникати ситуація, коли вихідна аномалія ускладнена як випадковими, так і систематичними перешкодами.

У алгоритмах локалізації об'єкта за наявності магнітних шумів спочатку необхідно створити умови для виявлення джерела сигналу, а потім визначити та оцінити ймовірність розв'язання оберненої задачі з певною похибкою. Виконання цих завдань залежить від численних факторів, зокрема від співвідношення сигнал/шум, рівня власних шумів вимірювальної апаратури, точності вимірювальної системи та інших параметрів. Дослідження цих аспектів частково викладено у [7].

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У роботі [4] розглядається розв'язання оберненої задачі магнітометрії в умовах сильно обмеженої апріорної інформації. Основні дані отримуються безпосередньо з спостережуваних магнітних аномалій. Зазначені задачі мають невелику розмірність і використовують прості модельні класи та фундаментальні форми для інтерпретації аномалій. Ці моделі забезпечують теоретичну однозначність розв'язку обернених задач завдяки застосуванню алгоритмів автоматизованого підбору. Взаємозв'язок між аномалією та потенційними джерелами встановлюється через цільовий функціонал, який може бути представлений у вигляді карт. Проте одному цільовому функціоналу може відповідати кілька можливих рішень.

Розв'язання оберненої задачі магнітометрії для випадку, коли геологічна модель представлена сукупністю однорідних, горизонтально орієнтованих кругових тіл, наведено у [5]. У цій моделі передбачається, що нульовий пункт вимірювань обрано в умовах нормального магнітного поля, а всі аномальні поля виникають виключно через неоднорідності геологічної будови. Водночас немає обґрунтування вважати, що магнітне поле нульового пункту не піддається впливу інших намагнічених об'єктів. На практиці інтерпретатор самостійно коригує рівень відліку аномального поля. Крім того, результат розв'язання задачі значною мірою залежить від вибору початкового наближення.

У роботах [8] досліджується розв'язання оберненої лінійно-нелінійної задачі магнітометрії. Для вертикальної проекції магнітного поля при вертикальному намагнічуванні гірських порід застосовуються екстремальні ітераційні методи, які забезпечують стійкі розв'язки цих задач. Однак експериментальні дослідження показали, що багато гірських порід мають значне відхилення вектора намагнічення від вертикального напрямку, що є суттєвим недоліком, оскільки спотворює результати розв'язання. Існують роботи, які розглядають застосування даного методу для випадків косоного намагнічення [6], проте вони потребують додаткової обробки даних із застосуванням фільтрів Вінера–Калмана. Такі фільтри мають бути спеціально адаптовані для магнітометрії, щоб забезпечити надійну фільтрацію високоефективних перешкод магнітного поля та отримання стійких і точних рішень обернених задач.

Найбільш близьким до задачі, розглянутої у статті, є підхід, наведений у роботах [2], [3]. Проте в цих задачах аналізується обмежена область, передбачається, що джерело знаходиться саме в цій області, а далі шляхом дослідження точок екстремуму та розв'язання простих лінійних систем алгебраїчних рівнянь визначаються магнітні моменти диполів та їх координати. Основна проблема полягає в тому, що магнітне поле у точках вимірів носить інтегральний характер, і джерело може перебувати поза заздалегідь визначеним об'ємом. Це особливо актуально для задач морської магнітометрії, де урахування нескінченної сітки вимірів неможливе через технічні обмеження обладнання, часові рамки та обмежені можливості математичного моделювання. Тому для практичного розв'язання таких задач необхідні методи, що забезпечують коректну оцінку джерела при обмеженому числі вимірювальних точок та адаптовані до реальних умов морських спостережень.

У математичній моделі, запропонованій у цій роботі, оновлення приведенного магнітного моменту диполя здійснюється на основі інтегральних характеристик магнітного поля. Вихідними даними можуть слугувати, наприклад, вимірювання магнітного поля на поверхні води по замкнутому контуру за допомогою гірлянди датчиків, що фіксують магнітну індукцію. Далі за допомогою моделі визначаються значення

поля всередині контуру, після чого штучно формується і поступово розширюється сітка вимірювальних точок. Такий підхід дозволяє поступово уточнювати розподіл магнітного поля та забезпечує більш точне відтворення характеристик дипольного джерела, як це показано у роботах [9]–[11].

Об'єктом дослідження є зв'язок між інтегральними характеристиками магнітного поля та приведеним магнітним моментом точкового диполя довільно розташованому у просторі. Задача розглядається у лінійній постановці коли інтерпретація об'єкта точковим диполем здійснюється на відстанях у багато разів перевищуючих геометричні розміри об'єкту. Вважаємо що перешкоди у вимірах враховуються методиками, що наведені у [7].

III. МЕТА РОБОТИ

Мета роботи полягає у розробці та дослідженні математичної моделі для відновлення приведенного магнітного моменту точкового диполя на основі інтегральних характеристик магнітного поля, що дозволяє забезпечити коректне розв'язання оберненої задачі магнітометрії в умовах обмеженої апріорної інформації та реальних шумових завод.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГУ МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Вважаємо, що положення магнітного диполя може бути визначене за допомогою вектора магнітної індукції та його просторових похідних у конкретній точці простору (рис. 3).

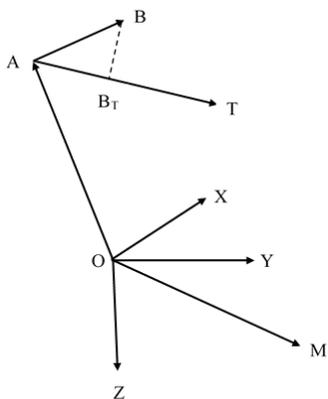


Рисунок 3. Векторне співвідношення вимірних характеристик магнітного дипольного поля

Саме ці величини становлять основу даних, необхідних для розв'язання оберненої задачі магнітометрії. Використання таких характеристик дозволяє більш точно відтворювати положення та магнітні моменти джерела, а також підвищує стійкість алгоритмів до шумів і неоднорідностей вимірювального середовища [1].

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3} \right], \quad (1)$$

де \vec{M} - вектор магнітного моменту диполя; \vec{R} - до точки вимірювання, з модулем R; μ_0 - магнітна константа.

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi R^5} \begin{bmatrix} 3R_x^2 - R^2 & 3R_x R_y & 3R_x R_z \\ 3R_y R_x & 3R_y^2 - R^2 & 3R_y R_z \\ 3R_z R_x & 3R_z R_y & 3R_z^2 - R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де $B(\cdot)$, $R(\cdot)$, $M(\cdot)$ - проекції відповідних векторів на осі декартової системи координат X, Y, Z .

Визначення приведенного магнітного диполя здійснюється на підставі інтегральних характеристик постійного магнітного поля. Розглянемо об'єкт, якій потрібно відшукати, як деякій об'єм V , якій містить N магнітних диполів, у загальному випадку які мають різний магнітний момент \vec{M} та довільно орієнтовані. За базове рівняння у розв'язку задачі, що розглядається візьмемо рівняння та його матричну форму (1), (2). Представимо кожний диполь \vec{M}_i об'єму V , як векторну суму трьох диполів ($\vec{M}_{ix}, \vec{M}_{iy}, \vec{M}_{iz}$), що визначаються в довільно обраній декартової системі координат X, Y, Z . Отже маємо $3N$ кількість диполів в об'ємі V . Поставимо задачу визначення сумарних (приведених) моментів $\left| \sum_{i=1}^N M_{xi} \right|, \left| \sum_{i=1}^N M_{yi} \right|, \left| \sum_{i=1}^N M_{zi} \right|$ на основі ві-

домих значень магнітної індукції $B_x^{x,y,z}, B_y^{x,y,z}, B_z^{x,y,z}$, що отримана на полі датчиків с відомими координатами x_i, y_i, z_i . Верхні індекси відповідають моментам $\sum_{i=1}^N M_{xi}, \sum_{i=1}^N M_{yi}, \sum_{i=1}^N M_{zi}$. Враховуючи, що є три

складові проекції $B_x: B_x^x, B_x^y, B_x^z$ - розглянемо обчислення подвійних інтегралів типу $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^x dx dy$. В цьому

рівнянні B_x^x розраховується як елемент матриці коефіцієнтів у матричному виразі розрахунку моменту диполя (2) у відповідності до складової моменту $\sum_{i=1}^N M_{xi}$, що розглядається як сумарний (приведений). Координати приведення сумарних моментів позначаємо як x_0, y_0, z_0 .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^x dx dy = k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{3R_x^2 - R^2}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x-x_0)^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$$

$$= \frac{2x_0\pi}{\Delta z} k - \frac{2x_0\pi}{\Delta z} k = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^x dx dy = k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{3R_x^2 - R^2}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(x-x_0)^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy =$$

$$= \frac{2y_0\pi}{\Delta z} k - \frac{2y_0\pi}{\Delta z} k = 0$$

де $k = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N M_{xi}$; $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0$.

Для складових від моменту $\sum_{i=1}^N M_{yi}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^y dx dy = 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{R_x R_y}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy +$$

$$+ 3kx_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^y dx dy = 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{R_x R_y}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta y^2 \Delta x}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy +$$

$$+ 3ky_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy = 0$$

де $k = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N M_{yi}$.

Для складових від моменту $\sum_{i=1}^N M_{zi}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^z dx dy = 3k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{R_x R_z}{R^5} dx dy =$$

$$= 3k \Delta z \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy +$$

$$+ 3k \Delta z x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta x}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy = 2k\pi = \frac{\mu_0}{2} \sum_{i=1}^N M_{zi}$$

Отже:

$$\sum_{i=1}^N M_{zi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^z dx dy, \tag{8}$$

Враховуємо рівність коефіцієнтів (2) $B_x^z = B_z^x$ можна записати вираз для моменту $\sum_{i=1}^N M_{zi}$:

$$B_{yi} = M_x \left(\frac{3R_y R_x}{4\pi R^5} \right) + M_y \left(\frac{3R_y^2 - R^2}{4\pi R^5} \right) + M_z \left(\frac{3R_y R_z}{4\pi R^5} \right), \tag{9}$$

Таким чином, рівняння (3)-(9) утворюють основу математичної моделі, яка забезпечує зв'язок між інтегральними характеристиками вимірюваного магнітного поля та компонентами приведенного магнітного моменту точкового диполя. Це створює основу для розв'язання оберненої задачі магнітометрії в умовах обмеженої кількості точок вимірювання.

На основі рівнянь (3)-(9) виконано аналітичні обчислення інтегралів для всіх комбінацій компонент магнітної індукції B_x, B_y, B_z відносно координат x, y, z , для визначення тих складових поля, які вносять суттєвий вклад у формування приведенного магнітного моменту точкового диполя. Результати розрахунків наведено у таблиці 1, що відображає, для яких комбінацій компонент поля інтегральна характеристика дорівнює нулю, а для яких - має ненульове значення. Нульові інтеграли (=0) відповідають симетричним складовим поля, які компенсуються в межах області інтегрування, тоді як ненульові ($\neq 0$) характеризують напрямки, уздовж яких виникає результуючий вплив поля на приведений момент.

Виходячи з результатів розрахунків, проведених за принципом суперпозиції магнітного поля, можна сформулювати рівняння для складових магнітного моменту приведенного диполя (10)-(13).

Таблиця 1. Результати розрахунків

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_x^z dx dy \neq 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y B_x^z dx dy = 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_y^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_y^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x B_y^z dx dy = 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_y^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_y^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_y^z dx dy \neq 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_z^x dx dy \neq 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_z^y dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_z^z dx dy = 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_z^x dx dy = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_z^y dx dy \neq 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_z^z dx dy = 0$

Виходячи з результатів розрахунків, проведених за принципом суперпозиції магнітного поля, можна сформулювати рівняння для складових магнітного моменту приведенного диполя (10)-(13). Це дозволяє описати внесок кожного джерела у загальне магнітне поле та забезпечує основу для точного визначення положення і характеристик диполя в оберненій задачі магнітометрії.

$$\sum_{i=1}^N M_{zi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_x dx dy, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N M_{xi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xB_z dx dy, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^N M_{zi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_y dx dy, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N M_{yi} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yB_z dx dy, \quad (13)$$

Щоб підтвердити коректність побудованої математичної моделі, необхідно виконати чисельний експеримент, який проводиться у два етапи.

На першому етапі розв'язується пряма задача. Обчислюється розподіл магнітної індукції від одиничного диполя у заданій площині. Диполь розташований на відстані п'яти метрів від початку координат і орієнтований вздовж осі OZ. Для спрощення розрахунків приймаємо $\mu_0 = 1$. Однією з основних проблем на цьому етапі є визначення сітки точок у площині, на якій буде обчислюватися магнітна індукція, оскільки це безпосередньо впливає на розмірність розрахункових масивів та обчислювальні ресурси.

Приклад розрахункової сітки представлена на рис. 4 – рис.5. Рис. 4 ілюструє вимірювальний контур S та створений зовнішній контур C, які є основою для постановки та розв'язання задачі машинного розрахунку магнітного поля. Контур S задає вихідну сітку вимірів, на якій фіксується значення магнітної індукції, а контур C позначає розширену границю області, що охоплює контур S для подальшого чисельного поширення розрахунків.

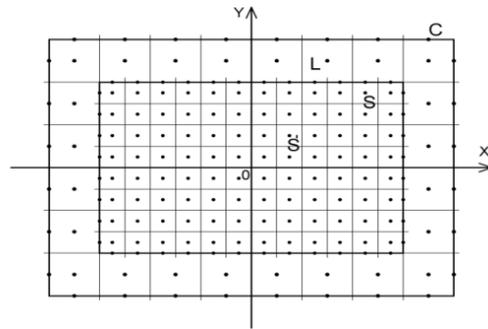


Рисунок 4. Контур виміру S та створений контур C

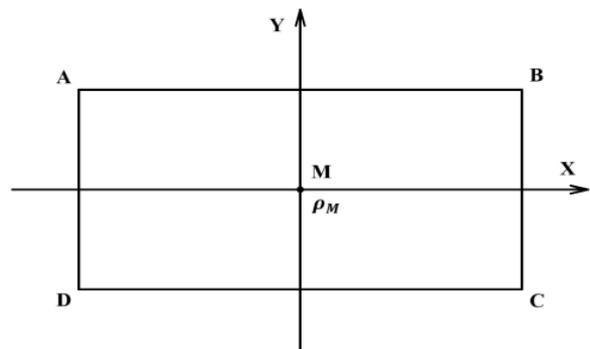


Рисунок 5. Прямокутна комірка сітки

Рис. 5 відображає прямокутну комірку сітки, яка є базовою геометричною одиницею дискретизації для чисельних розрахунків. Комірка характеризується кроками дискретизації за осями ΔX та ΔY , а поверхневий заряд, що бере участь у формуванні магнітного поля, вважається зосередженим у центрі цієї комірки.

На другому етапі здійснюється розв'язок оберненої задачі - поновлення магнітного моменту диполя, який був заданий у прямій задачі. Основна складність полягає у тому, що розрахунок складових моменту ідеально ведеться на нескінченній сітці, реалізувати яку у чисельному експерименті неможливо. Тому перевірка адекватності запропонованої математичної моделі можлива лише через розв'язок цих задач у рамках скінченної сітки.

Магнітну індукцію визначаємо у вигляді проєкцій на осі декартової системи координат: V_x, V_y, V_z .

Цей підхід дозволяє як оцінити просторовий розподіл магнітного поля, так і провести коректне порівняння результатів прямої та оберненої задач, що є ключовим для перевірки точності та стійкості чисельної моделі.

$$B_{xi} = M_x \left(\frac{3R_x^2 - R^2}{4\pi R^5} \right) + M_y \left(\frac{3R_x R_y}{4\pi R^5} \right) + M_z \left(\frac{3R_x R_z}{4\pi R^5} \right), (14)$$

$$B_{yi} = M_x \left(\frac{3R_y R_x}{4\pi R^5} \right) + M_y \left(\frac{3R_y^2 - R^2}{4\pi R^5} \right) + M_z \left(\frac{3R_y R_z}{4\pi R^5} \right), (15)$$

$$B_{zi} = M_x \left(\frac{3R_z R_x}{4\pi R^5} \right) + M_y \left(\frac{3R_z R_y}{4\pi R^5} \right) + M_z \left(\frac{3R_z^2 - R^2}{4\pi R^5} \right), (16)$$

Обчислення індукцій від окремих складових магнітного моменту диполя проводиться шляхом обнулення інших компонент у відповідних виразах. Використання методики, наведеної у [9], дозволяє суттєво зменшити розмірність розрахункових масивів.

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}, (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{xi}}{\partial x} = & M_x \left(\frac{3}{4\pi} \left(\frac{2R_x R^5 - 5R^3 R_x^3}{R^{10}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3RR_x}{R^6} \right) \right) + M_y \left(\frac{3}{4\pi} R_y \left(\frac{R^5 - 5R^3 R_x^2}{R^{10}} \right) \right) + \\ & + M_z \left(\frac{3}{4\pi} R_z \left(\frac{R^5 - 5R^3 R_x^2}{R^{10}} \right) \right) \end{aligned}, (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{yi}}{\partial y} = & M_x \left(\frac{3}{4\pi} R_x \left(\frac{R^5 - 5R^3 R_y^2}{R^{10}} \right) \right) + \\ & + M_y \left(\frac{3}{4\pi} \left(\frac{2R_y R^5 - 5R^3 R_y^3}{R^{10}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3RR_y}{R^6} \right) \right) + M_z \left(\frac{3}{4\pi} R_z \left(\frac{R^5 - 5R^3 R_y^2}{R^{10}} \right) \right) \end{aligned}, (19)$$

Застосуємо до виразу (14) операцію $\partial/\partial x$, а до виразу (15) операцію $\partial/\partial y$. Визначимо поверхневу густину вторинних джерел на відповідних ділянках розрахункової сітки $-\partial B_z/\partial z = \rho$, і потім B_z .

Розрахункова сітка була обрана відповідно до умов, викладених у [11]. Її розміри становлять 6 метрів вздовж осі OX та 4 метри вздовж осі OY . Відновлений магнітний момент одиничного диполя, отриманий на основі магнітної індукції, розподіленої у вузлах цієї сітки згідно з запропонованою математичною моделлю, дає такі результати.

Значення M_z , розраховане за індукцією B_x , склало 0,03 Вб·м, а за індукцією B_y - 0,015 Вб·м. Складові $M_x = -0,14 \cdot 10^{-6}$, $M_y = -0,33 \cdot 10^{-8}$ близькі до машинного нуля і дуже наближені до значень магнітного моменту з прямої задачі. Водночас значення M_z суттєво відрізняється від одиниці і становить лише 2–3% від магнітного моменту у прямій задачі. Така розбіжність пояснюється тим, що формули розрахунку у математичній моделі передбачають інтегрування на нескінченній сітці, що неможливо реалізувати у чисельному експерименті.

Для покращення результатів можна застосувати математичну модель та чисельний експеримент, наведені у [10], та поступово розширити сітку вимірювань на метр уздовж кожної осі у площині, використовуючи лише значення магнітної індукції на вже розрахованій сітці. Після такого розширення отримуємо: M_z за $B_x = 0,075$ Вб·м, M_z за $B_y = 0,046$ Вб·м, що все ще далеко від задовільного результату.

Найбільш адекватні результати досягаються при розширенні сітки розповсюдження магнітної індукції до 200×200 м, як запропоновано у [11]. У цьому випадку M_z , розраховане за B_x , становить 0,93 Вб·м, а за B_y - також 0,93 Вб·м; $M_x = 0,88 \cdot 10^{-3}$, $M_y = -0,74 \cdot 10^{-5}$. Розбіжність від справжнього магнітного моменту диполя складає приблизно 7%, тоді як розбіжність між нульовим значенням і одиницею становить близько тисячі разів.

Результати розрахунку порівнювалися з опублікованими чисельними даними та методиками розширення сітки, наведеними в роботах [9]-[11]. В результаті отриманий результат під час розв'язання оберненої задачі є цілком задовільним. Проте точність розрахунків може бути суттєво підвищена шляхом подальшого розширення сітки вимірів. Наприклад, для сітки розміром 1000×1000 точок похибка розрахунку становить менше 1%. Водночас слід враховувати, що це стосується чисельного експерименту; у натурних вимірах досягти такої точності неможливо. Точність реальних вимірів обмежується не лише причинами, зазначеними у [7], але й чутливістю датчиків.

На практиці рекомендується поширювати сітку вимірів до таких розмірів, коли результати сусідніх розрахунків при подальшому розширенні сітки будуть співрозмірні з похибкою вимірювальної системи. Варто зазначити, що у чисельному експерименті для цього розширення не потрібно розв'язувати пряму задачу заново - достатньо використовувати дані попередніх розрахунків для сітки 4×6 м, згідно з математичною моделлю, наведеною у [10].

Подальший розвиток досліджень передбачає проведення натурного експерименту, у якому прямі виміри магнітного поля на замкнутому контурі можна перевіряти та коригувати за допомогою виразів (14-19) та методики, наведеної у [11]. Використання цієї методики дозволяє доволі розширювати сітку вимірів без безпосереднього вимірювання магнітного поля датчиками. Природно, що результати натурного експерименту будуть відрізнятися від чисельного через ряд факторів: чутливість датчиків, умови проведення експерименту, анізотропію середовища, фізико-хімічні властивості води (якщо експеримент проводиться у басейні) та інші впливи.

У подальших дослідженнях також планується розробка математичної моделі для відновлення координат приведенного магнітного моменту диполя, що дозволить проводити як чисельні, так і натурні експерименти з підвищеною точністю.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

V. ВИСНОВКИ

Проведений аналіз математичних моделей розв'язку обернених задач магнітометрії та дослідження розробленої математичної моделі для відновлення приведенного магнітного моменту точкового диполя з урахуванням інтегральних властивостей магнітного поля дозволяє сформулювати наступні висновки:

1. У випадках, коли відстань до точок вимірювання магнітного поля значно перевищує геометричні розміри об'єкта пошуку, цей об'єкт можна апроксимувати як точковий диполь із приведеним магнітним моментом. Для визначення цього моменту достатньо використовувати значення магнітної індукції, зафіксовані на замкнутому контурі.

2. Для розширення сітки вимірів ефективно застосовується методика, наведена у [10], [11]. Це пояснюється тим, що розроблена математична модель базується на інтегральних характеристиках магнітного поля, які формально визначені на нескінченній сітці.

3. Точність розрахунків безпосередньо залежить від розмірності сітки вимірів. Однак необмежено поширювати сітку немає сенсу: достатньо обмежити її розмір таким чином, щоб результати сусідніх розрахунків при збільшенні сітки були співрозмірні з похибкою вимірювальної системи.

Планується проведення натурального експерименту, який дозволить перевірити розроблену модель та здійснити розв'язок оберненої задачі магнітометрії для поновлення координат приведенного магнітного моменту точкового диполя. Цей етап досліджень є ключовим для практичного підтвердження точності моделі та методики обробки даних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Zaporozhets Y. Mathematical model of detection and identification of underwater ferromagnetic objects / Y. Zaporozhets, V. Krol, D. Shareiko // *Elect. equip. ships: collection scientific papers Mykolaev*. – 1992. – № 2. – С. 82–89.
- [2] Primin M. Algorithms for the analytical solution of the magnetostatics inverse problem for the signal source of the dipole model / M. Primin, I. Nedayvoda // *Cybern syst anal*. – 2023. – № 59. – С. 821–831.
- [3] Прімін М. А. Алгоритм аналітичного вирішення зворотного завдання магнітостатики для джерела поля дипольної моделі / М. А. Прімін, І. В. Недайвода // *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. – 2015. – № 14. – С. 5–15.
- [4] Зейгельман М. С. Обернена задача магніторозвідки: особливості технології пошуку багатоваріантних розв'язків / М. С. Зейгельман, Н. В. Панченко // *Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики*. – 2011. – С. 158–169.
- [5] Direct and inverse magnetometry problems for a set of horizontally located circular cylindrical bodies / E. G. Bulah // *Rep. Nat. Acad. Sci. Ukraine*. – 2019. – № 5. – С. 136–141.
- [6] Екстремальні ітераційні методи у зворотному завданні магнітометрії при косому намагнічуванні / П. А. Міненко // *Доп. НАН України*. – 2007. – № 5. – С. 131–135.
- [7] Primin M. Algorithm for solving the inverse problem of magnetostatics in magnetocardiography: new approaches and results / M. Primin, I. Nedajvoda // *Electron. model*. – 2006. – № 5. – С. 99–116.
- [8] Minenko P. A. On the search for selectively extremal solutions to the inverse problem of magnetometry during studies on the crystalline foundation / P. A. Minenko, R. V. Minenko // *Sci. Visn. Nat. mountain univ*. – 2016. – № 9. – С. 39–44.
- [9] Expansion of measurement grid in field problems / I. Biliuk [та ін.] // *2021 IEEE international conference on modern electrical and energy systems (MEES), Kremenchuk*. – 2021. – С. 1–5.
- [10] Reduction of Numerical Arrays in Magnetometry Problems Calculations / D. Shareyko [та ін.] // *2022 IEEE international conference on modern electrical and energy systems (MEES), Kremenchuk*. – 2022. – С. 1–5.
- [11] Machine Calculation of the Problem of Expansion of the Magnetic Field Measurement Grid / I. Biliuk [та ін.] // *2023 IEEE international conference on modern electrical and energy systems (MEES), Kremenchuk*. – 2023. – С. 1–6.

Надійшла (Received) 02.10.2025;

Прийнята (Accepted) 04.11.2025;

Опублікована (Published) 30.03.2026;

MATHEMATICAL MODEL OF RECOVERY OF THE REDUCED MAGNETIC MOMENT OF A POINT DIPOLE FOR IDENTIFICATION OF FERROMAGNETIC OBJECTS

SHAREYKO D.U.

candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the

- department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6460-9331>, e-mail: dshareyko.mk@gmail.com;
- BILIUK I.S. candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the department of automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1654-7468>, e-mail: ivanbilyuk@gmail.com;
- SAVCHENKO O.V. head of laboratories, department of automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9718-7857>, e-mail: savchenko1984@gmail.com;
- MARZIAVKO V.A. assistant professor, department of electric power, Electrical Engineering and Electromechanics, Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-9215>, e-mail: vitalijmardzavko@gmail.com;
- TODOSIENKO A.M. postgraduate student of the Department of Automation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-3692-4723>, e-mail: atodosienko@gmail.com;

Purpose of the work. The purpose of the work is to develop and study a mathematical model for restoring the reduced magnetic moment of a point dipole based on the integral characteristics of the magnetic field, which allows to ensure the correct solution of the inverse problem of magnetometry in conditions of limited a priori information and real noise interference.

Research methods. The work uses mathematical modeling, analytical methods of inverse magnetometry, integral transformations and a numerical experiment to assess the accuracy of restoring the magnetic moment components. To construct the calculated dependencies, the field discretization on a rectangular grid of measuring points and algorithms for minimizing the reconstruction error were used.

Results. A generalized model of the relationship between the measured components of magnetic induction and the components of the magnetic moment vector of the dipole was constructed. A mathematical algorithm for calculating the reduced moment based on the sums of the integral characteristics of the field in the coordinate directions was proposed. A study was conducted for different sizes of the measurement grid, which confirmed the efficiency of the method and showed that the reconstruction error decreases with an increase in the number of measurement points. The results obtained indicate the possibility of reliable identification of the object from a limited set of magnetic field data.

Scientific novelty. A method for restoring the reduced magnetic moment is proposed, which is based not on local field values, but on integral characteristics, which provides increased noise resistance and reduces the influence of medium inhomogeneities. The effectiveness of using the discrete-integral approach in inverse magnetometry problems is shown.

Practical value. The developed model can be used in systems for detecting and classifying ferromagnetic objects in underwater, underground and terrestrial environments, in particular in tasks of non-destructive testing, technical diagnostics and search and rescue operations. The proposed approach allows the implementation of small-sized measuring systems with reduced requirements for the accuracy of sensor positioning.

Keywords: magnetic dipole; inverse magnetometry problem; reduced magnetic moment; integral field characteristic; numerical experiment; object identification.

REFERENCES

- [1] Zaporozhets, Y., Krol, V., & Shareiko, D. (1992). Mathematical model of detection and identification of underwater ferromagnetic objects. *Electrical equipment of ships: Collection of scientific papers*, (2), 82–89. Mykolaiv.
- [2] Primin, M., & Nedayvoda, I. (2023). Algorithms for the analytical solution of the magnetostatics inverse problem for the signal source of the dipole model. *Cybernetics and Systems Analysis*, 59(6), 821–831.
- [3] Primin, M. A., & Nedayvoda, I. V. (2015). Algorithm for the analytical solution of the inverse problem of magnetostatics for a dipole model field source. *Computer Tools, Networks and Systems*, (14), 5–15.
- [4] Zeigelman, M. S., & Panchenko, N. V. (2011). Inverse problem of magnetoprospecting: Features of the technology for searching multi-variant solutions. *Theoretical and Applied Aspects of Geoinformatics*, 158–169.
- [5] Bulah, E. G. (2019). Direct and inverse magnetometry problems for a set of horizontally located circular cylindrical bodies. *Reports of the National Academy*

- of Sciences of Ukraine*, (5), 136–141.
- [6] Minenko, P. A. (2007). Extremal iterative methods in the inverse problem of magnetometry under oblique magnetization. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (5), 131–135.
- [7] Primin, M., & Nedajvoda, I. (2006). Algorithm for solving the inverse problem of magnetostatics in magnetocardiography: New approaches and results. *Electronics and Modelling*, (5), 99–116.
- [8] Minenko, P. A., & Minenko, R. V. (2016). On the search for selectively extremal solutions to the inverse problem of magnetometry during studies on the crystalline foundation. *Scientific Bulletin of the National Mining University*, (9), 39–44.
- [9] Biliuk, I., et al. (2021). Expansion of measurement grid in field problems. In *2021 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)* (pp. 1–5). Kremenchuk. IEEE.
- [10] Shareyko, D., et al. (2022). Reduction of numerical arrays in magnetometry problems calculations. In *2022 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)* (pp. 1–5). Kremenchuk. IEEE.
- [11] Biliuk, I., et al. (2023). Machine calculation of the problem of expansion of the magnetic field measurement grid. In *2023 IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)* (pp. 1–6). Kremenchuk. IEEE.

УДК 621.313.3

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕННЯ КОВЗАННЯ ПРИ МІНІМІЗАЦІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ ВТРАТ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА

ШИЛКОВА Л.В.

PhD, доцент, доцент кафедри електромеханічних систем автоматизації Донбаської державної машинобудівної академії, Краматорськ, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0009-3502>, e-mail: larisa.shylkova@gmail.com;

МИХАЙЛИЧЕНКО О.С.

аспірант кафедри електричних машин Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-0660-0441>, e-mail: Oleksii.Mykhailychenko@ieec.khpi.edu.ua;

Мета роботи. Метою роботи є проведення теоретичних досліджень та розробка методики визначення оптимального значення робочого ковзання при мінімізації електричних втрат в умовах зміни навантаження на валу ротора асинхронного двигуна.

Методи дослідження. Для дослідження були застосовані основи теорії математичного моделювання узагальненої електричної машини змінного струму, класичні методи оптимізації, основи теорії автоматизованого керування, методи пошуку мінімізації втрат в асинхронному електроприводі, методи інтерполяції та апроксимації розрахункових даних.

Отримані результати. Розроблено методику визначення оптимального значення робочого ковзання при мінімізації електричних втрат в умовах зміни навантаження на валу ротора асинхронного двигуна в квазіусталеному режимі роботи. Отримано універсальну цільову функцію мінімізації електричних втрат в асинхронному двигуні залежно від частоти ковзання. У ході вирішення задачі оптимізації за допомогою класичних методів оптимізації від однієї змінної, отримано вираз оптимальної частоти ковзання, а також співвідношення між величинами струмів та параметрами фаз обмоток статора та ротора асинхронного двигуна, які одержані на основі загальноприйнятого математичного опису узагальненої електричної машини змінного струму для усталеного режиму його роботи. Доведено працездатність запропонованої методики на прикладі АД типу АИР225М2 потужністю 55кВт, для якого отримано залежність електричних втрат в квазіусталеному режимі роботи при статичному навантаженні $M_c = 0,5M_n$. Встановлено, що оптимальне значення ковзання АД буде дорівнювати $s = 0,038$.

Наукова новизна. Для асинхронних двигунів для різних значень потужності, отримано універсальну цільову функцію мінімізації електричних втрат в обмотках асинхронного двигуна залежно від частоти ковзання, яка дозволить визначити робочу характеристику, яка відображає залежність максимально допустимого ККД від значення моменту опору на валу асинхронних двигунів будь-якої потужності.

Практична цінність. Результати роботи можуть бути використані для систем асинхронного електроприводу з датчиками швидкості обертання ротора з метою автоматизованої саморегуляції швидкості обертання ротора асинхронного двигуна під оптимальне значення ковзання у всьому діапазоні зміни навантаження робочого механізму.

Ключові слова: асинхронний двигун, електричні втрати, мінімізація, ковзання, усталений режим роботи, енергоефективність.

I. ВСТУП

В умовах сучасного глобального енергоспоживання та посилення екологічних стандартів питання енергозбереження виходять на перший план у промисловій політиці провідних країн світу. Згідно з даними Міжнародного енергетичного агентства (МЕА), на частку електроприводів припадає понад 40% загального світового споживання електроенергії, а в промисловому секторі цей показник сягає 70% [1]. Основу цього парку складають системи змінного струму з асинхронними двигунами (АД) із короткозамкненим

ротором. Завдяки своїй надійності, відносній дешевизні та простоті конструкції, вони знаходять застосування у всіх сферах - від систем вентиляції до важкого машинобудування [2]. Однак, незважаючи на високу ефективність АД у номінальних режимах, їхня робота у складі регульованих електроприводів часто супроводжується значними втратами [2].

Незважаючи на високу ефективність сучасних АД класів IE3 та IE4, реальні показники енергоспоживання у системах електроприводу часто залишаються субоптимальними. Це пов'язано з тим, що значна частина обладнання експлуатується в режимах

©Шилкова Л.В., Михайличенко О.С., 2026

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (CC-BY-SA 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2026-1-5>

змінного навантаження або за підвищеної встановленої потужності. Робота асинхронного двигуна при часткових навантаженнях (нижче 50-60% від номінальної) супроводжується різким зниженням ККД та коефіцієнта потужності $\cos\phi$ [3].

Існуючі методи керування, такі як скалярне та класичне векторне, орієнтовані переважно на забезпечення динамічних характеристик та точності підтримки швидкості (ковзання) [4]. Однак у них завжди закладено алгоритми мінімізації втрат у часі. Працюючи зі змінним моментом навантаження традиційні стратегії підтримують магнітний потік на номінальному рівні, що веде до невиправдано високих втрат у сталі та зниження загальної ефективності електромеханічної системи при малих навантаженнях [5].

У зв'язку з цим є необхідність пошуку балансу між динамічною точністю, а саме визначення оптимального значення робочого ковзання в умовах змінного навантаження та енергетичною ефективністю (мінімізації втрат в АД). Тому актуальним завданням є проведення теоретичного досліджень і розроблення методики визначення оптимальних значень робочого ковзання при мінімізації втрат в АД, що дозволить в системах електроприводу за допомогою датчиків швидкості обертання ротора виробляти саморегуляцію швидкості обертання ротора АД під оптимальне значення ковзання у всьому діапазоні зміни навантаження.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Проблема мінімізації сумарних втрат в електромеханічних перетворювачах змінного струму залишається однією з найбільш інтенсивно досліджуваних областей силової електроніки та автоматизованого керування. Останні дослідження авторів наукових праць фокусують увагу не тільки на вдосконаленні конструкції електричних двигунів для досягнення класу енергоефективності IE4 і IE5, але і на розробці інтелектуальних алгоритмів керування, здатних адаптуватися до умов експлуатації, що змінюються в режимі реального часу.

Аналіз існуючих публікацій дозволяє класифікувати підходи до енергозбереження на три основні групи.

До першої групи належать модельно-орієнтовані методи. Дослідження в роботах [6] та [7], спрямовані на уточнення математичних моделей асинхронного двигуна (АД) шляхом включення в них нелінійних залежностей втрат у сталі від частоти та насичення магнітопроводу. У разі запропонований алгоритм аналітично знаходить оптимальне значення потокозчеплення, і навіть оптимальне значення функції мінімізації втрат. Як зазначають автори, до гідності даного методу можна віднести високу швидкодію та відсутність коливань електромагнітного моменту, що є критичним для прецизійних систем. Недоліком такого методу є висока чутливість до точності ідентифі-

кації параметрів (особливо активних опорів статора і ротора АД), значення яких можуть змінюватися при нагріванні. Як зазначається в [8], помилка визначення параметрів на 20% може нівелювати весь ефект від оптимізації.

До другої групи належать пошукові методи. У роботах [8] та [9] запропоновано альтернативний підхід, який передбачає ітераційний пошук мінімуму вхідної потужності електроприводу змінного струму із застосуванням АД. У сучасних реалізаціях часто використовують алгоритми пошуку екстремуму. Перевагою даного методу є інваріантність до параметрів АД. Метод ефективно працює навіть за умов старіння ізоляції чи зміни умов охолодження. До недоліку можна віднести низьку збіжність та появу «гойкань» поблизу точки оптимуму. У роботі [8] запропоновано вирішення цієї проблеми через використання гібридних систем, де пошуковий алгоритм працює лише в режимах, що встановилися.

До третьої групи належать методи MPC (Model Predictive Control) та методи на основі використання штучного інтелекту. У публікації [10] авторами продемонстровано, що використання MPC дає змогу знизити сумарні втрати на 7–12% у перехідних режимах порівняно з класичним векторним управлінням ЕМС.

У роботах [11] та [12] авторами проведено аналіз сумарних втрат у системі частотного перетворювача – асинхронного двигуна, а також особливості впливу різних стратегій модуляції на додаткові втрати в сталі та електричні втрати. Автори відзначають, що перехід від стандартної синусоїдальної ШІМ (SPWM) до просторово-векторної модуляції (SVPWM) дозволяє не тільки збільшити коефіцієнт використання напруги ланки постійного струму, а й знизити коефіцієнт гармонік струму (THD), що безпосередньо корелює зі зменшенням високочастотних втрат у магнітопроводі АД. У публікації [11] запропоновано алгоритм адаптивної частоти комутації, який знижує динамічні втрати у ключах інвертора під час роботи на низьких швидкостях.

Сучасний тренд на спрощення апаратної частини ЕМС на базі АД веде до відмови від датчиків швидкості та положення ротора. Однак, як показано в [9], [12] відсутність точної інформації про швидкість може призводити до помилок у розрахунку ковзання і, як наслідок, до роботи поза зоною оптимального ККД. Для вирішення цієї проблеми у роботах [13] - [15] пропонуються системи спостереження над станом, які інтегрують алгоритми мінімізації втрат безпосередньо до структури оцінки магнітного потоку статора АД.

У [16] авторами запропоновано розширену модель втрат потужності в АД. Вона включає визначення електричних та магнітних втрат у статорі та роторі, а також дозволяє враховувати додаткові механічні втрати у динамічних режимах роботи. Така модель містить рівняння зі змінним до 8-го ступеня щодо

енергетично оптимального значення магнітного потоку ротора асинхронної машини. Авторами запропоновано методику за спрощеним способом визначення змінних, що входять до основного рівняння функції відгуку сумарних втрат в ЕМС. Як заявляють автори, даний спосіб призначений для практичного застосування в енергозберігаючих ЕМС. Однак даний аналітичний метод показує прийнятну точність результатів лише у певному діапазоні значень потокозчеплення ротора. В іншому випадку доводиться використовувати чисельні методи вирішення задачі мінімізації втрат.

Отже, розглянуті існуючі методи мінімізації втрат потужності неможливо визначити оптимальне значення ковзання у всьому діапазоні зміни навантаження на валу АД. Тому актуальним завданням є проведення теоретичного досліджень і розроблення методики визначення оптимальних значень робочого ковзання при мінімізації втрат в АД, що дозволить в системах електроприводу за допомогою датчиків швидкості обертання ротора виробляти саморегуляцію швидкості обертання ротора АД під оптимальне значення ковзання у всьому діапазоні зміни навантаження.

III. МЕТА РОБОТИ

Метою роботи є проведення теоретичних досліджень та розробка методики визначення оптимального значення робочого ковзання при мінімізації втрат потужності в умовах зміни навантаження на валу ротора асинхронного двигуна.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГУ МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Для формулювання завдання оптимізації з метою мінімізації втрат потужності в умовах зміни навантаження на валу ротора, запишемо загальноприйнятну математичну модель АД із короткозамкненим ротором згідно зі схемою заміщення з припущенням про відсутність насичення магнітної системи АД. Система рівнянь балансу напруги в системі координат $d-q$ для узагальненої електричної машини на основі АД з короткозамкненим ротором для квазістаціонарного режиму його роботи мають вигляд:

$$\begin{cases} u_{1d} = R_1 \cdot i_{1d} - \omega_1 \cdot (L_1 \cdot i_{1q} + M_m \cdot i_{2q}); \\ u_{1q} = R_1 \cdot i_{1q} + \omega_1 \cdot (L_1 \cdot i_{1d} + M_m \cdot i_{2d}); \\ 0 = R_2 \cdot i_{2d} - \omega_2 \cdot (L_2 \cdot i_{2q} + M_m \cdot i_{1q}); \\ 0 = R_2 \cdot i_{2q} + \omega_2 \cdot (L_2 \cdot i_{2d} + M_m \cdot i_{1d}); \end{cases} \quad (1)$$

де u_{1d} , u_{1q} – напруга фаз обмотки статора АД; i_{1d} , i_{1q} , i_{2d} , i_{2q} – відповідно струми фаз обмоток статора та струми фаз обмоток ротора АД; R_1 , R_2 – відповідно активні опори обмоток статора та ротора АД; L_1 , L_2 – відповідно індуктивності фаз обмоток статора та ротора АД; M_m – взаємна індуктивність між фазами

обмоток статора та ротора АД; ω_1 – частота обертання системи координат $d-q$. ω_2 – частота ковзання ($\omega_2 = \omega_1 - \omega$), ω – частота обертання ротора АД.

Електромагнітний момент визначається виразом:

$$M_{em} = p_1 \cdot M_m \cdot (i_{2d} \cdot i_{1q} - i_{1d} \cdot i_{2q}) \quad (2)$$

де p_1 – кількість пар полюсів обмотки статора АД;

Припустимо, що напруги фаз обмотки статора не перевищують допустимих значень. Отже, систему рівнянь (1) узагальненої електричної машини на основі АД з короткозамкненим ротором для квазістаціонарного режиму при оптимізації можна не враховувати. Тоді система рівнянь (1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} 0 = R_2 \cdot i_{2d} - \omega_2 \cdot (L_2 \cdot i_{2q} + M_m \cdot i_{1q}); \\ 0 = R_2 \cdot i_{2q} + \omega_2 \cdot (L_2 \cdot i_{2d} + M_m \cdot i_{1d}). \end{cases} \quad (3)$$

При цьому значення електромагнітного моменту, що визначається виразом (2), буде відповідати своєму оптимальному значенню:

$$M_{em}|^{opt} = p_1 \cdot M_m \cdot (i_{2d} \cdot i_{1q} - i_{1d} \cdot i_{2q}) \quad (4)$$

Така задача оптимізації буде вирішуватись при зафіксованих значеннях кутової швидкості обертання ротора $\omega = \text{const}$. У цьому випадку кутову швидкість системи координат $d-q$, можна визначити за наступним співвідношенням:

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega \quad (5)$$

Таким чином можна записати умову оптимізації за мінімізацією втрат потужності АД, яка потребує попереднього визначення струмів обмотки статора та ротора в системі координат $d-q$, тобто i_{1d} , i_{1q} , i_{2d} , i_{2q} . Отже функція критерію оптимізації буде мати наступний вигляд:

$$\min(\Delta P|_{\omega_2=\text{const}}) = R_1 \cdot (i_{1d}^2 + i_{1q}^2) + R_2 \cdot (i_{2d}^2 + i_{2q}^2) \quad (6)$$

Враховуючи критерій оптимізації за (6) можна сформулювати наступну задачу оптимізації при заданих значеннях ω та $M_{em}|^{opt}$ та відповідно до них попередньо відомих значеннях струмів i_{1d} , i_{1q} , i_{2d} , i_{2q} статора та ротора АД, а також кутової частоти ковзання ω_2 . Така задача оптимізації буде мати вигляд відповідно системи рівнянь обмежувальних функцій:

$$\begin{cases} F_1 = \left\{ p_1 \cdot M_m \cdot (i_{1q} \cdot i_{2d} - i_{1d} \cdot i_{2q}) - M_{em} \right\}^{opt} \rightarrow 0; \\ F_2 = \left\{ R_1 \cdot i_{1q} + \omega_1 \cdot (L_1 \cdot i_{1d} + M_m \cdot i_{2d}) \right\} \rightarrow 0 \\ F_3 = \left\{ R_2 \cdot i_{2d} - \omega_2 \cdot (L_2 \cdot i_{2q} + M_m \cdot i_{1q}) \right\} \rightarrow 0 \\ F_4 = \left\{ \omega_1 - \omega - \omega_2 \right\} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (7)$$

Від формулювання постановки задачі оптимізації за (7) можна перейти до рішення задачі оптимальної зміни кутової частоти ковзання ω_2 , яка може бути представлена функцією від кутової частоти обертання ротора АД ω з врахуванням умови критерію мінімізації потужності електричних втрат (6) в обмотках статора та ротора при заданому значенні електромагнітного моменту M_{em}^{opt} . Для цього скористаємося визначеною системою рівнянь (3) та рівняннями (4) та (5).

В цьому випадку приймемо умову, що вектор струму статора буде мати напрям уздовж осі d , тобто:

$$\begin{cases} i_{1d} = I_{1m}; \\ i_{1q} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

де I_{1m} – амплітудне значення струму статора АД;

Відповідно до (8), рівняння (2) та систему рівнянь (3) можна представити наступним чином:

$$\begin{cases} 0 = R_2 \cdot i_{2d} - \omega_2 \cdot L_2 \cdot i_{2q}; \\ 0 = R_2 \cdot i_{2q} + \omega_2 \cdot (L_2 \cdot i_{2d} + M_m \cdot I_{1m}); \\ M_{em} = -p_1 \cdot M_m \cdot I_{1m} \cdot i_{2q} \end{cases} \quad (9)$$

З рівняння (9) можна визначити струми ротора АД, тобто i_{2d} та i_{2q} :

$$i_{2d} = -\frac{\omega_2^2 \cdot L_2 \cdot M_m}{R_2^2 + \omega_2^2 \cdot L_2^2} \cdot I_{1m}, \quad (10)$$

$$i_{2q} = -\frac{\omega_2 \cdot R_2 \cdot M_m}{R_2^2 + \omega_2^2 \cdot L_2^2} \cdot I_{1m}. \quad (11)$$

У такому випадку величина вектору струму ротора може бути визначена з наступного співвідношення:

$$I_{2m} = \sqrt{i_{2d}^2 + i_{2q}^2} = \frac{\omega_2 \cdot M_m}{\sqrt{R_2^2 + \omega_2^2 \cdot L_2^2}} \cdot I_{1m} \quad (12)$$

Електричні втрати в АД можна визначити за допомогою наступного співвідношення:

$$\begin{aligned} \Delta P &= R_1 \cdot (i_{1d}^2 + i_{1q}^2) + R_2 \cdot (i_{2d}^2 + i_{2q}^2) = \\ &= R_1 \cdot I_{1m}^2 + R_2 \cdot I_{2m}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Рівняння (13) з врахуванням (12) можна записати у наступному вигляді:

$$\Delta P = R_1 \cdot I_{1m}^2 + R_2 \cdot \frac{\omega_2^2 \cdot M_m^2}{R_2^2 + \omega_2^2 \cdot L_2^2} \cdot I_{1m}^2 \quad (14)$$

Електромагнітний момент для системи рівнянь (9) з врахуванням (10) та (11) можна визначити за допомогою наступного співвідношення:

$$M_{em} = \frac{p_1 \cdot M_m^2 \cdot I_{1m}^2 \cdot R_2 \cdot \omega_2}{R_2^2 + \omega_2^2 \cdot L_2^2} \quad (15)$$

З рівнянь (14) та (15) видно, що потужність втрат та електромагнітний момент залежать від кутової частоти ковзання ω_2 . Таким чином, можна представити питому потужність втрат в якості цільової функції, яка представляє собою критерій оптимальності:

$$\begin{aligned} \min \left(\frac{\Delta P}{M_{em}} \Big|_{\omega_2 = const} \right) &= \frac{R_1 \cdot R_2^2}{\omega_2} + \dots \\ \dots + \frac{R_1 \cdot \omega_2^2 \cdot L_2^2 + R_2 \cdot \omega_2^2 \cdot M_m^2}{\omega_2} \end{aligned} \quad (16)$$

Мінімізація цільової функції (16) буде виконуватись при умові, якщо похідна від цільової функції буде дорівнювати нулю, тобто:

$$\frac{d \left(\frac{\Delta P}{M_{em}} \Big|_{\omega_2 = const} \right)}{d\omega_2} = 0 \quad (17)$$

Таким чином можна отримати рівняння щодо визначення оптимального значення частоти ковзання:

$$\omega_2^{opt} = \sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2^2}{R_1 \cdot L_2^2 + R_2 \cdot M_m^2}}. \quad (18)$$

Аналіз виразу (19) показує, що оптимальна частота ковзання не залежить від необхідного моменту на валу, а також від частоти обертання ω , тобто буде мати постійне значення. У такому випадку струми i_{1d} , i_{1q} , i_{2d} , i_{2q} статора та ротора АД теж будуть мати постійне значення. Крім того, відповідно до системи рівнянь (1) можуть бути визначені напруги фаз обмотки статора u_{1d} та u_{1q} .

При заданому значенні електромагнітного моменту M_{em}^{opt} відповідно до (16) можемо визначити величину модуля вектору струму:

$$I_{1m} = \sqrt{\frac{R_2^2 + (\omega_2^{opt})^2 \cdot L_2^2}{p_1 \cdot M_m^2 \cdot R_2 \cdot (\omega_2^{opt})^2}} \cdot M_{em}^{opt} \quad (19)$$

Використовуючи рівняння (18) та (12), можна отримати наступне співвідношення між модулем векторів струмів та опором фаз обмоток статора та ротора узагальненої електричної машини на основі АД:

$$\frac{I_{1m}}{I_{2m}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1} + 2 \cdot \frac{L_2^2}{M_m^2}}. \quad (20)$$

Рівняння (20) містить співвідношення струмів обмоток статора і ротора узагальненої електричної машини. Окремо ці струми можна визначити з наступного співвідношення:

$$I_{1m} = \frac{2}{3} \sqrt{i_{1d}^2 + i_{1q}^2}, \quad (21)$$

$$I_{2m} = \frac{2}{3} \sqrt{i_{2d}^2 + i_{2q}^2}, \quad (22)$$

За наведеною методикою та за допомогою [13]-[16] у програмному середовищі MatLAB створено скрипт розрахунку задачі оптимізації втрат потужності для АД. На рис. 1 наведені результати розрахунку оптимального значення ковзання АД типу АИР225М2 потужністю 55 кВт при статичному навантаженні $M = 0.5M_n$.

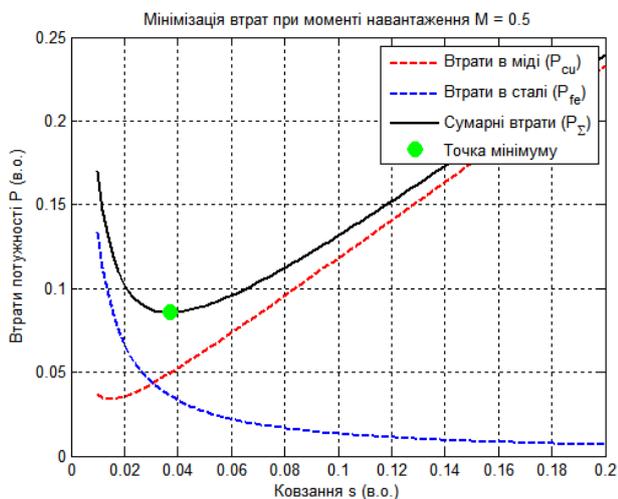


Рисунок 1. Результати розрахунку оптимального значення ковзання АД типу АИР225М2 потужністю 55 кВт

Таким чином, для постановки та вирішення задачі оптимізації потужності електричних втрат АД залежно від частоти ковзання доцільно використовувати математичний опис узагальненої електричної машини в усталеному режимі його роботи. Критеріями оптимізації можуть бути потужність електричних втрат (або питома потужність електричних втрат) АД. У ході вирішення задачі оптимізації за допомогою класичних методів, отримано вираз оптимальної частоти ковзання, а також співвідношення між величинами струмів та параметрами фаз обмоток статора та

ротора АД, які одержані на основі загальноприйнятого математичного опису узагальненої електричної машини змінного струму для усталеного режиму його роботи.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

V. ВИСНОВКИ

За результатами теоретичних досліджень була розроблена методика визначення оптимального значення робочого ковзання при мінімізації втрат потужності в умовах зміни навантаження на валу ротора АД в квазіусталеному режимі роботи. Дана методика дозволяє визначити робочу характеристику, що відображає залежність максимально допустимого ККД від значення моменту опору асинхронних двигунів будь-якої потужності та конструктивного виконання.

Для асинхронних двигунів для різних значень потужності отримана універсальна цільова функція мінімізації потужності електричних втрат асинхронного двигуна залежно від частоти ковзання. Критеріями оптимізації можуть бути потужність електричних втрат (або питома потужність електричних втрат) в обмотках статора та ротора АД. У ході вирішення задачі оптимізації за допомогою класичних методів, отримано вираз оптимальної частоти ковзання, а також співвідношення між величинами струмів та параметрами фаз обмоток статора та ротора асинхронного двигуна, які одержані на основі загальноприйнятого математичного опису узагальненої електричної машини змінного струму для усталеного режиму його роботи.

На прикладі АД типу АИР225М2 потужністю 55 кВт отримано залежність потужності втрат в квазіусталеному режимі роботи при статичному навантаженні $M = 0.5M_n$. Визначено оптимальне значення ковзання АД, яке дорівнює $s=0,038$.

Отримані результати роботи можуть бути використані для систем асинхронного електроприводу з датчиками швидкості обертання ротора, з метою автоматизованої саморегуляції швидкості обертання ротора АД під оптимальне значення ковзання у всьому діапазоні зміни навантаження робочого механізму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Pitis C. D. Power savings obtained from supply voltage variation on squirrel cage induction motors / C. D. Pitis, M. W. Zeller // 2008 IEEE Canada Electric Power Conference, Vancouver, BC, Canada, 2008, pp. 1-3, doi: 10.1109/EPC.2008.4763392 DOI:10.1109/EPC.2008.4763392.
- [2] Hanić Temelkovski Z. Investigation of Power Losses in Three-phase Induction Motor Taking into Consideration the Harmonics / Temelkovski, Z. Hanić and G. Rafajlovski // 2025 International Conference on Electrical Drives and Power Electronics (EDPE), Dubrovnik, Croatia, 2025, pp. 1-5, doi:

- 10.1109/EDPE66853.2025.11224245
- [3] Inoue K. A design methodology of an optimal torque minimizing energy loss under torque limit for an induction motor / K. Inoue, M. Minamiyama and T. Kato // 2009 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, San Jose, CA, USA, 2009, pp. 163-167, doi: 10.1109/ECCE.2009.5316081.
- [4] Sree P. B. Efficiency Improvement of Electrical Vehicles Using Novel Permanent Magnet Motors and Compared with BLDC Motors by Reducing Power Loss / P. B. Sree and N. P. G. Bhavani // 2023 6th International Conference on Contemporary Computing and Informatics (IC3I), Gautam Buddha Nagar, India, 2023, pp. 2534-2538, doi: 10.1109/IC3I59117.2023.10397721.
- [5] Bazzi A. M. A survey of real-time power-loss minimizers for induction motors / A. M. Bazzi, P. T. Krein // 2009 IEEE Electric Ship Technologies Symposium, Baltimore, MD, USA, 2009, pp. 98-106, doi: 10.1109/ESTS.2009.4906500.
- [6] Zhang, L. Computationally Efficient and Loss-Minimizing Model Predictive Control for Induction Motors in Electric Vehicle Applications / L. Zhang, Y. Wang, // IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2025 - Vol. 72, Issue 3, pp. 2440-2451. doi: <https://doi.org/10.3390/en18061444>
- [7] Petrov, I. Refined Research and Optimization of Energy Modes of a Frequency-Regulated Induction Motor with Variable Load / I. Petrov // Proceedings of the 2024 International Conference on Industrial Engineering and Applications (ICIEA), 2024 -pp. 112-118.
- [8] Chen, X., & Gupta, S. A Hybrid Search Efficiency Optimization Strategy for Induction Motor Drives Based on Improved Fuzzy-Golden Section Algorithm / X. Chen, S. Gupta // IEEE Access, 2024 - Vol. 12, pp. 45890-45902.
- [9] Silva, J. M. Comparison between predictive and scalar control strategies for minimizing losses in induction motors under dynamic load conditions / J. M Silva // Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 2025 - Vol. 36, No. 1, pp. 88-101. Doi:10.1080/21642583.2025.2481942
- [10] Kumar R. Sensitivity Analysis of Loss-Minimization Algorithms to Parameter Variations in High-Performance AC Drives / R. Kumar, B. Singh // IEEE Transactions on Industry Applications, 2013 - Vol. 59, Issue 4, pp. 4120-4130. doi:10.1109/IECON.2013.6699982.
- [11] Muller, H. Energy optimization of induction motor in transient state under field-oriented control: A non-intrusive approach / H. Muller // Journal of Renewable and Sustainable Energy, 2024 - 16(2), 024501. doi:10.1109/ISPA59904.2024.10536747.
- [12] Liu, H., & Zhao, T. (2006). "Impact of Advanced PWM Strategies on Harmonic Iron Losses in High-Speed Induction Motor Drives / H. Liu, T. Zhao, // IEEE Transactions on Power Electronics, 2025 - Vol. 40, Issue 2, pp. 1540-1555. doi:10.1109/IAS.2006.256619.
- [13] Marek, J. Efficiency Optimization of VFD-Fed Induction Motors through Adaptive Switching Frequency Control / J. Marek, P. Novak // Energies, 2024 - 17(4), 932.
- [14] Abed, K., Intelligent fuzzy back-stepping observer design based induction motor robust nonlinear sensorless control / K. Abed, H. K. E. Zine, // Electrical Engineering & Electromechanics, - 2024, No.2, pp. 10-15. doi: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2024.2.02>.
- [15] Wang, Q. Energy-Efficient Vector Control of Induction Motor Without Speed Sensor Based on Deep Reinforcement Learning / Q. Wang, X. Li // IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics, - 2025 - Vol. 13, Issue 1, pp. 210-222.
- [16] Sakthivel V. P. Using MPSO algorithm to optimize three-phase squirrel cage induction motor design / V. P. Sakthivel S. Subramanian // 2011 International Conference on Emerging Trends in Electrical and Computer Technology, Nagercoil, India, - 2011 -, pp. 261-267, doi: 10.1109/ICETECT.2011.5760126.

Надійшла (Received) 12.01.2026;

Прийнята (Accepted) 16.02.2026;

Опублікована (Published) 30.03.2026;

DETERMINATION OF THE OPTIMAL SLIP VALUE FOR MINIMIZING ELECTRICAL LOSSES IN AN INDUCTION MOTOR

SHYMKOVA L.V.

Ph.D, Associate professor, Associate professor of the Department of Electromechanical Automation Systems of the Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0009-3502>, e-mail: larisa.shylkova@gmail.com;

MYKHAILYCHENKO O.S.

PhD student at the Department of Electrical Machines, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-0660-0441>, e-mail: Oleksii.Mykhailychenko@iecc.khpi.edu.ua;

Purpose. The aim of the work is to conduct theoretical research and develop a methodology for determining the optimal operating slip value to minimize electrical losses under varying load conditions on the induction motor rotor shaft.

Methodology. The research was conducted using the fundamentals of mathematical modeling theory for a generalized AC electrical machine, classical optimization methods, the basics of automated control theory, loss minimization techniques in induction motor drives, and methods for the interpolation and approximation of calculated data.

Findings. A methodology has been developed for determining the optimal operating slip value to minimize electrical losses under varying rotor shaft load conditions in a quasi-steady-state mode of induction motor operation. A universal objective function for minimizing electrical losses in the induction motor as a function of slip frequency has been obtained. In the process of solving the optimization problem using classical single-variable optimization methods, an expression for the optimal slip frequency was derived, as well as the relationships between current magnitudes and the parameters of the induction motor stator and rotor winding phases. These were obtained based on the conventional mathematical description of a generalized AC electrical machine for its steady-state operation. The effectiveness of the proposed methodology has been proven using the example of an AIR225M2 induction motor with a power rating of 55 kW, for which the electrical loss dependence in a quasi-steady-state mode under a static load of $M_c = 0.5M_{nom}$ was obtained. It was established that the optimal slip value for this induction motor is $s = 0.038$.

Originality. For induction motors of various power ratings, a universal objective function has been derived to minimize electrical losses as a function of slip frequency. This function enables the determination of a performance characteristic representing the dependence of the maximum attainable efficiency on the load torque on the shaft for induction motors of any power range.

Practical value. The research findings can be implemented in induction motor drive systems equipped with rotor speed sensors to enable automated self-regulation of the motor speed. This ensures the rotor operates at the optimal slip value across the entire load range of the driven mechanism.

Keywords: induction motor, electrical losses, minimization, slip, steady-state operation, energy efficiency.

REFERENCES

- [1] Pitis C. D., Zeller M. W. (2008). Power savings obtained from supply voltage variation on squirrel cage induction motors. 2008 IEEE Canada Electric Power Conference, Vancouver, BC, Canada, 1-3, doi: 10.1109/EPC.2008.4763392.
- [2] Temelkovski, Z. Hanić and G. Rafajlovski. (2025). Investigation of Power Losses in Three-phase Induction Motor Taking into Consideration the Harmonics. 2025 International Conference on Electrical Drives and Power Electronics (EDPE), Dubrovnik, Croatia, 1-5, doi: 10.1109/EDPE66853.2025.11224245
- [3] K. Inoue, M. Minamiyama and T. Kato (2009). A design methodology of an optimal torque minimizing energy loss under torque limit for an induction motor. 2009 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, San Jose, CA, USA, 163-167, doi: 10.1109/ECCE.2009.5316081.
- [4] P. B. Sree and N. P. G. Bhavani (2023). Bhavani. Efficiency Improvement of Electrical Vehicles Using Novel Permanent Magnet Motors and Compared with BLDC Motors by Reducing Power Loss. 2023 6th International Conference on Contemporary Computing and Informatics (IC3I), Gautam Buddha Nagar, India, 2534-2538, doi: 10.1109/IC3I59117.2023.10397721.
- [5] A. M. Bazzi, P. T. Krein (2009). A survey of real-time power-loss minimizers for induction motors. 2009 IEEE Electric Ship Technologies Symposium, Baltimore, MD, USA, 2009, pp. 98-106, doi: 10.1109/ESTS.2009.4906500.
- [6] Zhang, L., & Wang, Y. (2025). Computationally Efficient and Loss-Minimizing Model Predictive Control for Induction Motors in Electric Vehicle Applications. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 72, (3), 2440-2451. doi: https://doi.org/10.3390/en18061444
- [7] Petrov, I., et al. (2024). Refined Research and Optimization of Energy Modes of a Frequency-Regulated Induction Motor with Variable Load. Proceedings of the 2024 International Conference on Industrial Engineering and Applications (ICIEA), 112-118.
- [8] Chen, X., & Gupta, S. (2024). A Hybrid Search Efficiency Optimization Strategy for Induction Motor Drives Based on Improved Fuzzy-Golden Section Algorithm. IEEE Access, 12, 45890-45902.
- [9] Silva, J. M., et al. (2025). Comparison between predictive and scalar control strategies for minimizing losses in induction motors under dynamic load conditions. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 36, (1), 88-101. doi:10.1080/21642583.2025.2481942.
- [10] Kumar, R., & Singh, B. (2013). Sensitivity Analysis of Loss-Minimization Algorithms to Parameter Variations in High-Performance AC Drives. IEEE Transactions on Industry Applications, 59, (4), 4120-4130. doi:10.1109/IECON.2013.6699982
- [11] Muller, H. (2024). Energy optimization of induction motor in transient state under field-oriented control: A non-intrusive approach. Journal of Renewable and Sustainable Energy, 16(2), 024501. doi:10.1109/ISPA59904.2024.10536747
- [12] Liu, H., & Zhao, T. (2006). Impact of Advanced PWM Strategies on Harmonic Iron Losses in High-Speed Induction Motor Drives. IEEE Transactions on Power Electronics, 40, (2), 1540-1555.

doi:10.1109/IAS.2006.256619

- [13] Marek, J., & Novak, P. (2024). Efficiency Optimization of VFD-Fed Induction Motors through Adaptive Switching Frequency Control. *Energies*, 17(4), 932.
- [14] Abed, K., & Zine, H. K. E. (2024). Intelligent fuzzy back-stepping observer design based induction motor robust nonlinear sensorless control. *Electrical Engineering & Electromechanics*, (2), 10–15. <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2024.2.02>.
- [15] Wang, Q., & Li, X. (2025). Energy-Efficient Vector Control of Induction Motor Without Speed Sensor Based on Deep Reinforcement Learning. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 13(1), 210-222.
- [16] Sakhivel V. P. and Subramanian S. (2011). Using MPSO algorithm to optimize three-phase squirrel cage induction motor design, 2011 International Conference on Emerging Trends in Electrical and Computer Technology, Nagercoil, India, 261-267, doi: 10.1109/ICETECT.2011.5760126.

СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ГІДРОМОДУЛЕМ ОХОЛОДЖЕННЯ ДАТА-ЦЕНТРУ

ОСАДЧИЙ В.В. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електропривод та автоматизація промислових установок Національного університету “Запорізька політехніка”, Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2707-0805>, e-mail: w.osadchiy@gmail.com;

НАЗАРОВА О.С. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електропривод та автоматизація промислових установок Національного університету “Запорізька політехніка”, Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0784-7621>, e-mail: nazarova16@gmail.com;

КУНІЦІН А.В. магістр кафедри електропривод та автоматизація промислових установок Національного університету “Запорізька політехніка”, Запоріжжя, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6232-4676>, e-mail: artemzp2003@gmail.com;

Мета роботи. Розробка та дослідження системи автоматичного керування гідромодулем охолодження дата-центру на основі промислового контролера Siemens S7-1200 із впровадженням концепції цифрового двійника в середовищі MATLAB / Simulink для забезпечення прецизійної стабілізації температурних режимів за змінного теплового навантаження.

Методи дослідження. Математичне моделювання на основі диференціальних рівнянь, імітаційного моделювання, класичні методи теорії автоматичного керування.

Отримані результати. Розроблено комплексну математичну модель гідромодуля, що адекватно відтворює нелінійні теплофізичні процеси взаємодії між первинним та вторинним контурами охолодження. Створено інтегровану архітектуру керування, де реальний мікропроцесорний контролер здійснює керування віртуалізованим об'єктом у контурі імітаційної моделі. Шляхом чисельного моделювання встановлено, що розроблена система забезпечує підтримку цільових показників мікроклімату з високою прецизійністю та нульовою статичною похибкою. Аналіз перехідних процесів підтвердив аперіодичний характер регулювання при екстремальних збуреннях теплової потужності.

Наукова новизна. Отримала подальший розвиток методологія проєктування інтелектуальних систем автоматичного керування теплотехнічними об'єктами на основі концепції Digital Twin із безпосередньою інтеграцією реального промислового контролера у віртуальний контур керування. Для гідромодуля охолодження дата-центру запропоновано архітектуру, у якій Siemens S7-1200 функціонує в режимі апаратно-програмної зв'язку з імітаційною моделлю, реалізованою у середовищі MATLAB / Simulink, що забезпечує двосторонній обмін даними через протокол ISO-op-TCP у реальному часі. Отримали подальший розвиток методи предиктивного аналізу енергоефективності систем охолодження за рахунок перенесення етапу налаштування регуляторів у віртуальне середовище з апаратною верифікацією алгоритмів. Показано, що запропонована система забезпечує аперіодичний характер перехідних процесів та нульову статичну похибку при збуреннях теплової потужності.

Практична цінність. Створено інструментарій для безпечного та економічно доцільного налагодження систем автоматизації гідромодулів охолодження дата-центрів без ризику пошкодження дороговартісного обладнання. Запропонована система дозволяє: забезпечити стабілізацію температури вторинного контуру з похибкою, що не перевищує 5 %; досягти аперіодичного характеру регулювання з постійною часу $T = 20$ с; підвищити енергоефективність та надійність роботи насосного обладнання; зменшити витрати на пусконаладжувальні роботи за рахунок попереднього тестування алгоритмів у цифровому двійнику. Розроблені рішення можуть бути інтегровані в автоматизовані системи керування великих центрів обробки даних, а також масштабовані для багатомодульних конфігурацій із синтезом алгоритмів перерозподілу навантаження між кількома джерелами холоду.

Ключові слова: електрична інженерія; автоматизація; система керування; цифровий двійник; моделювання; Siemens S7-1200; система охолодження; дата-центр, моніторинг, енергоефективність.

I. ВСТУП

Стрімке зростання обсягів цифрової інформації

та розвиток хмарних технологій зумовлюють експоненціальне збільшення потужностей центрів обробки даних (ЦОД). Забезпечення надійної роботи сервер-

© Осадчий В.В., Назарова О.С., Куніцин А.В., 2026

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (CC-BY-SA 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2026-1-6>

ного обладнання потребує створення високоефективної інженерної інфраструктури, де однією з найважливіших складових є система охолодження. Від її ефективності безпосередньо залежить продуктивність, безпека та загальний показник енергоефективності PUE (Power Usage Effectiveness), який визначає конкурентоспроможність дата-центру на ринку.

Сучасні системи охолодження ЦОД є складними багатоконтурними комплексами, де взаємодіють гідромодулі, теплообмінні апарати та автоматизовані засоби керування. Значна частина енергоспоживання таких об'єктів (близько 50%) припадає саме на інфраструктуру холодопостачання, що робить питання оптимізації теплових процесів вкрай актуальним.

Незважаючи на значну кількість існуючих рішень, у галузі спостерігається прогалина між теоретичним моделюванням та практичним впровадженням алгоритмів керування. Традиційні методи проектування часто не враховують динамічну зміну теплового навантаження в реальному часі, що призводить до інерційності регулювання або надмірного енергоспоживання. Протиріччя полягає в необхідності забезпечення прецизійної стабільності температури при одночасному зниженні витрат на приводні агрегати.

Одним із перспективних підходів до вирішення цієї проблеми є створення цифрового двійника системи охолодження в середовищі Simulink, що дозволяє виконувати дослідження без втручання в роботу реального обладнання. Застосування програмованих логічних контролерів (ПЛК) у поєднанні з такою моделлю дозволяє реалізувати інтегроване рішення, де реальний пристрій керування взаємодіє з математичною моделлю через мережеві протоколи [1]. Такий підхід забезпечує можливість тестування й налагодження складних законів регулювання, прогнозування станів системи та підвищення її загальної енергоефективності [2].

Дана робота присвячена дослідженню методів інтеграції імітаційних моделей Simulink з промисловими засобами автоматизації для оптимізації процесів холодопостачання дата-центрів.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Еволюція наукової думки у сфері охолодження центрів обробки даних пройшла шлях від адаптації загальнопромислових систем кондиціонування до створення спеціалізованих прецизійних комплексів. Перші фундаментальні дослідження у цій галузі були зосереджені на забезпеченні базових параметрів мікроклімату згідно з нормативами ASHRAE, де основна увага приділялася фізичному розташуванню серверних стійок (концепція «гарячих» та «холодних» коридорів). Згодом, із підвищенням щільності обчислювальних потужностей, наукові пошуки змістилися в бік розробки рідинних систем охолодження та гідромодулів, що дозволило значно інтенсифікувати відве-

дення тепла через пластинчасті теплообмінні апарати.

Сучасний етап розвитку характеризується впровадженням інтелектуальних систем автоматизації, спрямованих на оптимізацію показника енергоефективності PUE. У роботі [3] доведено, що централізована автоматизація чилерів із використанням ПЛК Siemens S7-1200 і алгоритмів керування за сумарною тепловою потужністю забезпечує істотну оптимізацію енергоспоживання систем холодопостачання. Дослідження дистанційно керованої системи охолодження на основі Industrial IoT і MODBUS TCP/IP демонструє, що інтеграція промислових протоколів обміну забезпечує підвищення керованості процесу, зниження експлуатаційних витрат і подовження ресурсу обладнання порівняно з ручним керуванням [4]. У праці Пупена О.М. [1] детально розглянуто архітектури промислових мереж, протоколи обміну даними та інтеграційні технології в АСУ ТП, що становить теоретичну основу для організації надійного мережевого зв'язку між ПЛК і цифровим двійником.

У статті [5], представлено підхід до побудови мехатронної системи автоматичного керування з використанням математичного моделювання та експериментальної верифікації, що підтверджує ефективність поєднання моделі об'єкта з реальним апаратним забезпеченням. У роботі [6], розглянуто створення програмно-апаратного комплексу для дослідження електропневматичних мехатронних систем із застосуванням підходу Hardware-in-the-Loop, що методично узгоджується з реалізованою у даному дослідженні концепцією інтеграції цифрового двійника та ПЛК. У праці [7] обґрунтовано доцільність використання цифрового двійника в реальному часі для оптимізації енергоефективності інженерних систем будівель через інтеграцію моделей із системами автоматизованого керування. Дослідження [8] підтверджує ефективність цифрових двійників для оптимізації охолодження та рекуперації тепла в центрах обробки даних шляхом тестування стратегій керування на віртуальній моделі серверної інфраструктури. Останні публікації вітчизняних та закордонних авторів розглядають використання нейронних мереж та методів предиктивного моделювання для прогнозування теплових потоків. Огляд [9] узагальнює сучасні досягнення однофазного імерсійного охолодження як енергоефективної та масштабованої альтернативи традиційним рішенням для ЦОД і НРС, акцентуючи на поєднанні термогідродинаміки та інтелектуального керування.

Проведений аналіз наукових праць свідчить про значний прогрес у розробленні математичних моделей і алгоритмів керування системами охолодження ЦОД, однак їх практична реалізація на промисловому рівні залишається обмеженою. Більшість моделей, створених у середовищах високого рівня, не враховують обмежень реального апаратного забезпечення та часових затримок обміну даними. Використання ОРС-серверів як проміжних ланок інтеграції часто спричиняє додаткову інерційність, що знижує якість

регулювання в умовах швидкозмінного теплового навантаження. Недостатньо досліджено питання прямої синхронізації цифрового двійника з промисловим ПЛК у режимі реального часу без втрати швидкодії системи. Таким чином, невирішеною залишається проблема створення ефективного інструментарію для реалізації контуру Hardware-in-the-Loop із використанням низькорівневих протоколів обміну даними.

Актуальність роботи зумовлена необхідністю підвищення точності та швидкодії систем автоматичного керування охолодженням центрів обробки даних. В умовах зростання щільності обчислювальних потужностей навіть незначні затримки в контурі керування можуть призводити до перевитрат енергії та ризиків перегріву обладнання. Запропонований підхід до прямої інтеграції цифрового двійника з ПЛК дозволяє мінімізувати інерційність обміну та підвищити достовірність моделювання. Реалізація Hardware-in-the-Loop забезпечує можливість попередньої верифікації алгоритмів регулювання до впровадження фізичного обладнання. Це створює передумови для зниження експлуатаційних витрат, оптимізації енергоспоживання насосних груп і підвищення надійності функціонування систем холодопостачання ЦОД.

III. МЕТА РОБОТИ

Метою дослідження є розробка та дослідження системи автоматичного керування гідромодулем охолодження дата-центру на основі промислового контролера Siemens S7-1200 із впровадженням концепції цифрового двійника в середовищі MATLAB / Simulink для забезпечення прецизійної стабілізації температурних режимів за змінного теплового навантаження.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розробка системи автоматизації розпочинається з формування функціональної структури керування гідромодулем. Представлена схема функціональна автоматизації (рис. 1), яка відображає всі засоби автоматизації, виявлені під час аналізу існуючої інфраструктури ЦОД, а також їх призначення. Така схема демонструє принцип роботи системи, структуру сигналів і взаємодію обладнання.

Організація керування за такою схемою передбачає використання каскадного або багатоконтурного принципу регулювання, де пріоритетним завданням є підтримка цільового значення RT2 шляхом динамічної зміни положення регулюючого органу на лінії подачі холодоагенту (RT3). Врахування параметрів RT1 та B1 дозволяє системі здійснювати компенсацію збурень при різких змінах теплового навантаження з боку IT-інфраструктури, що мінімізує транспортне запізнення в контурі зворотного зв'язку. Вимірювання тиску в магістралях інтегровано в загальний алгоритм безпеки для запобігання кавітації насосних агрегатів та контролю гідравлічного опору теплообмінного

апарату.

Такий комплексний моніторинг вхідних і вихідних температурних потоків у поєднанні з контролем масової витрати забезпечує високу точність ідентифікації поточного стану системи та дозволяє оптимізувати питоме енергоспоживання гідромодуля в автоматичному режимі. Центральним технологічним елементом гідромодуля, що забезпечує процес передачі теплової енергії між контурами, є пластинчастий теплообмінник. Вибір даного типу обладнання обумовлений його високою компактністю та інтенсивним коефіцієнтом теплопередачі при відносно малих температурних напорах, що є критичним для систем охолодження сучасних дата-центрів.

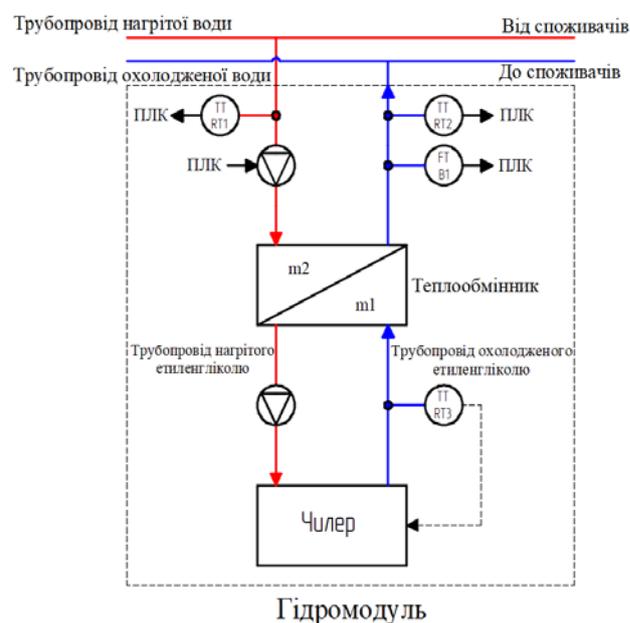


Рисунок 1. Функціональна схема автоматизації гідромодуля системи охолодження ЦОД.

Критерії оцінки якості результатів дослідження визначаються здатністю системи забезпечувати стабільність цільової температури вторинного контуру в межах від 18°C до 27°C незалежно від стохастичних змін IT-навантаження. Якість функціонування синтезованої системи оцінюється за показниками точності підтримки заданих значень у статичних режимах (відсутність статичної похибки), а також за динамічними характеристиками перехідних процесів, які повинні мати аперіодичний характер із мінімальним часом регулювання та високим запасом стійкості. Крім того, критерієм ефективності є забезпечення безперебійної синхронізації між віртуальною та апаратною частинами системи в режимі реального часу [10] - [11].

Обмеження при розв'язанні поставленої задачі зумовлені технічними характеристиками обраної бази автоматизації, зокрема обчислювальною потужністю мікропроцесорного контролера та жорстко заданим кроком дискретизації часових інтервалів. До фізичних обмежень належать інерційність теплообмінного об-

ладнання, обмеження швидкодії виконавчих механізмів та лімітований діапазон витрати теплоносія, що не перевищує 2 кг/с. Експлуатаційні обмеження вимагають дотримання градієнта зміни температури в машинному залі на рівні не більше 10°C на годину для запобігання термічним деформаціям серверного обладнання. Використання виключно стандартних бібліотек Simulink та мов програмування промислових контролерів є додатковим інструментальним обмеженням при реалізації проекту [12] - [13].

Принципова схема (рис. 2) передбачає рух теплоносіїв у режимі протитоку, що дозволяє досягти максимально можливої різниці температур між гарячим водяним контуром та охолодженим гліколевим розчином. Висока щільність теплового потоку в таких апаратах вимагає застосування прецизійних алгоритмів керування для запобігання різким коливанням температури при змінних витратах теплоносія.

Базова формула, яка була використана – формула теплової потужності:

$$P = Q \cdot c \cdot \Delta t; \quad (1)$$

де Q – масова витрата, кг/с;

c – теплоємність, Вт/кг·C°;

Δt – різниця температур, між входом і виходом теплоносія, C°.

Другим фізичним явищем, яке використовується при моделюванні теплообмінника, є теплопередача через тверду перегородку, що розділяє два незалежні теплоносії — воду та етиленгліколь. У спрощеній моделі передане тепло через пластину можна визначити за формулою теплопередачі:

$$Q = \alpha \cdot A \cdot \Delta t; \quad (2)$$

де Q – передане тепло, Вт;

α – коефіцієнт теплопередачі, Вт/м²·C°;

Δt – різниця температур, C°;

A – площа контактної площини, м².

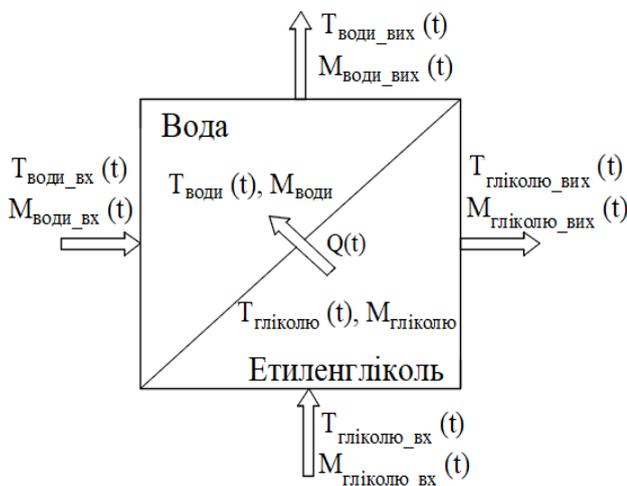


Рисунок 2. Принципова схема теплообмінника

Далі наведено значення величин зображених на (рис. 2): $T_{в_вх}$ - температура води при вході в теплообмінник, $T_{в_вих}$ - температура води при виході з теплообмінника, $M_{в_вх} / M_{в_вих}$ - витрата води в теплообміннику, $T_{гл_вх}$ - температура етиленгліколю при вході в теплообмінник, $T_{гл_вих}$ - температура етиленгліколю при виході з теплообмінника, $T'_в$ - температура води в теплообміннику, $T'_{гл}$ - температура етиленгліколю в теплообміннику, Q - потужність теплообміну між теплоносіями.

Грунтуючись на рівняннях, описаних вище, отримуємо такі диференціальні рівняння, що описують роботу теплообмінника.

Це рівняння описує енергію теплопередачі від етиленгліколю до води:

$$Q(t) = \alpha \cdot A \cdot (T_{гл_вих}(t) - T_{в_вих}(t)); \quad (3)$$

Це рівняння визначає баланс енергії в ємності з водою:

$$\frac{dT_{в}(t)}{dt} = \frac{1}{c_{в} \cdot M_{в}} \cdot (c_{в} \cdot M_{в_вх}(t) \cdot T_{в_вх}(t) - c_{в} M_{в_вих}(t) \cdot T_{в_вих}(t) + Q(t)); \quad (4)$$

Це рівняння для етиленгліколю записано аналогічним способом, грунтуючись на балансі енергії:

$$\frac{dT_{гл}(t)}{dt} = \frac{1}{c_{гл} \cdot M_{гл}} \cdot (c_{гл} \cdot M_{гл_вх}(t) \cdot T_{гл_вх}(t) - c_{гл} \cdot M_{гл_вих}(t) \cdot T_{гл_вих}(t) - Q(t)); \quad (5)$$

За отриманими диференціальними рівняннями будуватиметься динамічна модель теплообмінника в середовищі Simulink програмного комплексу Matlab.

Практична реалізація системи керування базується на концепції інтеграції віртуального об'єкта моделювання з реальним мікропроцесорним пристроєм за технологією Hardware-in-the-Loop [14] - [15]. У середовищі Simulink розроблено комплексну модель охолодження, яка відтворює динамічні характеристики гідромодуля. Ключовою особливістю даного етапу є винесення логіки керування за межі програмного середовища безпосередньо у пам'ять промислового контролера Siemens S7-1200 [16] - [17]. Це дозволяє перевірити працездатність алгоритмів у реальних умовах функціонування операційної системи контролера, враховуючи час сканування програми та особливості обробки аналогових сигналів.

Центральне місце в архітектурі системи посідає організація мережевого обміну даними. Для забезпечення високошвидкісного зв'язку між моделлю Simulink та ПЛК використано відкритий комунікаційний протокол ISO-op-TCP. Інформаційний потік структуровано таким чином, що кожні 300 мс модель передає значення поточної температури в дата-блоки контролера, а ПЛК, у свою чергу, повертає обчисле-

ний керуючий сигнал на виконавчий механізм (регулюючий клапан). Такий підхід забезпечує синхронізацію процесів та дозволяє розглядати модель як цифровий заміник фізичного об'єкта [18].

Розроблена структура імітаційного стенда дозволяє проводити дослідження системи в критичних режимах, які є небезпечними для реального обладнання дата-центру. Зокрема, реалізована можливість моделювання стрибкоподібних змін теплового навантаження та імітації відмов окремих датчиків. Це створює умови для глибокої верифікації параметрів ПІ-регулятора та відпрацювання логіки аварійного захисту. Таким чином, поєднання обчислювальної потуж-

ності Simulink з надійністю контролера S7-1200 формує універсальну платформу для проектування та предиктивного аналізу систем автоматизації прецизійного охолодження.

Програмна частина системи керування розроблена за модульним принципом, що забезпечує гнучкість налаштування та високу швидкість обробки технологічних даних [19] - [20]. Основний цикл виконання програми контролера розділено на декілька функціональних рівнів: рівень первинної обробки сигналів, рівень обчислення закону регулювання та рівень формування вихідних впливів на виконавчі механізми.

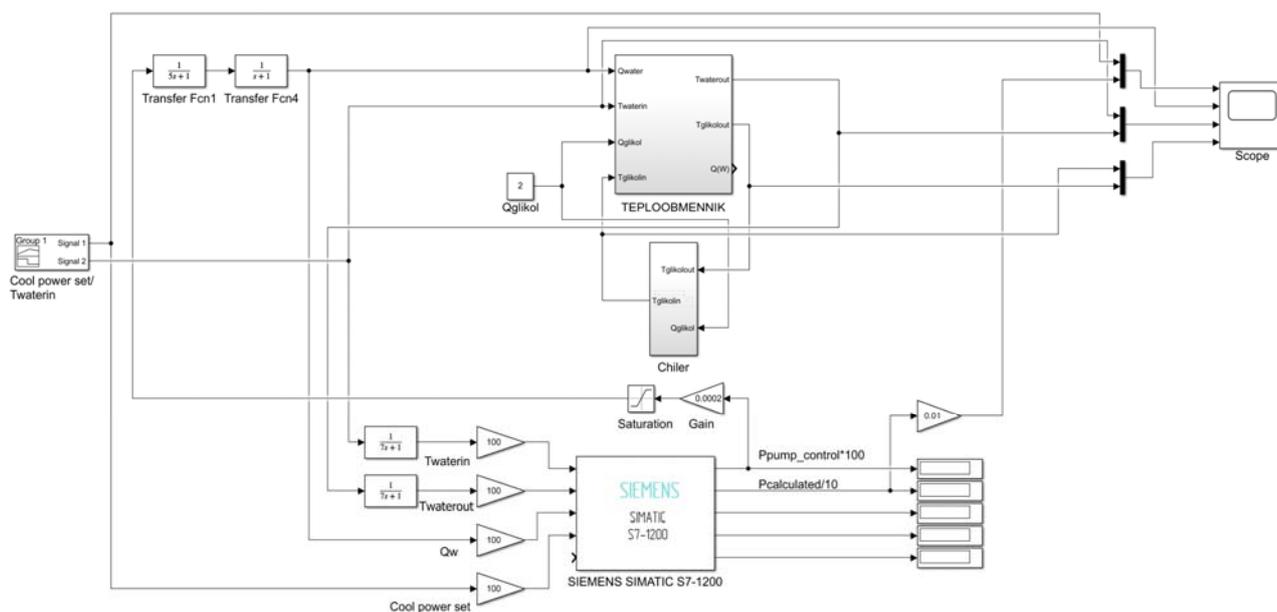


Рисунок 3. Інтеграція моделі гідромодуля з системою автоматичного керування на базі S7-1200

Такий підхід дозволяє ізолювати математичні операції від фізичних інтерфейсів, що спрощує адаптацію програмного забезпечення до різних конфігурацій гідромодулів.

Фундаментальним ядром програмної реалізації є модуль автоматичного регулювання, що функціонує з жорстко детермінованим кроком дискретизації для мінімізації фазових затримок у контурі керування [19]. В основі обчислювального алгоритму лежить модифікований закон пропорційно-інтегрального регулювання, доповнений механізмом запобігання інтегральному насиченню для коректної обробки обмежень виконавчих механізмів [20].

Інтеграція моделі гідромодуля з системою автоматичного керування. У даній моделі (рис. 3), керування перенесено безпосередньо в контролер Siemens S7-1200. Це забезпечує більш реалістичне відтворення роботи системи, оскільки алгоритм регулювання тепер виконується у тій формі, в якій він буде працювати на реальному обладнанні.

У структурну схему моделі додано спеціальний

блок комунікації з ПЛК, через який MATLAB та контролер обмінюються даними. Перехід даних між Simulink та S7-1200 відбувається за принципом: Simulink → Snap7 → ISO-on-TCP → PLC та та у зворотному напрямку PLC → ISO-on-TCP → Snap7 → Simulink. У результаті побудована комунікаційна схема дозволяє Simulink виступати цифровим двійником частини системи охолодження, а контролер S7-1200 — виконувати реальні алгоритми керування, отримуючи від моделі всі необхідні сигнали та передаючи назад фактичні значення параметрів. Такий підхід дає можливість тестувати логіку керування, перевіряти поведінку обладнання, налагоджувати алгоритми та проводити дослідження без потреби у фізичній установці, що значно підвищує ефективність проектування та експериментів.

Верифікація розробленого цифрового двійника здійснювалася шляхом моделювання перехідних процесів в інтегрованому середовищі «Simulink – ПЛК S7-1200» за допомогою блоку Signal Builder. Тестування охоплювало реакцію системи на ступінчасті зміни уставки холодопродуктивності (PЗВД) та ко-

ливання температури теплоносія на вході ($T_{WATERIN}$).

Аналіз отриманих результатів (рис. 4) дозволив виділити наступні етапи функціонування системи.

Початкова адаптація (до t_1): спостерігається вихід чиллера на сталий режим роботи. Температура гліколю на виході ($T_{GLIKOLOUT}$) стабілізується в робочому діапазоні 5–7°C.

Відпрацювання навантаження (t_1 - t_2): при стрибку завдання до 80 кВт ПІ-регулятор у ПЛК збільшує

витрату води (Q_{WATER}), забезпечуючи аперіодичний перехідний процес. Реальна потужність ($P_{РЕАЛЬНА}$) досягає уставки без перерегулювання з мінімальною статичною похибкою.

Компенсація збурень (t_3 - t_4): при зміні ($T_{WATERIN}$) до 18°C та згодом до 23°C контур регулювання потужності успішно нівелює вплив температурних коливань, зберігаючи сталість $P_{РЕАЛЬНА}$ за рахунок корекції витрати теплоносія.

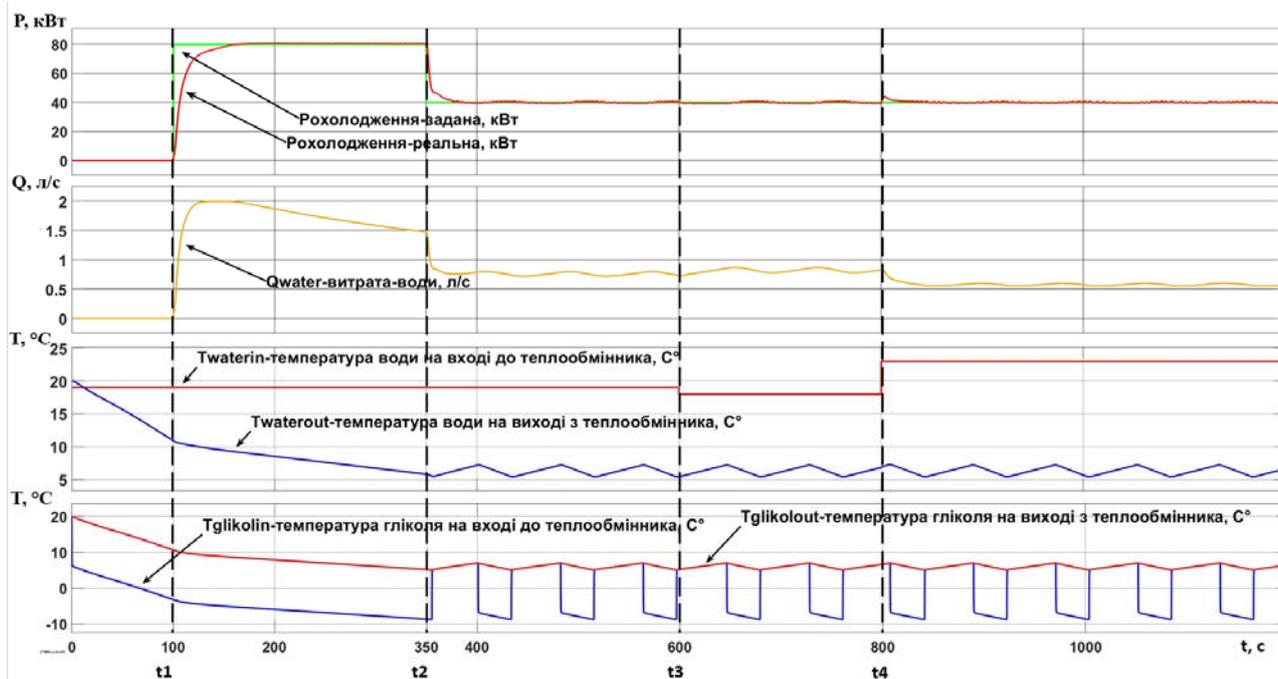


Рисунок 4. Перехідні процеси змінних $P_{ОХОЛОДЖЕННЯ}$, Q_{WATER} , T_{WATER} та T_{GLIKOL}

Дослідження підтвердило, що поділ функцій між температурним контуром чиллера та потужнісним контуром ПЛК забезпечує динамічну стійкість системи. Час регулювання при критичних змінах навантаження не перевищує 120 с, що повністю відповідає вимогам до прецизійного охолодження дата-центрів.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

V. ВИСНОВКИ

У результаті дослідження розроблено та досліджено систему автоматичного керування гідромодулем охолодження дата-центру на базі контролера Siemens S7-1200 із реалізацією цифрового двійника в середовищі MATLAB/Simulink. На основі аналізу теплотехнічних процесів сформовано вимоги до САК та створено динамічну математичну модель пластинчастого теплообмінника з урахуванням тепломасообміну між водяним і етиленгліколевим контурами, що забезпечило адекватне відтворення об'єкта керування.

Синтезовано контур регулювання холодопродуктивності гідромодуля на базі ПІ-регулятора, параметри якого визначено шляхом імітаційного моделюван-

ня. Реалізовано алгоритми керування на ПЛК та організовано двосторонній обмін даними за протоколом ISO-on-TCP у режимі Hardware-in-the-Loop. Моделювання й експериментальні дослідження підтвердили ефективність рішень: забезпечено стійку аперіодичну стабілізацію з постійною часу 20 с і похибкою не більше 5%. Досягнуті показники динамічної якості дозволяють підтримувати задану холодопродуктивність за змінного теплового навантаження, що є основою для забезпечення перерозподілу навантаження між гідромодулями, які працюють на спільний колектор системи охолодження ЦОД.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на масштабування системи з розробленням багатоконтурної теплової моделі та синтезом регуляторів перерозподілу навантаження між гідромодулями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Пупена О. М. Промислові мережі та інтеграційні технології в автоматизованих системах : навч. посіб. / О. М. Пупена, І.В. Ельперін, Н.М. Луцька, А. П. Ладанюк. – Київ : НУХТ, 2011. – 550с.
- [2] Marica M. C. Real-Time Pick-and-Place Digital

- Twin in Unity for Industry 4.0 / M. C. Marica, N. Bizon, I. Bostan // 2025 17th International Conference on Electronics, Computers and Artificial Intelligence (ECAI), Targoviste, Romania, 2025. – P. 1–6. – DOI: 10.1109/ECAI65401.2025.11095550.
- [3] Energy optimization of chillers by automating a Cooling System / W. E. Sánchez, B. L. Robayo, P. E. Rodríguez [et al.] // E3S Web of Conferences. – 2018. – Vol. 57. – 02002. – DOI: 10.1051/e3sconf/20185702002.
- [4] Ramirez Ramirez J. A. Remote-Controlled Cooling System for Chrome Plating Cells Using Industrial IoT and MODBUS TCP/IP / J. A. Ramirez Ramirez, D. B. Montalvo Hurtado, A. Hilario-Tacuri // SSRG International Journal of Electrical and Electronics Engineering. – 2025. – Vol. 12, No. 6. – P. 214–223. – DOI: 10.14445/23488379/IJEEE-V12I6P119.
- [5] Mechatronic automatic control system of electropneumatic manipulator / O. Nazarova, V. Osadchyy, T. Hutsol [et al.] // Scientific Reports. – 2024. – Vol. 14. – P. 6970. – DOI: 10.1038/s41598-024-56672-4.
- [6] Nazarova O. Software and Hardware Complex for the Study of Electropneumatic Mechatronic Systems / O. Nazarova, V. Osadchyy, S. Shulzhenko, M. Olieinikov // 2022 IEEE 4th International Conference on Modern Electrical and Energy System (MEES), Kremenchuk, Ukraine, 2022. – P. 1–6. – DOI: 10.1109/MEES58014.2022.10005698.
- [7] Krayem H. A digital twin solution for optimizing productivity and energy performance in hybrid ventilated office space / H. Krayem, J. Younes, K. Ghali [et al.] // Energy Conversion and Management. – 2026. – Vol. 349. – 120880. – DOI: 10.1016/j.enconman.2025.120880.
- [8] Giordani S. Digital Twins for Data Centre Cooling Optimisation and Waste Heat Recovery / S. Giordani, R. Scoccia, M. Aprile // Building Digital Twins. – Cham : Springer, 2026. – (Lecture Notes in Civil Engineering ; vol. 775). – DOI: 10.1007/978-3-032-09040-9_8.
- [9] Lua K. B. Single-phase immersion cooling for data centers and HPC: Recent advances and system-level challenges / K. B. Lua, C.-C. Wang // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2026. – Vol. 232. – 116786. – DOI: 10.1016/j.rser.2026.116786.
- [10] Bhatia A. HVAC cooling systems for data centers : Course No: M05-020. – 65 p.
- [11] Coroamă V. C. Temperature Optimisation in Data Centres. – Roegen Centre for Sustainability, 2025. – 46 p. – DOI: 10.48550/arXiv.2509.26163.
- [12] Torrell W. The Unexpected Impact of Raising Data Center Temperatures / W. Torrell, K. Brown, V. Avelar. – Schneider Electric, 2016. – 16 p.
- [13] ASHRAE. Thermal Guidelines for Data Processing Environments. – 2nd ed. – 2009.
- [14] Liu G. Reducing Step Size of Hardware-in-Loop Simulation in Electro-Dynamic Shaker Controller Design by Electrical-Mechanical Analogy / G. Liu, Z. Pan, L. Chen // IEEE Access. – 2024. – Vol. 12. – P. 88819–88828. – DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3418623.
- [15] Anticaglia A. Hardware-in-the-Loop Driving Simulators: Simplifying Real Component Integration in Simulated Environments / A. Anticaglia, R. Capitani, C. Annicchiarico // IEEE Open Journal of Vehicular Technology. – 2025. – Vol. 6. – P. 2891–2908. – DOI: 10.1109/OJVT.2025.3622519.
- [16] Liu Y. Research on Maglev Power Heat Pipe Refrigeration Control System Based on 1200 PLC Modbus Serial Communication Acquisition Technology / Y. Liu // 2023 IEEE 6th International Conference on Information Systems and Computer Aided Education (ICISCAE), Dalian, China, 2023. – P. 1010–1014. – DOI: 10.1109/ICISCAE59047.2023.10392875.
- [17] Osadchyy V. Laboratory Stand for Investigation of Liquid Level Microprocessor Control Systems / V. Osadchyy, O. Nazarova // 2020 IEEE Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP), Kremenchuk, Ukraine, 2020. – P. 1–4. – DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240868.
- [18] Siemens. Basic examples for open user communication TCP. – 2020. – 82 p. – Режим доступу: https://docs.tia.siemens.cloud/r/K_rGver6ldNCaKD650C6lg/7UDRC3kAeXTkjb3CITAEBVA
- [19] Шевченко В. В. Основи автоматизації технологічних процесів : конспект лекцій : навч. посіб. / В. В. Шевченко, Г. С. Тимчик. – Київ : КПІ, 2023. – 111 с.
- [20] Баган Т. Г. Проектування систем автоматизації : навч. посіб. / Т. Г. Баган, О. В. Некрашевич. – Київ : КПІ, 2020. – 59 с.

Надійшла (Received) 12.01.2016;

Прийнята (Accepted) 24.02.2026;

Опублікована (Published) 30.03.2026;

AUTOMATIC CONTROL SYSTEM FOR DATA CENTER COOLING HYDRAULIC MODULES

- OSADCHY V.V. PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Electric Drive and Commercial Plant Automation Department, National University «Zaporizhzhia Polytechnic», Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2707-0805>, e-mail: w.osadchiy@gmail.com ;
- NAZAROVA O.S. PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Electric Drive and Commercial Plant Automation Department, National University «Zaporizhzhia Polytechnic», Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0784-7621>, e-mail: author@mail.com;
- KUNITSYN A.V. Master student of the Electric Drive and Commercial Plant Automation Department, National University «Zaporizhzhia Polytechnic», Zaporizhzhia, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6232-4676>, e-mail: artemzp2003@gmail.com

Purpose of the work. Development and research of an automatic control system for a data center cooling hydromodule based on the Siemens S7-1200 industrial controller with the implementation of the digital twin concept in the MATLAB / Simulink environment to ensure precise stabilization of temperature regimes under variable thermal load.

Research methods. Mathematical modeling based on differential equations, simulation modeling, and classical methods of automatic control theory.

Results. A complex mathematical model of the hydromodule has been developed that adequately reproduces the nonlinear thermophysical interactions between the primary and secondary cooling circuits. An integrated control architecture has been created, in which a real microprocessor controller controls a virtualized object within the simulation model's circuit. Numerical modeling indicates that the developed system supports target microclimate indicators with high precision and zero static error. The analysis of transient processes confirmed the aperiodic nature of regulation during extreme thermal power disturbances.

Scientific novelty. The methodology for designing intelligent systems for the automatic control of heat engineering facilities based on the Digital Twin concept, with direct integration of a real industrial controller into a virtual control loop, has been further developed. For the data center cooling hydromodule, an architecture has been proposed in which the Siemens S7-1200 operates in hardware-software communication mode with a simulation model implemented in the MATLAB/Simulink environment, providing two-way data exchange via the ISO-on-TCP protocol in real time. Methods for predictive analysis of energy efficiency in cooling systems have been further developed by moving the regulator-tuning stage into a virtual environment, with hardware verification of the algorithms. It has been shown that the proposed system provides an aperiodic nature of transient processes and zero static error during thermal power disturbances.

Practical value. A toolkit has been created to enable safe, cost-effective adjustment of automation systems for data center cooling hydromodules without risking damage to expensive equipment. The proposed system allows: to ensure stabilization of the secondary circuit temperature with an error not exceeding 5%; to achieve aperiodic regulation with a time constant $T = 20$ s; to increase energy efficiency and reliability of pumping equipment; to reduce costs for commissioning and adjustment due to preliminary testing of algorithms in a digital twin. The developed solutions can be integrated into automated control systems of large data centers and scaled for multi-module configurations by synthesizing load redistribution algorithms across several cold sources.

Keywords: electrical engineering; automation; control system; digital twin; modeling; Siemens S7-1200; cooling system; data center; monitoring; energy efficiency.

REFERENCES

- [1] Pupena, O. M., Elperin, I. V., Lutska, N. M., & Ladanuik, A. P. (2011). *Promyslovi merezhi ta intehratsiini tekhnologii v avtomatyzovanykh systemakh*. Kyiv: NUKHT.
- [2] Marica, M. C., Bizon, N., & Bostan, I. (2025). Real-time pick-and-place digital twin in Unity for Industry 4.0. In *Proceedings of the 17th International Conference on Electronics, Computers and Artificial Intelligence (ECAI)* (pp. 1–6). <https://doi.org/10.1109/ECAI65401.2025.11095550>
- [3] Sánchez, W. E., Robayo, B. L., Rodríguez, P. E., Salazar, M. E., Jácome, S., & Mullo, A. S. (2018). Energy optimization of chillers by automating a cooling system. *E3S Web of Conferences*, 57, 02002. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20185702002>
- [4] Ramirez, J. A., Montalvo, D. B., & Hilario-Tacuri, A. (2025). Remote-controlled cooling system for chrome plating cells using industrial IoT and MODBUS TCP/IP. *SSRG Int. Journ. of Electrical and Electronics Engineering*, 12(6), 214–223. <https://doi.org/10.14445/23488379/IJEEE-V12I6P119>
- [5] Nazarova, O., Osadchyy, V., Hutsol, T., Glowacki, S., Nurek, T., Hulevskiy, V., & Horetska, I. (2024). Mechatronic automatic control system of electro-pneumatic manipulator. *Scientific Reports*, 14, 6970. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-56672-4>

- [6] Nazarova, O., Osadchyy, V., Shulzhenko, S., & Olieinikov, M. (2022). Software and hardware complex for the study of electropneumatic mechatronic systems. In *Proc. of the 4th Int. Conference on Modern Electrical and Energy System (MEES)* (pp. 1–6). <https://doi.org/10.1109/MEES58014.2022.10005698>
- [7] Krayem, H., Younes, J., Ghali, K., Jradi, M., Ghaddar, N., & others. (2026). A digital twin solution for optimizing productivity and energy performance in hybrid ventilated office space. *Energy Conversion and Management*, 349, 120880. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2025.120880>
- [8] Giordani, S., Scoccia, R., & Aprile, M. (2026). Digital twins for data centre cooling optimisation and waste heat recovery. In A. Jurelionis, P. A. Fokaidis, L. Mazzarella, & T. Hartmann (Eds.), *Building digital twins* (Lecture Notes in Civil Engineering, Vol. 775). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-032-09040-9_8
- [9] Lua, K. B., & Wang, C.-C. (2026). Single-phase immersion cooling for data centers and HPC: Recent advances and system-level challenges. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 232, 116786. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2026.116786>
- [10] Bhatia, A. (n.d.). *HVAC cooling systems for data centers: Course No. M05-020*.
- [11] Coroamă, V. C. (2025). *Temperature optimisation in data centres*. Roegen Centre for Sustainability. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.26163>
- [12] Torrell, W., Brown, K., & Avelar, V. (2016). *The unexpected impact of raising data center temperatures*. Schneider Electric.
- [13] ASHRAE. (2009). *Thermal guidelines for data processing environments* (2nd ed.).
- [14] Liu, G., Pan, Z., & Chen, L. (2024). Reducing step size of hardware-in-loop simulation in electrodynamic shaker controller design by electrical-mechanical analogy. *IEEE Access*, 12, 88819–88828. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3418623>
- [15] Anticaglia, A., Capitani, R., & Annicchiarico, C. (2025). Hardware-in-the-loop driving simulators: Simplifying real component integration in simulated environments. *IEEE Open Journal of Vehicular Technology*, 6, 2891–2908. <https://doi.org/10.1109/OJVT.2025.3622519>
- [16] Liu, Y. (2023). Research on maglev power heat pipe refrigeration control system based on 1200 PLC Modbus serial communication acquisition technology. In *Proc. of the 6th Int. Conf. on Information Systems and Computer Aided Education* (pp. 1010–1014). <https://doi.org/10.1109/ICISCAE59047.2023.10392875>
- [17] Osadchyy, V., & Nazarova, O. (2020). Laboratory stand for investigation of liquid level microprocessor control systems. In *Proc. of the IEEE Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP)* (pp. 1–4). <https://doi.org/10.1109/PAEP49887.2020.9240868>
- [18] Siemens. (2020). *Basic examples for open user communication TCP*. <https://url.zp.edu.ua/08105>
- [19] Shevchenko, V. V., & Tymchuk, H. S. (2023). *Osnovy avtomatyzatsii tekhnologichnykh protsesiv*. Kyiv: KPI.
- [20] Bahan, T. H., & Nekrashevych, O. V. (2020). *Proiektuvannia system avtomatyzatsii*. Kyiv: KPI.

УДК 621.316.13

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИТРАТ НА ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЮ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ПОТОКІВ В МІКРОМЕРЕЖІ З РОЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ЗА УМОВ НЕСТАБІЛЬНОЇ ГЕНЕРАЦІЇ

ОЛІЙНИЧЕНКО М.Ю. аспірант кафедри електротехніки Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6651-0175>, e-mail: oliynichenko@kdu.edu.ua;

БЯЛОБРЖЕСЬКИЙ О.В. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електротехніки Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1669-4580>, e-mail: bialobrzzeski@ukr.net;

ПОСТІЛ А.О. аспірант кафедри електротехніки Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9411-7047>, e-mail: artur_postil@kdu.edu.ua;

Мета роботи. Розробка процедури оптимального керування мікромережею з альтернативними джерелами, зовнішнім електропостачанням та дизель-генераторною установкою.

Методи дослідження. Під час проведення дослідження використано методи постановки лінійних оптимізаційних задач та відповідно методи лінійного програмування, методи імітаційного моделювання у середовищі візуального програмування.

Отримані результати. У роботі проведено дослідження процесів керування режимами гібридної мікромережі, що включає сонячну електростанцію, вітроенергетичну установку, блок акумуляторної батареї, дизель-генератор та зовнішню електромережу. На основі розробленої моделі в середовищі MATLAB/Simulink проаналізовано енергетичні потоки та роботу підсистем мікромережі у чотирьох режимах її функціонування з варіацією потоків електричної енергії. Для оптимізації енергетичного балансу застосовано методи лінійного програмування, що дозволило мінімізувати витрати на електроенергію при дотриманні балансу потужності та забезпеченні стабільності напруги у встановлених стандартних межах. Отримані результати демонструють ефективність поєднання відновлюваних джерел, акумуляторної батареї та дизельної генерації в оптимальному керуванні мікромережею за рахунок балансування зарядом блоку акумуляторної батареї та підтверджують доцільність застосування оптимізаційних алгоритмів для керування енергетичними режимами.

Наукова новизна. Запропоновано цільову функцію для вирішення оптимізаційної задачі мінімізації фінансових витрат на електричну енергію в електроенергетичному комплексі мікромережі. Цільова функція враховує змінну вартість електроенергії під час обміну з зовнішньою мережею, обмеження на рівень заряду та розряду акумуляторної батареї, пріоритетність використання відновлюваних джерел енергії, а також доцільність залучення дизель-генераторної установки залежно від поточного енергетичного балансу та економічних умов.

Практична цінність. Отримані результати з використанням алгоритму оптимізації енергетичного балансу можуть бути використані для проектування систем енергоменеджменту та оптимального керування мікромережами з комбінованими джерелами енергії малої та середньої потужності.

Ключові слова: відхилення напруги, акумуляторна батарея, електрична енергія, оптимізація, витрати.

I. ВСТУП

У сучасному енергетичному середовищі мікромережі поступово набувають більшого значення як засіб інтеграції розподілених джерел енергії та акумуляторної батареї, забезпечуючи підвищену надійність, гнучкість і стійкість енергосистем. Для ефективного функціонування таких систем необхідно застосовувати комплексні системи управління та керування, які охоплюють стратегічні, оперативні та

функціональні аспекти мікромереж [1]. Існує велика кількість методів оптимізації потоку енергії та розподілу оперативних ресурсів у мікромережах та їх кластерах. Зазначається [2] що необхідна оптимізація керування мікромережею, тобто мінімізація витрат, максимізація використання альтернативних джерел енергії, збереження ресурсу акумуляторної батареї і забезпечення якості електроенергії є ключовою задачею сучасного енергоменеджменту. Зважаючи на велику кількість змінних в мікромережі, наприклад,

від надлишкової генерації та незапланованого навантаження до технологічних обмежень та комунікаційної інфраструктури оптимізаційні алгоритми та відповідна архітектура управління стають фундаментальними для побудови та експлуатації мікромереж.

II. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У роботі [3] представлено систему мікромережі, яка може працювати як у підключеному до мережі, так і в автономному режимі, з метою управління енергією та покращення якості електроенергії шляхом регулювання напруги та частоти. Система також включає схеми керування для підключення до мережі, що дозволяє ефективно управляти енергетичними потоками та забезпечувати стабільну роботу мікромережі. Алгоритми передбачення та оптимізації можуть бути складні для впровадження в існуючі системи з обмеженими ресурсами. Авторами роботи [4] розглядається система енергоменеджменту для мікромережі з відновлюваними джерелами, акумуляторною батареєю та електролізером для видобутку водню. І запропоновано метод керування на основі прогнозної моделі для оптимального розподілу енергії між компонентами системи. Система дозволяє запобігати перезарядженню батареї та ефективно використовувати надлишкову енергію. В той же час не дивлячись на досягнуті результати, що до контролю заряду акумуляторної батареї та прогнозу вітрової генерації, автори певними чином упускають з поля зору фінансові витрати. Деякі дослідники [5] відзначають, що вибір стратегії керування залежить від типів мікроджерел, наявності акумуляторних батарей, типу навантаження та зовнішньої мережі. Так як ємності енергозберігаючих засобів обмежені пропонується застосовувати декілька стратегій керування, щоб уникнути ризику перезарядження або недозарядження акумуляторної батареї. Однак автори не приділяють увагу фінансовим витратам під час експлуатації альтернативних джерел, а також особливостям їх введення та виведення із системи.

В роботі [6] запропоновано метод керування мікромережею з гнучкими межами генерації та споживання, що дозволяє змінювати її конфігурацію. Алгоритм у реальному часі обирає оптимальні межі для балансу між генерацією, споживанням та підключенням до мережі. Система передбачає захист батарей від перезаряду та глибокого розряду під час зміни конфігурації. Дослідження авторів спрямоване на енергетичну систему з потужністю вище середнього рівня, при цьому не приділена увага технічній реалізації засобів перемикання. Зважаючи на зазначене поза увагою залишені дизель-генераторні установки з їх особливостями експлуатації. Подібний підхід реалізований в роботі [7]. Мінімізація експлуатаційних витрат системи, зменшення викидів в навколишнє середовище та мінімізація фактора незручностей для клієнтів є основними цілями, що досягаються за допомогою

функцій придатності, що розглядаються в цій роботі. Розглянуті обмеження - це купівля та продаж з мережі, енергетичний баланс та потужність заряджання та розряджання акумулятора. Методика враховує варіативність генерації та споживання, знижуючи витрати на енергопостачання та підвищуючи ефективність системи. Узагальнюючи наведені вище дослідження відзначається раціональний інтерес дослідників до керування режимами поточкорозподілення в мікромережі. Зазвичай як джерела енергії розглядаються вітрові та сонячні, акумуляторної батареї та водневі елементи. Так чи інакше постає задача оптимізації поточкорозподілу шляхом керування відповідними елементами. Досить часто поза увагою залишаються генеруючі установки «фатального» рівня – дизель генеруючі.

III. МЕТА РОБОТИ

Розробка процедури оптимального керування мікромережею з альтернативними джерелами, зовнішнім електропостачанням та дизель-генераторною установкою.

IV. ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГУ МАТЕРІАЛУ І АНАЛІЗ ОТРИМАННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо схему гібридної мікромережі [8] представленою на рис. 1. Схема складається з таких елементів: зовнішньої мережі (М), трансформатора (ТР), дизельгенераторної системи (ДГС), батареї (Б), сонячної електростанції (СЕС), вітроенергетична установка (ВЕУ), навантаження (Н). Також в системі присутні блоки вимірювання потужності (БВ1-БВ6) та блоки керування генеруючими пристроями (БК1-БК4). Згідно з специфікацією [9] генеруючі пристрої та блоки вимірювання можуть підключатися один з одним для передачі показників в центр керування мікромережею (ЦКМ) та зворотнього зв'язку для керування.

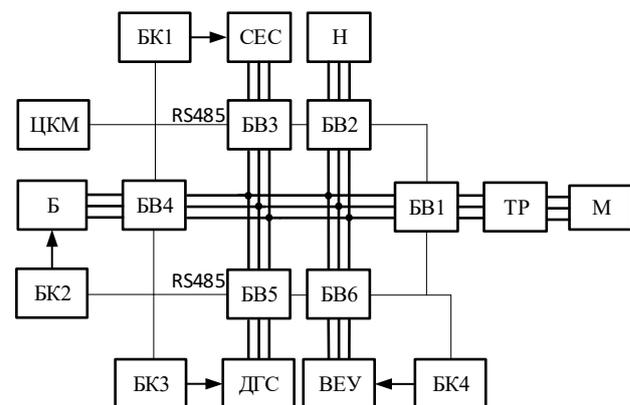


Рисунок 1. Схема гібридної мікромережі

Схема мікромережі (рис.1) подібна до більшості уже представлених схем з тією різницею, що в даній схемі додатково введений дизельний генератор. Оскільки більшість фізичних і технічних обмежень природно описуються лінійними співвідношеннями:

роботи елементів системи. Модель побудована у середовищі Simulink. Енергмережа моделюється в режимі Phasor із частотою 50 Гц для спрощеного та зручного представлення і аналізу сигналів у сталому режимі. Зовнішня мережа (External Grid) приєднана до мікромережі через трансформатор (Transformer) та комутується блоком (Breaker), який забезпечує передачу потужності між зовнішньою мережею та мікромережею залежно від команди блоку IslandTime, що визначає режим роботи — автономний або підключений до мережі. До вузла приєднані основні генеруючі підсистеми: сонячна електростанція (Photovoltaic system), вітроенергетична установка (Wind Turbine), дизельний генератор (Diesel Generator) та акумуляторна батарея (Battery). Сонячна установка представлена блоком Solar Array, генерація якої задається відповідними умовами в блоці (Irradiance Profiles). Вітрова установка моделюється блоком Wind Turbine, де генерація задається відповідними умовами у блоці time clearWind. Дизельний генератор представлено блоком DieselGenerator, який формує потужність відповідно до заданих умов з блоку time DieselPower і використовується для покриття дефіциту енергії або роботи в режимі ізольованої мікромережі. Акумуляторна батарея (Battery) працює під керуванням системи енергоменеджменту (Energy Management System), яка визначає режими заряду та розряду акумуляторної батареї відповідно до сигналів Pref, Qref та Mode, враховуючи баланс потужності в мережі. Кожен генеруючий елемент має виходи для контролю генерованої активної потужності (pvM,

battM, WindM, DieselM). У правій частині моделі розташоване навантаження, представлене блоками Variable Load та Load. Змінне навантаження моделює реальні коливання споживання енергії до 200 кВт з використанням сигналу time loadFluc, тоді як постійне навантаження задається потужністю $P = 5$ кВт.

Для вирішення задачі оптимізації необхідно розробити алгоритм керування мікромережею і на його основі буде відбуватися реалізація застосування оптимізації енергетичного балансу гібридної мікромережі. Алгоритм оптимізації енергетичного балансу гібридної мікромережі спрямований на мінімізацію витрат на електроенергію при одночасному забезпеченні стабільної роботи системи з допомогою дизельного генератора та раціональному використанні акумуляторної батареї наведено на рис.3.

На початковому етапі здійснюється ініціалізація вхідних параметрів, серед яких стан заряду акумуляторної батареї (SOC), її повна енергоємність, часовий крок моделювання, прогнозовані значення потужності сонячної станції, навантаження та вартості електроенергії. Крім того, задаються параметри елементів мікромережі – площа сонячних панелей, їхня ефективність, базове навантаження споживачів, ємність акумулятора та граничні значення потужності для режимів заряду і розряду.

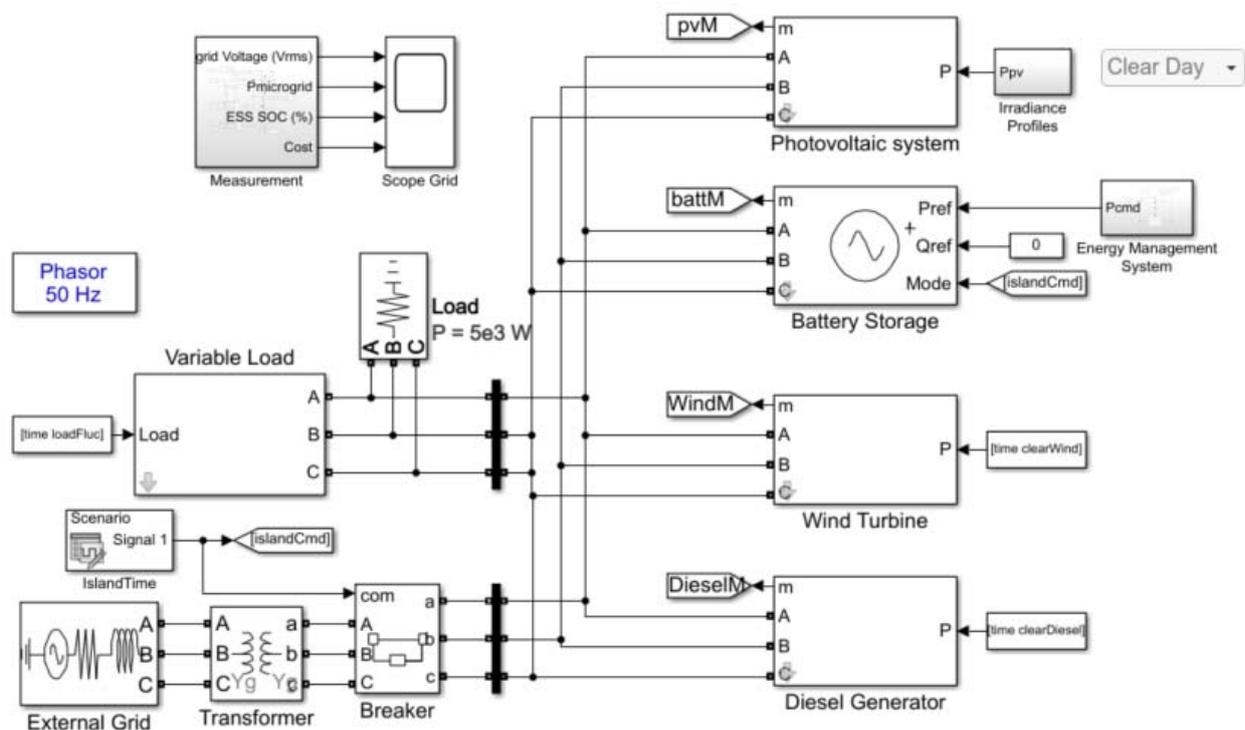


Рисунок 2. Гібридна мікромережа з паралельним під'єднанням до зовнішньої мережі

Після задання початкових даних формуються змінні оптимізації, які описують керовані параметри системи: потужність, споживану з електромережі, потужність акумуляторної батареї, запас енергії в ній та поточну вартість електроенергії. Для цих змінних встановлюються обмеження, що відображають фізичні межі роботи акумулятора. Зокрема, енергія батареї може змінюватися в межах від 20% до 80% від її номінальної ємності, що запобігає глибокому розряду та перенавантаженню. Потужність заряду та розряду обмежується значенням ± 200 кВт, де негативне значення відповідає розряду, а позитивне – заряду. Далі формується цільова функція, яка визначає критерій оптимізації. Її метою є мінімізація загальних витрат на електроенергію, спожиту з мережі, з урахуванням кінцевого стану заряду батареї. Це виражається як мінімізація функціоналу, що включає добуток прогнозованої ціни на електроенергію на потужність із мережі за часового кроку, а також враховує залишкову енергію в батареї через ваговий коефіцієнт.

$$J = C_{el} P_{gr} dt - E_{bat} SOC \cdot FW \rightarrow \min .$$

де C_{el} – вартість електроенергії; P_{gr} – потужність мікромережі; dt – часовий крок; E_{bat} – енергія батареї; SOC – стан заряду батареї; FW – кінцевий стан батареї.

Таким чином, алгоритм спрямований на пошук компромісу між зменшенням витрат і підтриманням певного рівня заряду акумулятора наприкінці прогнозного періоду.

Після визначення цільової функції здійснюється контроль балансу генерації та споживання в системі. Для кожного кроку оптимізації забезпечується рівність між сумарною генерацією і споживанням, тобто потужність навантаження покривається сумою потужності від фотоелектричної установки вітроенергетичної установки, дизельного генератора, мережі та акумулятора. Якщо енергії від генеруючих установок недостатньо, дефіцит компенсується за рахунок дизельного генератора, батареї або електромережі. У разі надлишку генерованої потужності вона використовується для заряджання батареї та для передачі в зовнішню мережу. Паралельно розраховується баланс енергії батареї, який описує зміну її стану заряду в часі. Поточна енергія визначається:

$$E_B(n+1) = E_B(n) - P_B(n) dt .$$

$E_B(n)$ – енергія акумулятора на кроці n , $P_B(n)$ – потужність генерована батареєю на кроці n , dt – тривалість кроку моделювання.

Це дозволяє точно моделювати процеси заряду та розряду. Далі формується баланс потужності всієї

системи, який враховує суму всіх елементів мікромережі.

$$P_{PV} + P_{WT} + P_{DG} + P_G + P_{Bat} = P_{gr} .$$

де P_{PV} – потужність генерована сонячною електростанцією; P_{WT} – потужність генеровано вітроенергетичною установкою; P_{DG} – потужність генерована дизельним генератором; P_G – потужність генерована зовнішньою мережею; P_B – потужність генерована батареєю.

Згідно з алгоритмом переходимо до етапу розв'язання задачі лінійного програмування. Всі змінні, обмеження та рівняння формуються у вигляді математичної моделі оптимізації (1-6), яка вирішується стандартними методами, наприклад засобами MATLAB Optimization Toolbox. У процесі розв'язання знаходяться оптимальні значення потужності, енергії та споживання, які забезпечують мінімальні витрати при дотриманні всіх обмежень системи. Після отримання результатів проводиться їх аналіз. Перевіряється коректність розв'язку та виконання всіх умов моделі, зокрема позитивність знайдених значень потужності та енергії, а також дотримання енергетичного балансу. Якщо рішення не відповідає вимогам або виходить за допустимі межі, алгоритм повторює обчислення з оновленими параметрами. У разі успішного знаходження оптимального рішення виконується передача результатів – визначаються оптимальні значення потужності батареї та її енергетичного стану для поточного моменту часу.

На завершальному етапі результати передаються до системи керування мікромережею, де використовуються для прийняття рішень щодо заряду, розряду акумуляторної батареї та споживання або генерації в зовнішню мережу з електромережею. Отримані дані також можуть слугувати початковими умовами для наступного прогнозного періоду. Після цього алгоритм завершує роботу або переходить до нового циклу оптимізації. Таким чином, розроблена схема забезпечує економічно обґрунтоване керування енергетичними потоками в гібридній мікромережі.

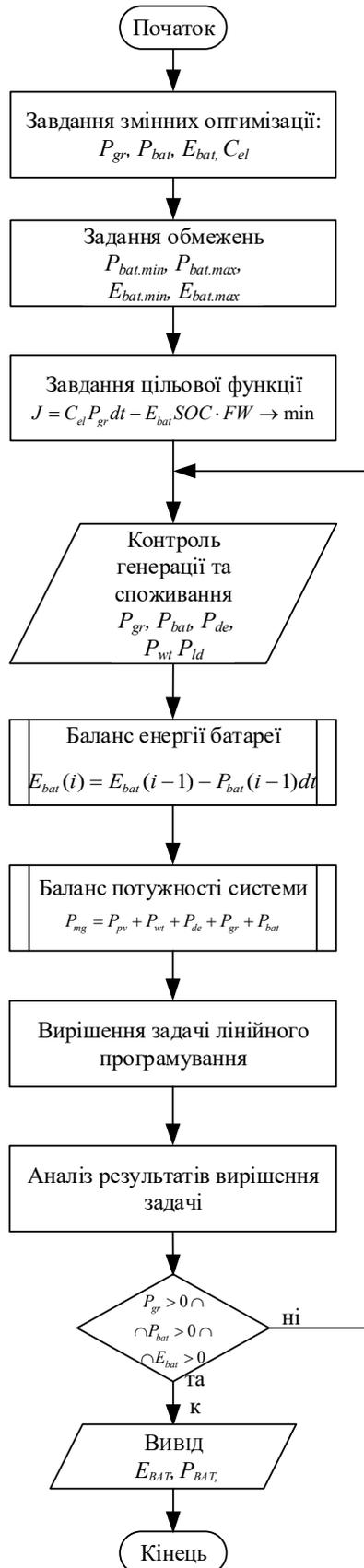


Рисунок 3. Алгоритм оптимізації енергетичного балансу гібридної мікромережі

Для забезпечення економічно обгрунтованого керування енергетичними потоками в подальших дослідженнях спираємось на вартість за електроенергію, що змінюється протягом дня. Графік зміни вартості електроенергії протягом дня приймемо для даної задачі таким як наведено на рис. 4.

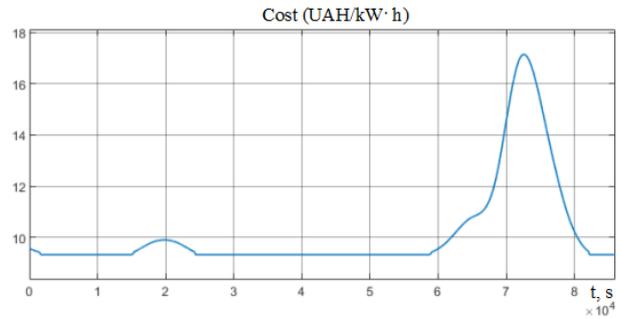


Рисунок 4. Графік вартості електроенергії

У режимі №1 (рис. 5) зовнішня електрична мережа (External Grid) залишається під'єднаною протягом усього періоду моделювання, а всі генеруючі установки працюють, окрім дизель-генератора (Diesel Generator). Напряга мікромережі (Microgrid Voltage (Urms)) зберігає стабільний характер, хоча у моменти перемикання між режимами помітні незначні коливання, що є типовою реакцією системи на зміну потоків потужності. Основне покриття навантаження забезпечують сонячна електростанція (Photovoltaic system), вітроенергетична установка (Wind Turbine) та зовнішня мережа (External Grid), тоді як акумуляторна батарея (Battery Storage) бере участь у балансуванні енергетичних потоків: її рівень заряду поступово зростає на ділянках надлишку генерації, а в періоди збільшеного навантаження частково зменшується.

Графік фінансових витрат на електроенергію (Cost) демонструє загальне зниження фінансових витрат у цьому режимі, що пов'язано з активним використанням відновлюваних джерел енергії та доступністю зовнішньої мережі. Оскільки дизель-генератор не вводиться в роботу, а акумуляторна батарея працює в межах помірних циклів зарядження та розрядження, система досягає економічно вигідного режиму, забезпечуючи стабільне електропостачання без додаткових витрат на паливо.

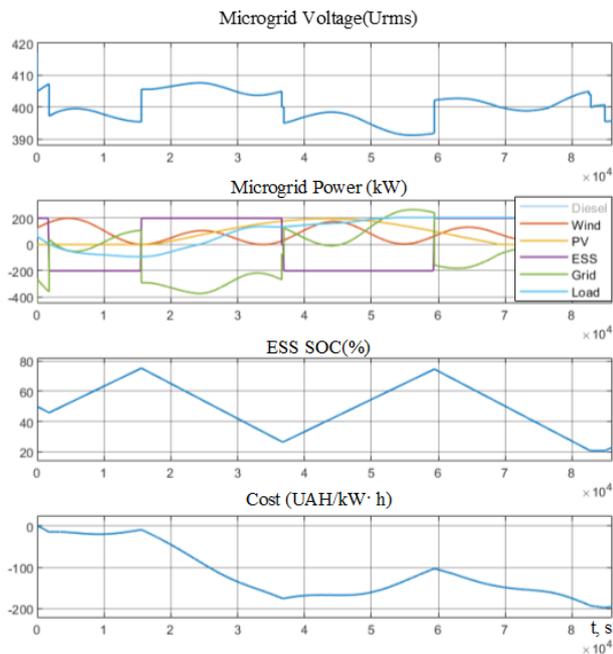


Рисунок 5. Часові діаграми режиму роботи мікромережі, режим № 1

У режимі №2 (рис. 6) живлення мікромережі забезпечується переважно сонячною електростанцією (Photovoltaic system) та акумуляторною батареєю (Battery Storage), оскільки дизель-генератор (Diesel Generator) та вітроенергетична установка (Wind Turbine) залишаються вимкненими. Напруга мікромережі (Microgrid Voltage (Urms)) зберігає стабільність протягом усього періоду моделювання, хоча у моменти включення та виключення зовнішньої мережі (External Grid) спостерігаються короткочасні провали, які оперативним чином компенсуються акумуляторною батареєю.

Рівень заряду акумуляторної батареї (ESS SOC) протягом більшої частини часу зростає, досягаючи максимального значення та перевищуючи допустиму межу в 80 %, що вказує на надлишок енергії від сонячної генерації та некоректність заданих обмежень у цьому режимі роботи. Сонячна електростанція генерує достатній рівень потужності для повного покриття навантаження і додаткового заряджання акумуляторної батареї.

Графік фінансових витрат на електроенергію (Cost) демонструє поступове збільшення фінансових витрат у кінці інтервалу моделювання, що зумовлено відключенням зовнішньої електричної мережі та необхідністю покриття дефіциту за рахунок розряджання акумуляторної батареї. У цей період акумуляторна батарея переходить у режим віддачі потужності, забезпечуючи живлення мікромережі в умовах повної відсутності генерації з боку дизель-генератора та вітроенергетичної установки.

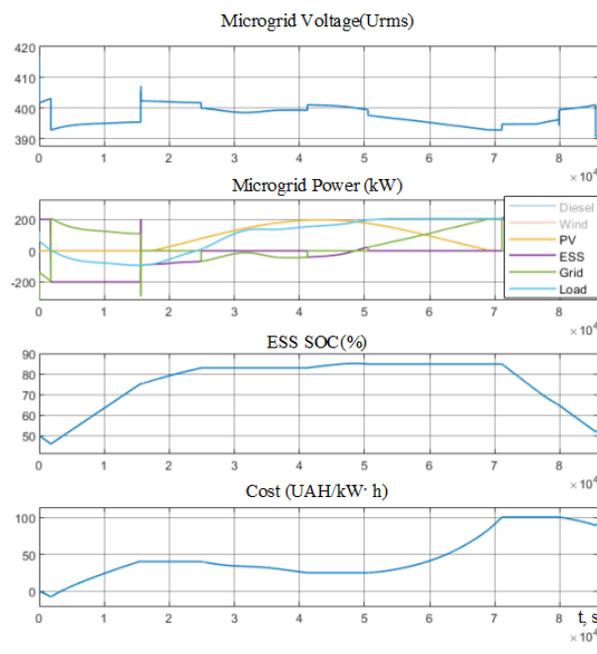


Рисунок 6. Часові діаграми режиму роботи мікромережі, режим №2

У режимі №3 (рис. 7) всі генеруючі установки — дизель-генератор (Diesel Generator), сонячна електростанція (Photovoltaic system) та вітроенергетична установка (Wind Turbine) — вимкнені, тому єдиним активним джерелом живлення мікромережі виступає акумуляторна батарея (Battery Storage). Напруга мікромережі (Microgrid Voltage (Urms)) залишається відносно стабільною завдяки роботі акумуляторної батареї, хоча на початку моделювання та в момент відключення зовнішньої мережі (External Grid) спостерігаються незначні коливання, характерні для переходу в автономний режим.

Рівень заряду акумуляторної батареї (ESS SOC) поступово зменшується протягом усього інтервалу, що відображає її безперервний розряд у відповідь на відсутність будь-якої генерації зі сторони сонячної електростанції, вітрової установки та дизель-генератора. Після остаточного вимкнення зовнішньої електричної мережі навантаження повністю забезпечується енергією, яка надходить від акумуляторної батареї що прискорює процес зниження її заряду.

Графік фінансових витрат на електроенергію (Cost) демонструє поступове зростання фінансових витрат у міру того, як зовнішня мережа частково або повністю відключається, і мікромережа змушена працювати виключно за рахунок акумуляторної батареї. Оскільки інші джерела генерації недоступні, акумуляторна батарея бере на себе повне покриття навантаження, що є малоефективним з економічної точки зору та призводить до максимізації вартості

через відсутність дешевих відновлюваних або мережевих ресурсів..

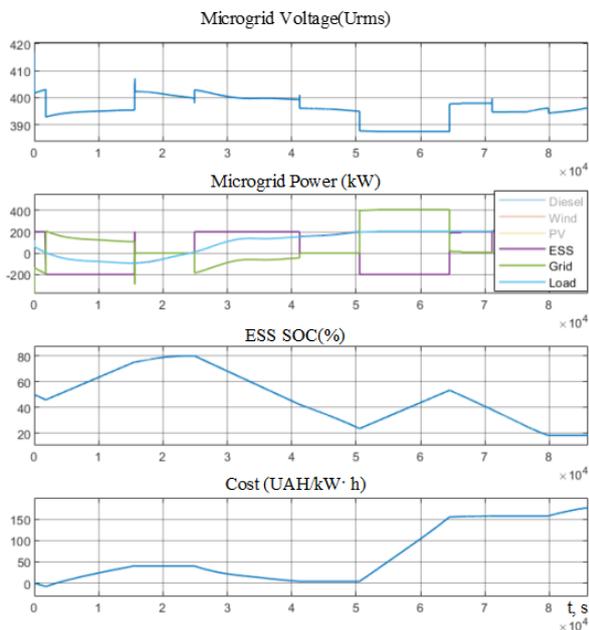


Рисунок 7. Часові діаграми режиму роботи мікромережі, режим №3

У режимі №4 (рис. 8) під час відключення зовнішньої електричної мережі (External Grid) мікромережа переходить у автономний режим, що супроводжується короткочасними провалами напруги, які видно на графіку напруги мікромережі (Microgrid Voltage (Urms)). Після цього стабілізація режиму здійснюється дизель-генератором (Diesel Generator), який бере на себе основне навантаження та забезпечує підтримання енергетичного балансу в умовах обмеженої або відсутньої генерації від інших джерел.

Графік потоків потужності (Microgrid Power (kW)) показує, що дизель-генератор забезпечує більшу частину виробітку. Акумуляторна батарея (Battery Storage) активно підлаштовується під динаміку роботи мікромережі: у моменти втрати зовнішньої мережі вона переходить у режим розрядження для підтримання живлення, а після встановлення стабільності та появи резервної генерації частково заряджається, що відображено на графіку рівня заряду акумулятора (ESS SOC).

Наприкінці інтервалу акумуляторна батарея знову починає розряджатися, компенсуючи зміни навантаження та підтримуючи енергопостачання в умовах підвищеної вартості електроенергії (Cost) та обмеженої генерації. Графік фінансових витрат на електроенергію демонструє різке зростання фінансових витрат у другій половині періоду, що пов'язано із залежністю мікромережі від роботи

дизель-генератора та переходом у повністю автономний режим.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

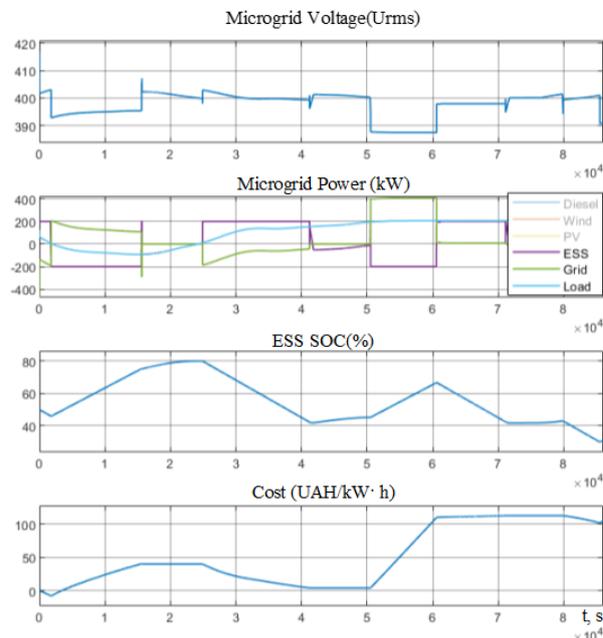


Рисунок 8. Часові діаграми режиму роботи мікромережі, режим №4

V. ВИСНОВКИ

У ході роботи сформульовано оптимізаційну задачу з мінімізації фінансових витрат на електричну енергію в електроенергетичному комплексі, який включає в себе електричну мережу, змінне та незмінне навантаження, системи акумулювання на базі електролітичної акумуляторної батареї, вітрогенеруючу, сонячну та дизельну електростанції. В якості балансуєчого за потужністю елемента обрано систему акумулювання на базі електролітичного акумулятора.

Запропонований алгоритм реалізації задачі оптимізації, який враховує поточну вартість електричної енергії, яка циркулює між мікромережею та зовнішньою мережею, з урахуванням обмежень на рівень заряду/разряду акумуляторної батареї та доцільністю використання дизель-генератора.

Аналіз режимів підтвердив, що найбільш ефективним є режим з роботою мікромережі при активному використанні відновлюваних джерел і оптимізований підтримці з боку акумуляторної батареї, тоді як дизель-генератор доцільно вводити лише у випадках критичного дефіциту енергії та/або вимкнення зовнішньої мережі.

Отримані результати можуть бути використані для проектування систем енергоменеджменту та

оптимального керування мікромережами з комбінованими джерелами енергії малої та середньої потужності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Athafa A., Saghafi H. Microgrid power management and control fundamentals: A technical review // *Proceedings of the 7th National Conference on New Ideas in Electrical Engineering*. – Isfahan : Department of Electrical Engineering, Isfahan (Khorasgan) Branch, Islamic Azad University, 2023.
- [2] Xing X., Jia L. Energy management in microgrid and multi-microgrid // *IET Renewable Power Generation*. – 2024. – Vol. 18. – P. 3480–3508. – DOI: 10.1049/rpg2.12816
- [3] Vemuri E., Kumar A., Tonmoy I., Panda K. P., Prince S., Babu N. P., Panda G. Power management and control in microgrid system // *Proceedings*. – 2022. – Chapter 50. – DOI: 10.1007/978-981-16-9033-4_50.
- [4] Toure I., Payman A., Camara M.-B., Dakyo B. Energy management in a renewable-based microgrid using a model predictive control method for electrical energy storage devices // *Electronics*. – 2024. – Vol. 13, No. 23.
- [5] Maruf A., Solomon K. A review of control strategies for microgrids // *Advances in Research*. – 2016. – Vol. 7. – P. 1–9. – DOI: 10.9734/AIR/2016/25722./10.9734/AIR/2016/25722
- [6] Hu X., Liu T., He C., Ma Y., Su Y., Yin H., Wang F., Tolbert L., Wang S., Liu Y. A real-time power management technique for microgrid with flexible boundaries // *IET Generation, Transmission & Distribution*. – 2020. – Vol. 14. – DOI: 10.1049/iet-gtd.2019.1576.
- [7] Osama A., Allam D., Fathy A., Abdelaziz A. Y., Kim W.-W., Hong J., Geem Z. W. Optimal energy managing and power scheduling of a microgrid in grid-connected mode using a modified multi-objective manta ray technique // *Energy Reports*. – 2025. – Vol. 13. – P. 4781–4799. – DOI: 10.1016/j.egyr.2025.03.036.
- [8] Oliynichenko M., Bialobrzheskyi O., Postil A. Research on power distribution in a microgrid with distributed electricity sources // *Electrical Engineering and Power Engineering*. – 2025. – No. 1. – P. 42–52. – DOI: 10.15588/1607-6761-2025-1-5.
- [9] Олійніченко М. Ю., Бялобржеський О. В., Постіл А. О., Шокар'єв Д. А. Мікромережа з альтернативними джерелами енергії для потреб сільськогосподарських підприємств // *Енергозбереження. Енергетика. Енергоаудит*. – 2025. – № 8 (211). – DOI: 10.20998/2313-8890.2025.08.02.
- [10] Ладієва Л. Р. Методи оптимізації та пошуку оптимальних рішень : навч. посіб. [Електронне мережне видання]. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023.

Надійшла (Received) 01.12.2025;

Прийнята (Accepted) 22.12.2025;

Опублікована (Published) 30.03.2026;

INVESTIGATION OF ELECTRICITY COSTS DURING ENERGY FLOW OPTIMIZATION IN A MICROGRID WITH DISTRIBUTED ENERGY SOURCES UNDER CONDITIONS OF UNSTABLE GENERATION

- OLIYNICHENKO M.Y. PhD student at the Department of Electrical Engineering, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, Kremenchuk,, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6651-0175>, e-mail: oliynichenko@kdu.edu.ua;
- BIALOBRZHESKYI O.V. D., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Electrical Engineering, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, Kremenchuk, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1669-4580>, e-mail: bialobrzheski@ukr.net;
- POSTIL A.O. PhD student at the Department of Electrical Engineering, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, Kremenchuk,, Ukraine, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9411-7047>, e-mail: artur_postil@kdu.edu.ua;

Purpose. Development of an optimal control procedure for a microgrid with alternative energy sources, external power supply, and a diesel generator unit

Methodology. In the course of the study, methods of formulating linear optimization problems and corresponding linear programming techniques were used, as well as simulation modeling methods within a visual programming environment.

Findings. The study investigates the control processes of a hybrid microgrid that includes a solar power plant, a wind energy installation, a battery storage unit, a diesel generator, and an external power grid. Using a developed model in the MATLAB/Simulink environment, the energy flows and the operation of the microgrid subsystems were analyzed under four operating modes with varying electrical power flows. Linear programming methods were applied

to optimize the energy balance, enabling the minimization of electricity costs while maintaining power balance and ensuring voltage stability within standard limits. The obtained results demonstrate the effectiveness of combining renewable energy sources, battery storage, and diesel generation for optimal microgrid control by balancing the battery storage unit's state of charge and confirm the feasibility of applying optimization algorithms for managing energy operating modes.

Originality. An objective function is proposed for solving the optimization problem of minimizing financial costs for electrical energy in a microgrid power system. The objective function accounts for the variable cost of electricity during power exchange with the external grid, constraints on the state of charge and discharge of the battery energy storage system, prioritization of renewable energy sources, as well as the economic feasibility of engaging a diesel generator unit depending on the current energy balance and economic conditions.

Practical value. The obtained results using the energy balance optimization algorithm can be applied to the design of energy management systems and optimal control of microgrids with combined low- and medium-power energy sources.

Keywords: harmonics; voltage deviation, battery storage, electrical energy, optimization, costs.

REFERENCE

- [1] Athafa A., Saghafi H. Microgrid power management and control fundamentals: A technical review // *Proceedings of the 7th National Conference on New Ideas in Electrical Engineering*. – Isfahan : Department of Electrical Engineering, Isfahan (Khorasgan) Branch, Islamic Azad University, 2023.
- [2] Xing X., Jia L. Energy management in microgrid and multi-microgrid // *IET Renewable Power Generation*. – 2024. – Vol. 18. – P. 3480–3508. – DOI: 10.1049/rpg2.12816
- [3] Vemuri E., Kumar A., Tonmoy I., Panda K. P., Prince S., Babu N. P., Panda G. Power management and control in microgrid system // *Proceedings*. – 2022. – Chapter 50. – DOI: 10.1007/978-981-16-9033-4_50.
- [4] Toure I., Payman A., Camara M.-B., Dakyo B. Energy management in a renewable-based microgrid using a model predictive control method for electrical energy storage devices // *Electronics*. – 2024. – Vol. 13, No. 23.
- [5] Maruf A., Solomon K. A review of control strategies for microgrids // *Advances in Research*. – 2016. – Vol. 7. – P. 1–9. – DOI: 10.9734/AIR/2016/25722./10.9734/AIR/2016/25722
- [6] Hu X., Liu T., He C., Ma Y., Su Y., Yin H., Wang F., Tolbert L., Wang S., Liu Y. A real-time power management technique for microgrid with flexible boundaries // *IET Generation, Transmission & Distribution*. – 2020. – Vol. 14. – DOI: 10.1049/iet-gtd.2019.1576.
- [7] Osama A., Allam D., Fathy A., Abdelaziz A. Y., Kim W.-W., Hong J., Geem Z. W. Optimal energy managing and power scheduling of a microgrid in grid-connected mode using a modified multi-objective manta ray technique // *Energy Reports*. – 2025. – Vol. 13. – P. 4781–4799. – DOI: 10.1016/j.egyr.2025.03.036.
- [8] Oliynichenko M., Bialobrzheskyi O., Postil A. Research on power distribution in a microgrid with distributed electricity sources // *Electrical Engineering and Power Engineering*. – 2025. – No. 1. – P. 42–52. – DOI: 10.15588/1607-6761-2025-1-5.
- [9] Oliynichenko M., Bialobrzheskyi O., Postil A., Shokariov D. Microgrid with alternative energy sources for the needs of agricultural enterprises // *Energy Saving. Power Engineering. Energy Audit*. – 2025. – No. 8 (211). – DOI: 10.20998/2313-8890.2025.08.02.
- [10] Ladiieva L. R. Methods of Optimization and Search for Optimal Solutions : textbook [Electronic network edition]. – Kyiv : Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2023.

RESEARCH ON ENSURING ANNUAL ENERGY CONSUMPTION OF A RESIDENTIAL BUILDING WITH A PHOTOELECTRIC PLANT

- ZAMKOVA O.A. Postgraduate student of the electric power engineering of the Dnipro University of Technology, Dnipro, Ukraine ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7542-9536>, e-mail: Zamkova.O.A@nmu.one;
- KOSHELENKO A.O. Postgraduate student of the electric power engineering of the Dnipro University of Technology, Dnipro, Ukraine ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-3983-2572>, e-mail: Koshelenko.A.O@nmu.one;

Purpose. To assess the capability of rooftop photovoltaic power plant (PVPP) to supply the operation of engineering systems in multi-apartment residential buildings and to determine a set of engineering and technical measures that ensure the effective integration of rooftop photovoltaic power plants in order to achieve regulatory energy-efficiency indicators and minimize climate impact.

Methodology. Calculation and analytical methods were applied to determine the energy consumption of residential buildings, along with a methodology for calculating electrical loads of multi-apartment buildings to evaluate changes in electricity demand under different configurations of building climate systems. Scenario analysis and energy modeling were used to assess the interaction between heating technologies, operating conditions, and renewable energy generation.

Findings. Rooftop photovoltaic systems equipped with modern photovoltaic modules and inverter equipment and installed on typical five-storey multi-apartment residential buildings are capable of covering the annual electricity demand of building climate systems, which corresponds to the requirements for achieving operational climate neutrality. Comprehensive modeling was carried out to analyze the interaction between building climate system configurations, energy sources, heating system temperature regimes, and actual outdoor temperature conditions on the achievable level of energy efficiency in typical residential buildings. The modeling of rooftop photovoltaic system operation and the comparison of expected electricity generation with the electricity demand of thermally modernized buildings equipped with heat-pump-based climate systems demonstrated the feasibility of balancing annual energy consumption with on-site renewable generation. It was found that comprehensive thermal modernization of typical five-storey buildings combined with the transition to electric heating using heat pumps as the primary heat source enables the electricity demand of building climate systems to be supplied by rooftop photovoltaic systems.

Originality. The study substantiates a set of energy-efficient measures, including the integration of rooftop photovoltaic systems, that allow achieving operational climate neutrality indicators for typical five-storey multi-apartment residential buildings. It is shown that the transition to heat-pump-based electric heating can reduce electricity consumption by 1,8-2,0 times under actual average outdoor temperature conditions compared with conventional electric heating systems. Furthermore, the implementation of low-temperature heating regimes reduces electricity consumption by 2,8-3,2 times compared with direct electric heating and enables achieving operational climate neutrality for building climate systems.

Practical value. The results can be applied in the development of renovation projects for existing multi-apartment residential buildings, in new residential construction, and in the design of electric heating systems that utilize electricity generated by rooftop photovoltaic systems. The proposed solutions contribute to the objectives of the Energy Strategy of Ukraine until 2035, strengthen national energy security, and support the implementation of international commitments on reducing primary energy consumption and greenhouse gas emissions.

Keywords: energy efficiency; photovoltaic system; electricity consumption; climate neutrality; building climate systems; heat pump.

I. INTRODUCTION

Ukraine participates in international initiatives aimed at climate change adaptation, reduction of greenhouse gas emissions, and the transition to a low-carbon economy. In this context, increasing the energy efficiency of buildings and gradually introducing renewable energy sources (RES) to meet consumer

energy demand are becoming particularly important [1].

The main challenges faced by residential building owners when implementing renewable energy sources, particularly rooftop photovoltaic systems as the most widespread renewable energy technology, include:

- the legal status of the roof;
- the technical condition of the roofing structures;

- the load-bearing capacity of building structures;
- the complexity of connection to internal electrical networks;
- limited electricity generation capacity.

Internal building electrical networks are often outdated and were not designed to receive and distribute energy from distributed generation facilities. Modernization of power supply systems and replacement of electrical networks require significant additional financial resources. In addition, the mismatch between peak electricity consumption and generation periods prevents buildings from achieving energy autonomy. These challenges often create barriers to the integration of solar power plants into building energy systems.

The residential sector is one of the largest consumers of energy resources. Climate control systems, including heating and cooling, account for the largest share of energy consumption in the annual energy balance of buildings. In order to fulfill national and international commitments, regulatory requirements are being introduced to improve the efficiency of energy use and reduce greenhouse gas emissions.

One of the technical solutions increasingly used in new residential construction projects is the implementation of electric heating systems. This approach allows achieving the minimum energy performance requirements of buildings in accordance with the Law of Ukraine "On Energy Efficiency of Buildings" by minimizing losses in district heating networks and due to the relatively simple control and higher efficiency of electric heating systems compared to centralized and autonomous heating systems based on fossil fuels. However, such a solution cannot always be implemented in existing buildings due to the limited capacity of electrical networks to accommodate additional loads associated with the transition to electric heating.

A promising solution is the integration of heat pumps into building climate control systems. The use of such systems allows heat energy to be obtained with relatively low electricity consumption [2].

One of the approaches to improving the energy efficiency of building heating systems is the use of low-temperature heating supply schedules. These schedules reduce electrical loads, improve the efficiency of heat utilization, and increase the performance of heat pumps. Studies show that the combination of modern heating systems with energy-efficient technologies significantly reduces building energy consumption and improves their overall energy performance [3].

Renewable energy sources are also increasingly used in building energy supply systems to improve energy efficiency. Their implementation reduces dependence on conventional energy resources and contributes to decreasing environmental impacts. Recent studies emphasize the importance of integrated application of various energy-saving technologies to improve the overall efficiency of building energy systems [4].

Thus, a relevant scientific task is the comprehensive

assessment of energy consumption in residential buildings when implementing rooftop photovoltaic systems and transitioning from conventional to combined climate control systems using heat pumps.

II. ANALYSIS OF LAST RESEARCHES

The residential sector is one of the largest consumers of energy and a significant source of greenhouse gas emissions. According to international reviews, buildings account for up to 40% of global final energy consumption. Climate control systems and domestic hot water supply represent a major share of this energy consumption. To ensure the operation of these systems, buildings largely rely on fossil energy resources [5].

In recent years, there has been growing interest in methods and technologies capable of significantly reducing both primary energy consumption and greenhouse gas emissions from residential buildings. One promising solution is the integration of rooftop photovoltaic systems with heat pumps (HP), which together ensure high efficiency in energy resource utilization [6].

The use of hybrid energy supply systems combining heat pumps and photovoltaic systems potentially allows simultaneous coverage of building thermal and electrical energy demand, opening the way to achieving near-zero energy building (NZEB) performance levels [6]. In [7], it is shown that the combination of heat pumps and photovoltaic panels significantly reduces energy consumption and operational costs while contributing to substantial reductions in greenhouse gas emissions.

Practical monitoring studies confirm that in multi-apartment buildings with high energy performance levels, the use of heat pumps combined with photovoltaic systems or solar thermal collectors can provide an annual energy balance, especially when applying comprehensive measures to reduce heat losses in the building envelope [8].

Increasing the share of heat pumps and renewable energy sources in building energy supply is considered one of the key directions of decarbonization in the residential sector in Ukraine and Europe. For example, market analysis data indicate a significant increase in heat pump sales in EU countries, reflecting stronger renewable energy support policies and a shift away from gas- and solid-fuel-based heating systems [9].

Despite numerous advantages, the integration of photovoltaic systems and heat pumps in residential buildings faces several technical and economic challenges. These include increased peak electrical loads during the transition to electric heating, the need for optimal placement of photovoltaic panels, ensuring reliable operation during cold periods, and determining effective strategies for electrical and thermal energy balancing [10].

This article presents a comprehensive analysis of energy consumption in a residential building equipped

with a rooftop photovoltaic system when transforming the heating system and introducing a heat pump as the main energy source for building climate systems. The calculations were carried out according to current methodologies for determining building energy consumption and designing electrical equipment for civil facilities (DSTU 9190:2022, DBN V.2.5-23) in order to determine the baseline annual load, analyze renewable energy integration scenarios, and assess the potential for achieving climate neutrality.

III. FORMULATION OF THE WORK PURPOSE

To assess the capability of rooftop photovoltaic power plant to supply the operation of engineering systems in multi-apartment residential buildings and to determine a set of engineering and technical measures that ensure the effective integration of rooftop photovoltaic power plants in order to achieve regulatory energy-efficiency indicators and minimize climate impact.

IV. EXPOUNDING THE MAIN MATERIAL AND RESULTS ANALYSIS

Electrical loads of a building are calculated based on the requirements of DBN V.2.5-23. The analysis of this regulatory document shows that electrical loads are determined for buildings without considering the energy efficiency class indicators and expected energy consumption modes.

According to the specified methodology, the calculated load of a group of dwellings with the same specific electrical load, referred to the supply line, building input, or 0,4 kV transformer substation busbars, P_{dwN} is determined by the following formula [11]:

$$P_{dwN} = P_{dwS} \cdot N,$$

where P_{dwS} – specific calculated electrical load of one dwelling (apartment), selected according to Table 3.1 [11] depending on the adopted electrification level and the number of apartments connected to the given network section, kW/dwelling;

N – number of dwellings (apartments) connected to the input line or transformer substation.

Appendix D, Table D.2 [11] provides an example of calculating loads for type-1 dwellings using full electric heating for apartments with an average area of 70 m² and an electric stove of 8,5 kW (see Table 1).

Table 1. Example of determining calculated loads of type-1 dwellings using full electric heating (average apartment area 70 m² with an 8,5 kW electric stove)

Groups of electricity consumers in a dwelling	Specific calculated load, kW/dwelling (number of dwellings)		
	12	24	100
Type-1 dwelling	3,76	2,72	1,73
Direct electric heating	7,37	7,37	7,37
Total with electric heating	11,13	10,09	9,1

Modern approaches to comprehensive energy modernization of buildings and bringing them into compliance with the minimum requirements established by the Law of Ukraine “On Energy Efficiency of Buildings” significantly affect the energy consumption of engineering systems, particularly heating and cooling systems. Therefore, it becomes necessary to assess the specific load of direct electric heating and heating systems using heat pumps for different classes and types of residential buildings. This makes it possible to take into account the actual condition of residential buildings, the installed engineering equipment, and to refine specific energy consumption indicators for selecting the main electrical equipment of building power networks.

An improved algorithm for determining electrical loads is proposed, which takes into account energy efficiency indicators (Fig. 1) determined using the methodology approved by DSTU 9190. These indicators are converted into electricity consumption of the heating system.

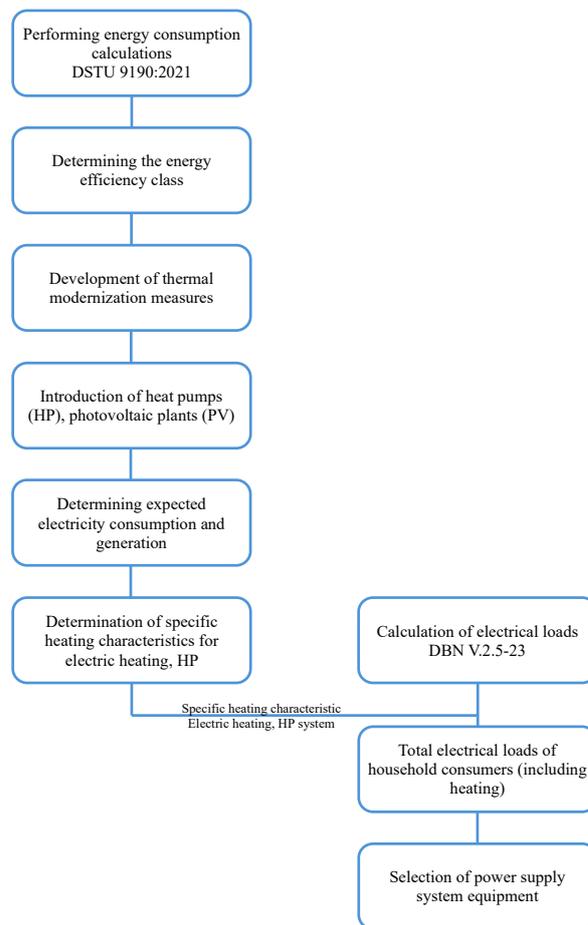


Figure 1. Algorithm for determining building electrical loads

To compare the generation and consumption modes of electrical and thermal energy in a typical building equipped with a rooftop photovoltaic system, the main

energy consumption indicators were modeled according to existing methodologies.

The determination of the annual and monthly energy demand and consumption of the heating system was carried out according to the methodology approved by DSTU 9190:2022 [12]. The methodology defines the annual energy balance of the building, which includes:

- transmission heat losses through building envelopes;
- ventilation losses;
- internal heat gains;
- solar heat gains.

The energy demand of the heating system is determined by the formula [12]:

$$Q_{H,nd} = Q_{H,nd,cont} = Q_{H,ht} - \eta_{H,gn} Q_{H,gn} - Q_{ve,pre-heat}$$

where $Q_{H,nd,cont}$ – energy demand for continuous building heating, $W \cdot h$, must be ≥ 0 ;

$Q_{H,ht}$ – total heat transfer in heating mode, $W \cdot h$, defined in accordance with 7.2.3.1 [12];

$\eta_{H,gn}$ – dimensionless gain utilization factor, defined in accordance with 12.2 [12];

$Q_{H,gn}$ – total heat gains during heating operation, $W \cdot h$, defined in accordance with 7.2.3.2 [12];

$Q_{ve,pre-heat}$ – energy demand for central preheating of ventilation air, $W \cdot h$ defined in accordance with 9.4 [12].

To model energy consumption modes of building climatization systems (heating and air conditioning), a typical four-entrance five-storey multi-apartment residential building located in the city of Dnipro was used. The number of apartments per floor is four in the corner entrances and three in the intermediate entrances, which corresponds to typical layouts. According to DBN V.2.6-31:2021 [13], the building is located in the first temperature zone. The building walls are made of 400 mm expanded clay concrete blocks, which do not meet the minimum energy efficiency requirements in terms of thermal properties. Transparent structures include windows, glazing of balconies and loggias mainly made of double-chamber glazing units in 5-7 chamber aluminum profiles; some double wooden windows remain. Such a condition of transparent structures is typical for most residential buildings in Ukraine. Facade glazing coefficient 0,22 which is typical for this type of building. The roof structure is a combined flat roof consisting of reinforced concrete panels, a slope-forming layer, and roofing felt. The floor above the unheated basement is the floor of the first level and consists of a 220 mm reinforced concrete slab covered with a cement-sand screed and decorative finishing. Both the roof slab and the slab above the basement require thermal insulation according to current energy efficiency standards. The external entrance doors are insulated metal

doors with vestibules and do not require modernization. The total heated area of the building is 3974,9 m².

The building climatization systems include a centralized heating system with an elevator unit at the input and a dependent connection scheme, as well as individual household air conditioners with split systems that provide cooling for separate rooms and apartments. The heating system uses hot water as the heat carrier with a temperature schedule of 80/60 °C, which is typical for most Ukrainian cities.

The heating system operation was modeled under the following conditions:

- absence of circulation pumps, the circulation of the coolant in the heating system is carried out due to the pressure difference in the supply and return pipelines.;
- one-pipe dead-end vertical heating system with bottom distribution;
- steel pipelines;
- steel and cast-iron radiators placed along external walls;
- partial absence or damage of pipeline insulation in unheated spaces;
- manual riser and radiator valves as regulating fittings, partially absent.

These conditions are typical for most multi-apartment buildings, allowing the obtained simulation results to be considered representative for this building class.

For typical five-storey apartment buildings constructed between 1950 and 1980, the energy consumption of climatization systems before comprehensive thermal modernization exceeds 160 kW·h/m² per year, corresponding to energy class G and not meeting minimum requirements.

Thus, the energy consumption of the climatization system for the current state of the building is about 635 MW·h, while the rooftop photovoltaic system can generate only about 190 MW·h.

For the existing energy supply system, two types of heat sources are considered – direct electric heating using heating elements and heat pumps.

The main difference between centralized heating and heat pump systems lies in the efficiency indicators of the heat generation and accumulation subsystems. As a result, the model with heat pumps yields heating energy consumption expressed in kW·h of electricity. Since it is this parameter that determines the consumption of either thermal or electrical energy, depending on the selected source of thermal energy.

If the centralized heating system is replaced by direct electric heating using heating elements, not only the generation efficiency indicators change but also the linear heat transfer coefficients and pipeline lengths. With direct heating, distribution losses are almost zero (see Table 2).

Table 2. Generation subsystem indicators for calculating energy losses in the heating system.

Indicator	Indicator value for:		
	Centralized heating	Direct electric heating	Heat pump installation
Generation subsystem			
Efficiency indicator of heat production/generation and storage subsystems	0,93	0,99	2,6-3
Heat losses in pipelines located in unheated spaces			
Linear heat transfer coefficient of the connecting pipeline	0,2	0	0,2
Length of the connecting pipeline	209	0	209
Equivalent length of shut-off and control valves	24	0	24
Heat losses in pipelines located in heated spaces			
Linear heat transfer coefficient of the vertical pipeline	0,3	0	0,3
Length of the vertical pipeline	349	0	349
Linear heat transfer coefficient of the horizontal pipeline	0,4	0	0,4
Length of the horizontal pipeline	176	0	176
Overall efficiency level of the heat emission subsystem in the room	0,82	0,91	0,82

Modeling of the considered energy sources allowed determining the specific energy consumption of the heating system. The results for the current building state are presented in Table 3.

Since Ukraine has committed to reducing greenhouse gas emissions, including in the energy and building sectors, thermal modernization of buildings and achieving minimum energy efficiency requirements is mandatory. Order of the Ministry for Communities and Territories Development of Ukraine №260 (27.10.2020) establishes specific minimum energy efficiency indicators and energy class requirements (class C for new or reconstructed buildings). Therefore, the heating system energy consumption was also determined after building modernization. The thermal resistance of building envelopes was brought to minimum requirements for the first temperature zone, and the energy consumption parameters were recalculated for the modernized building.

All values and modeling results are presented in Table 3 and Figure 2. Cooling energy consumption changes insignificantly because it is usually provided by household air conditioners and accounts for no more than 5% of the total climatization energy consumption.

Table 3. Specific energy consumption of the heating system

	With centralized heating	With direct electric heating (heating elements)	With heat pump installation
Heating system energy consumption before modernization, kW·h/m ² ·year	162,32	134,49	58,06
Cooling system energy consumption before modernization, kW·h/m ² ·year	2,67	2,67	2,67
Energy consumption after modernization, kW·h/m ² ·year	66,11	53,05	23,65
Cooling system energy consumption after modernization, kW·h/m ² ·year	1,06	1,06	1,06

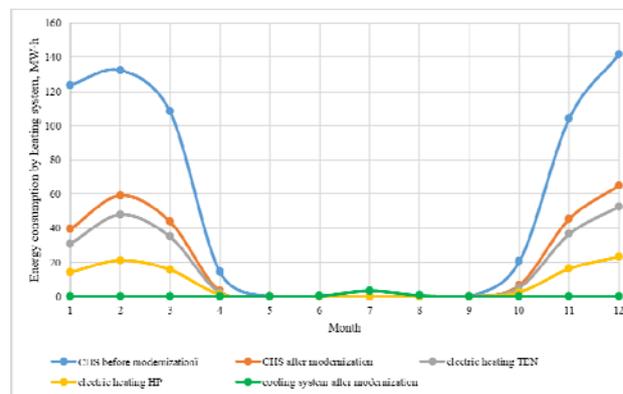


Figure 2. Heating system energy consumption before and after modernization

Analyzing the obtained graphs in Fig. 2 and the values in Table 3, we can say that the energy consumption of the heating system after modernization decreases by 2,5 times, and when installing an electric heating system with a HP – by 6,9 times. In this case, the rooftop photovoltaic system becomes capable of covering the electricity consumption of heating and cooling systems throughout the year.

Further analysis shows that switching to direct

electric heating does not significantly reduce energy consumption. In the conditions of prolonged war and destruction of energy infrastructure, such a transition may be forced but would require significant modernization of low-voltage distribution networks. In the case of a forced transition to electric heating for entire residential districts, such modernization would inevitably extend to urban distribution networks of medium voltage levels (6-10-35 kV). In addition, centralized heating systems can use various types of primary energy sources, including natural gas, coal, firewood, pellets, and fuel briquettes. In contrast, the transition to electric heating requires mandatory electricity generation, which to some extent narrows the choice of energy sources and simultaneously requires enhanced measures to ensure reliable backup power supply for consumers.

An alternative method that allows reducing electricity consumption in heating systems is the use of heat pumps. When switching to heat pump heating systems, the internal building heating networks require modernization. Advances in compressor technologies, heat exchangers, and refrigerants make it possible to achieve acceptable seasonal efficiency indicators for air-to-air and air-to-water heat pumps under climatic conditions typical for Ukraine. In this case, the expected energy consumption of heating systems decreases by 2,8-3,2 times compared to centralized and direct electric heating. Additional rooftop photovoltaic systems with or without storage systems and hybrid inverters can further improve the energy independence of buildings. This makes it possible to partially protect the building from prolonged power outages and also compensate for part of the electrical energy that will be consumed by the heat pump during the heating season.

To assess expected energy efficiency indicators of buildings with heat pump heating systems, the annual operation modes of the rooftop photovoltaic system were modeled.

First, the electricity generation of the photovoltaic power plant (PV system) is preliminarily estimated and analyzed. Figure 3 shows the monthly annual generation of a 175 kW rooftop photovoltaic system installed on the roof of the five-storey building. The installed capacity was determined considering the available roof area and the need to maintain technical service passages. For multi-storey residential buildings, typically 75–80% of the roof area can be used for PV installation.

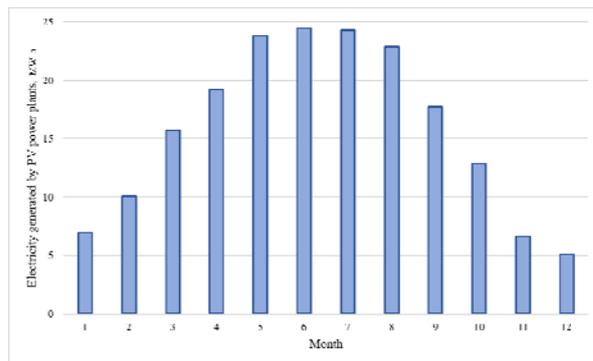


Figure 3. Annual generation of the rooftop photovoltaic system

The photovoltaic power plant is installed on the roof of a five-storey residential building. As shown in Fig. 3, the annual generation of the PV system amounts to almost 190 MW·h. Obviously, the energy generated by the station is insufficient to cover all the building's needs either annually or on a monthly basis. Therefore, individual engineering systems of the building that could potentially be supplied by this station are considered separately. To evaluate and determine the capability of the PV system to supply electricity to one of the building's engineering systems, the consumption of the most energy-intensive system – the climatization system – is analyzed.

Table 4 presents the main characteristics of solar panels that can be used for the installation of a rooftop photovoltaic power plant for the selected building.

Table 4. Solar panel characteristics

Panel power, W	Panel efficiency, %	Geometric dimensions, m	Panel area, m ²	Specific panel power, W/m ²
600	23,2	2,278x1,134	2,58	232,56
620	23	2,382x1,134	2,7	229,63
615	22,8	2,382x1,134	2,7	227,78
610	22,6	2,382x1,134	2,7	225,93
580	22,5	2,278x1,134	2,58	224,81
605	22,4	2,382x1,134	2,7	224,07
575	21,3	2,384x1,134	2,7	212,96

From Table 4 it can be seen that the higher the panel efficiency, the higher the specific power of the panel. Therefore, when modeling the rooftop PV system, the specific power of the first panel will be used, which equals 0,233 kW/m².

To model the operation of the solar power plant, the

effective roof area available for PV installation is first determined:

$$A_{ef.PV} = 0,75 \cdot A_{roof} = 0,75 \cdot 916,7 = 687,53 \text{ m}^2,$$

where 0,75 – area utilization factor, which accounts for the tilt angle of the panels, row spacing, technical maintenance passages, and setbacks from the parapet;

A_{roof} – roof area, determined according to the design documentation of the selected building, m².

The installed capacity of the photovoltaic power plant is determined as follows:

$$P_{PV} = A_{ef.PV} \cdot p_{PVM} = 687,53 \cdot 0,233 = 159,89 \text{ kW},$$

where $A_{ef.PV}$ – effective roof area, m²;

p_{PVM} – specific power of a photovoltaic module, kW/m².

The estimated annual generation of the PV system is calculated as follows:

$$\begin{aligned} E_{year} &= P_{PV} \cdot H_{ef} = 159,89 \cdot 1100 = \\ &= 175878,5 \text{ kW} \cdot \text{h per year}, \end{aligned}$$

where P_{PV} – PV system capacity, kW;

H_{ef} – effective solar hours for the central region of Ukraine, hours per year [14].

If the annual PV generation compensates the annual electricity consumption of the heat pump, the heating system can be considered operationally carbon neutral.

Thus, the amount of electrical energy required to ensure the operation of the heating system during the year is determined:

$$\begin{aligned} E_{ee} &= q_{H,nd} \cdot A_H = 25,65 \cdot 3974,9 = \\ &= 101956,19 \text{ kW} \cdot \text{h per year}, \end{aligned}$$

where $q_{H,nd}$ – annual specific energy demand of the heating system, kW·h/m²;

A_H – heated floor area of the building, m².

Figure 4 presents the results comparing PV generation with energy consumption of climatization systems under different building thermal characteristics.

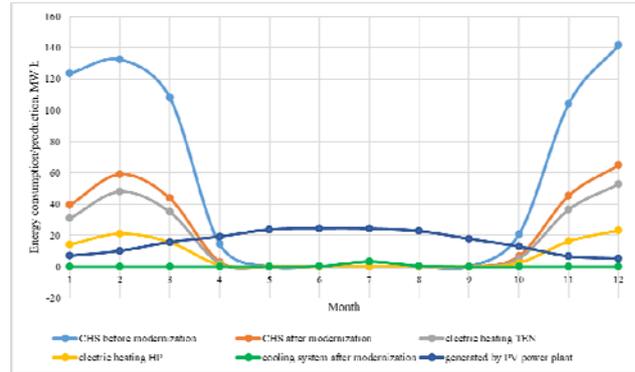


Figure 4. Capability of rooftop PV system to cover climatization loads

The modeling results show that the rooftop PV system can ensure independent operation of the climatization system on an annual basis provided that the building undergoes thermal modernization and heat pump systems are implemented (Fig. 5).

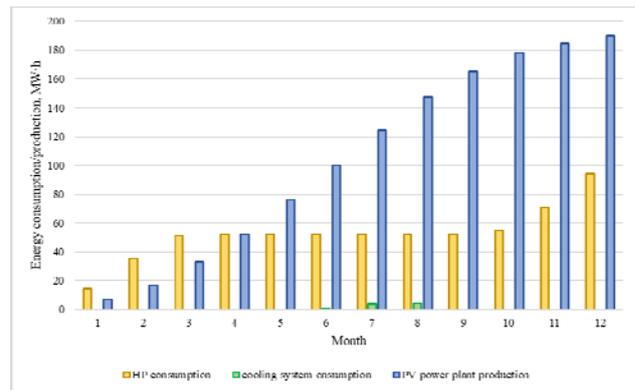


Figure 5. Cumulative annual balance of PV generation and climatization system consumption

Thus, comprehensive thermal modernization of buildings combined with heat pump integration and rooftop photovoltaic systems makes it possible to achieve operational climate neutrality for typical five-storey residential buildings in the climatic conditions of Ukraine. The proposed modeling algorithm allows evaluating the energy performance of other types of residential buildings, including new constructions and buildings located in different climatic regions.

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflicts of interest.

V. CONCLUSION

The study analyzed and established that a rooftop photovoltaic system can cover the operation of the building climatization system provided that comprehensive thermal modernization of multi-apartment residential buildings and their climatization systems is

carried out, the heat source and heating system temperature regimes are changed, and the actual ambient temperature conditions are taken into account.

It was determined that for typical five-storey residential buildings in the climatic conditions of Ukraine, installing rooftop photovoltaic systems and switching to low-temperature heating regimes using heat pumps allows achieving operational climate neutrality of climatization systems.

The transition to low-temperature heating schedules increases the seasonal coefficient of performance from 1,8-2,0 to 2,8-3,2, considering averaged outdoor temperatures over the last five years during the heating season. This reduces electrical loads associated with the transition to heat pump systems and improves the reliability of energy supply, which is especially important under conditions of ongoing attacks on Ukraine's energy infrastructure.

REFERENCES

- [1]. Zamkova, O. A., & Koshelenko, A. O. (2025). Osnovni zasady klimatichnoi neitralnosti ta zelenoho perekhodu Ukrainy [Fundamental principles of climate neutrality and the green transition of Ukraine]. In Proceedings of the XV International Scientific and Technical Conference of Postgraduates and Young Scientists "Naukova Vesna 2025" (pp. 156–158).
- [2]. Zamkova, O. A., & Koshelenko, A. O. (2024). Vplyv znachennia temperatury otochuiuchoho seredovyscha na pokaznyky enerhetychnoi efektyvnosti budivli [Influence of ambient temperature on building energy efficiency indicators]. In Proceedings of the XII International Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists "Molod: Nauka ta Innovatsii" (pp. 43–45).
- [3]. Boiko, O. O., Voskoboinyk, Ye. K., & Koshelenko, Ye. V. (2025). Doslidzhennia protsesu keruvannia teplovym komfortom u bahatokimnatnomu budynku z vykorystanniam detsentralizovanoi systemy v umovakh obmezhenoho elektropostachannia [Study of the thermal comfort control process in a multi-room house using a decentralized system under conditions of limited power supply]. Central Ukrainian Scientific Bulletin. Technical Sciences, 12(43), Part 1, 316–325. [https://doi.org/10.32515/2664-262X.2025.12\(43\).1.316-325](https://doi.org/10.32515/2664-262X.2025.12(43).1.316-325)
- [4]. Koshelenko, Ye. V., Lutsenko, I. M., Zamkova, O. A., Tsyhan, P. S., & Koshelenko, A. O. (2024). Tekhnolohii stvorennia system kombinovanoho zhyvlennia ob'ektiv mist [Technologies for creating combined power supply systems for urban facilities]. Collection of Scientific Works of NMU, 79, 222–231. <https://doi.org/10.33271/crpnmu/79.222>
- [5]. Namdar, H., Rossi di Schio, E., Semprini, G., & Valdiserri, P. (2025). Photovoltaic-thermal solar-assisted heat pump systems for building applications: A technical review on direct expansion systems. Energy and Buildings, 334, 115516. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2025.115516>
- [6]. Kazem, H. A., Chaichan, M. T., Al-Waeli, A. H. A., & Sopian, K. (2024). A systematic review of photovoltaic/thermal applications in heat pumps systems. Solar Energy, 269, 112299. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2023.112299>
- [7]. Rabczak, S., Mateichyk, V., Smieszek, M., Nowak, K., & Kolomiets, S. (2024). Evaluating the energy efficiency of combining heat pumps and photovoltaic panels in eco-friendly housing. Applied Sciences, 14(13), 5575. <https://doi.org/10.3390/app14135575>
- [8]. Dermentzis, G., Ochs, F., & Franzoi, N. (2021). Four years monitoring of heat pump, solar thermal and PV system in two net-zero energy multi-family buildings. Journal of Building Engineering, 43, 103199. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2021.103199>
- [9]. State Agency on Energy Efficiency and Energy Saving of Ukraine. (n.d.). Doslidzhennia rynku teplovykh nasosiv: dosvid Polshchi [Heat pump market research: the experience of Poland]. Retrieved March 6, 2026, from <https://sae.gov.ua/news/doslidzhennia-rynku-teplovix-nasosiv-dosvid-polshhi>
- [10]. Rana, S., Jamil, U., Asgari, N., Hayibo, K. S., Groza, J., & Pearce, J. M. (2024). Residential sizing of solar photovoltaic systems and heat pumps for net zero sustainable thermal building energy. Computation, 12(6), 126. <https://doi.org/10.3390/computation12060126>
- [11]. DBN V.2.5-23:2010. Proektuvannia elektroobladnannia ob'ektiv tsyvilnogo pryznachennia [Design of electrical equipment of civil facilities]. Kyiv: Minrehionbud Ukrainy.
- [12]. DSTU 9190:2022. (2022). Enerhetychna efektyvnist budivel. Metod rozrakhunku enerhospozhyvannia pid chas opalennia, okholodzhennia, ventyliatsii, osvitlennia ta hariachoho vodopostachannia [Energy performance of buildings: Method for calculating energy consumption for heating, cooling, ventilation, lighting and domestic hot water]. Kyiv: UkrNDNTs.
- [13]. DBN V.2.6-31:2021. (2021). Teplova izoliatsiia ta enerhoefektyvnist budivel [Thermal insulation and energy efficiency of buildings]. Kyiv: Ministry for Communities and Territories Development of Ukraine.
- [14]. International Electrotechnical Commission. (2021). IEC 61724-1:2021 photovoltaic system performance – Part 1: Monitoring. Geneva, Switzerland: IEC. ISBN 978-2-8322-5088-4.

Received 23.01.2026;

Accepted 06.03.2026;

Published 30.03.2026;

ДОСЛІДЖЕННЯ РІЧНОГО ЕНЕРГОСПОЖИВАННЯ ЖИТЛОВОЇ БУДІВЛІ З ФОТОЕЛЕКТРИЧНОЮ СТАНЦІЄЮ

- ЗАМКОВА О.А. аспірант кафедри електроенергетики НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7542-9536>, e-mail: Zamkova.O.A@nmu.one;
- КОШЕЛЕНКО А.О. аспірант кафедри електроенергетики НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-3983-2572>, e-mail: Koshelenko.A.O@nmu.one;

Мета роботи. Оцінити спроможність дахової фотоелектричної станції (ФЕС) забезпечити роботу інженерних мереж багатоквартирних житлових будинків, визначити комплекс заходів, які забезпечать ефективну інтеграцію дахових фотоелектростанцій з позицій досягнення нормативних показників енергетичної ефективності та мінімізації кліматичного впливу.

Методи дослідження. Використано розрахунково-аналітичні методи визначення енергоспоживання житлових будівель, а також методику розрахунку електричних навантажень багатоквартирних будинків для оцінки змін електроспоживання при різних варіантах обладнання систем кліматизації, застосовано метод сценарного аналізу та енергетичного моделювання.

Отримані результати. Дахові фотоелектричні станції, оснащені сучасними фотоелектричними модулями та інверторним обладнанням, розміщені на багатоквартирних п'ятиповерхових будівлях типового планування, здатні упродовж року покрити енергоспоживання систем кліматизації, що відповідає вимогам досягнення операційної кліматичної нейтральності. У роботі виконане комплексне моделювання взаємного впливу типів систем кліматизації будівель, вибору джерела енергії, температурних режимів системи опалення, фактичних температур оточуючого середовища на досяжний рівень енергетичної ефективності типових будівель житлового фонду. Моделювання режимів роботи дахової сонячної електростанції та порівняння очікуваного обсягу генерації електричної енергії з електроспоживанням типових будинків після комплексної термомодернізації і запровадження систем кліматизації з тепловими насосами дозволило встановити досягнення показників. Встановлено, що комплексна термомодернізація типових п'ятиповерхових будівель з переходом на електроопалення з використанням теплових насосів в якості основного джерела теплової енергії, дозволяють забезпечувати електроспоживання систем кліматизації будинків даховими фотоелектричними станціями.

Наукова новизна. У роботі обґрунтовано комплекс енергоефективних заходів, які включають встановлення дахових фотоелектричних станцій та дозволяють досягти показників операційної кліматичної нейтральності для типових п'ятиповерхових багатоквартирних житлових будинків. Встановлено, що перехід на електроопалення з використанням теплових насосів в якості основного джерела енергії, дозволяє в умовах фактичних осереднених температур зовнішнього повітря знизити споживання електричної енергії в 1,8-2,0 рази при існуючих температурних режимах системи опалення. Перехід на низькотемпературні графіки роботи систем опалення житлових будинків дозволяє знизити електроспоживання у 2,8-3,2 рази порівняно з прямим електроопаленням і забезпечити вихід на показники операційної кліматичної нейтральності систем кліматизації будинків.

Практична цінність. Результати можуть бути використані при розробці проєктів повної або часткової модернізації багатоквартирних житлових будівель, новому будівництві та при проєктуванні систем електроопалення будівель у тому числі з використанням електричної енергії, отриманої від дахових ФЕС. Отримані рішення відповідають ключовим задачам Енергетичної стратегії України до 2035 року, сприяють зміцненню енергетичної безпеки України, виконанню міжнародних зобов'язань в частині скорочення споживання первинних енергетичних ресурсів, зниження викидів парникових газів.

Ключові слова: енергетична ефективність, фотоелектрична станція, режими електроспоживання, кліматична нейтральність, системи кліматизації, тепловий насос.